CABRI II PLUS

CABRILOG

Innovative Mathematik Software

Benutzerhandbuch

WILLKOMMEN !

Herzlich Willkommen in der Welt der dynamischen Geometrie mit Cabri!

Cabri wurde ursprünglich am IMAG, in einem gemeinsamen Forschungslabor des CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique = Staatszentrum für wissenschaftliche Forschung) und der Joseph Fourier Universität in Grenoble (Frankreich) entwickelt. Jean-Marie LABORDE, Cabris geistiger Vater, startete das Projekt 1985, um das Lehren und Lernen der Geometrie zu vereinfachen.

Heutzutage erfreuen sich weltweit über 15 Millionen Benutzer der Cabri Software am Computer sowie auch auf Texas Instruments (TI) graphisch unterstützten Taschenrechnern.

Die Konstruktion geometrischer Figuren mit Cabri bietet in Vergleich zur herkömmlichen Konstruktion mit Papier, Bleistift, Lineal und Zirkel sowie den Messinstrumenten eine zusätzliche Dimension: Sobald eine Figur konstruiert ist, kann sie frei variiert werden. Diese Möglichkeit des Variierens dient unter anderem der Hypothesenbildung.

Cabri II Plus bietet eine breite Palette an leistungsfähigen, bedienerfreundlichen Merkmalen. Sie können ebene sowie als auch räumliche Figuren zeichnen und verändern, von der einfachsten bis hin zur umfangreichsten. Variieren Sie völlig frei die Konstruktionen zu jedem Zeitpunkt, um den Entwurf zu testen, messen oder löschen Sie Objekte, vermuten, berechnen, ändern oder fangen Sie ganz von vorne an. Eine fertige Figur kann dann im Internet veröffentlicht oder in einem Text integriert werden.
Cabri II Plus ist ein hochentwickeltes und umfassendes Werkzeug, entworfen für Lehrer sowie auch Schülern von der Grundschule bis hin zur Universität, zum Lehren und Lernen der Mathematik.

Einige Merkmale des Programms sind spezifisch für Macintosh-/ Windows-Versionen:
`Ctrl` und `Alt` unter Windows entsprechen dem Kommando `Option` Und zu `Alt` am Macintosh. Ein Rechtsklick unter Windows korrespondiert zu `Ctrl` + Klick auf dem Mac.

• **Schnittstellen**: Neue, größere und besser lesbare Ikons (Symbole). Intuitivere Pop-Up-Menüs um eine vieldeutige Auswahl zu lösen. Ändern Sie Attribute jedes beliebigen Objekts innerhalb weniger Mausklicks.

• **Beschriftung**: Nun können Sie alle graphischen Objekte benennen und um ein Objekt herum die Beschriftungen platzieren.

• **Ausdrücke:** Bestimmen Sie mathematische Ausdrücke mit einer oder mehreren Variabeln und überprüfen Sie diese dynamisch.

• **Einfache Graphen:** Zeichnen und lernen Sie einen Graphen, einer oder mehrerer Funktionen, ganz einfach. Die direkte Manipulation ermöglicht es Ihnen das Ergebnis einer Funktion, gemäß ihrer Parameter, zu erforschen.

• **Loci:** Stellen Sie loci von Punkten oder Objekten, Loci von Loci und Schnittpunkte mit Loci dar. Sie können ebenfalls die mathematische Gleichung einer gezeichneten Kurve über das Locus Hilfsmittel darstellen lassen.

• **Intelligente Linien:** Nur der “nützliche” Teil einer Linie wird dargestellt. Sie können die Länge des Abschnitts beliebig oft verändern.

• **Farben:** Wählen Sie Objekt- und Textfarben sowie

Hintergrundfüllfarben von der erweiterten Farbpalette oder durch das dynamische Farbhilfsmittel.

• **Bilder (Bitmaps, JPEG, GIF):** Fügen Sie ein beliebiges Bild einem Objekt einer Figur (Punkt, Liniensegment, Vieleck, Hintergrund) an. Das Bild wird während einer Animation als auch während einer Veränderung der Figur erneuert.

• **Text:** Verändern Sie den Stil, Schriftart und Texteigenschaften eines individuellen Schriftzeichens.

• **Fenster mit Figurenbeschreibung:** Öffnen Sie ein Fenster um alle Schritte einer Konstruktion auflisten zu lassen.

• **Speichern einer Sitzung:** Speichern Sie eine Sitzung während Sie das Programm nutzen. Lassen Sie die Zwischenspeicherung später am Bildschirm darstellen oder drucken Sie diese aus, um den Fortschritt des Schülers überwachen zu können. Dadurch lassen sich Schwierigkeiten, welche Ihre Schüler erfahren haben, eindeutig feststellen.

• **Importieren/ Exportieren von Figuren:** Darstellungen können von oder zu Ihrem Computer von TI graphisch unterstützten Taschenrechnern (TI-83 Plus und TI-84 Plus), mit installierter Cabri Junior Software, überspielen.

All diese einmaligen Funktionen können der Lernerfahrung Ihrer Schüler neue Dimensionen eröffnen.

Dieses Benutzerhandbuch beinhaltet zwei Teile:

Teil **[1] ERSTE SCHRITTE - GRUNDLAGEN** wurde für Erstbenutzer von Cabri Geometrie entworfen. Diese machen Sie mit der Cabri Geometrie Oberfläche vertraut und gibt Ihnen eine Richtlinie zur

Benutzung der Maus. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass Benutzer den Umgang mit Cabri Geometrie sehr schnell lernen und Schüler im Unterricht bereits nach einer halben Stunde Beschäftigung mit der Software ihre Geometriekenntnisse einbringen können.

Part **[2] ENTDECKUNG - WEITERFÜHRUNG** wurde für Erstbenutzer entworfen und bietet Vorschläge auf Oberstufenniveau, die Welt der interaktiven Geometrie zu entdecken.

REFERENZ SEKTION.pdf ist das komplette Nachschlagewerk zur Software.

WEITER GEHT´S - FORTGESCHRITTENENKURS.pdf schlägt Aktivitäten für Abiturienten oder Studenten vor. Die Aktivitäten dieses Dokuments sind weitestgehend unabhängig voneinander. Leser sind eingeladen, die detaillierten Konstruktionsmethoden durchzuführen und sich danach an den aufgeführten Aufgaben zu versuchen.

Cabri Geometrie II Plus ist demnach eine Weiterführung von Cabri Geometrie.

Visit our website at *www.cabri.com* for manual updates and product news. You will also find links to dozens of websites and information concerning books about geometry and Cabri.

Ihr Cabrilog-Team wünscht Ihnen viele faszinierende Stunden voller Konstruktion, Erforschung und Entdeckung.

Cabri II Plus Benutzerhandbuch:
Ursprüngliche Autoren: Sandra Hoath and Chartwell Yorke
Deutsche Übersetzung: Christoph Heine
Version: Juli 2007
Entwicklungen: *www.cabri.com*
Fehlermeldung an: *support@cabri.com*
Graphik Design, Seitenlayout & Korrektur: Cabrilog

INHALT

KAPITEL 1

ERSTE SCHRITTE - GRUNDLAGEN

1.1 SOFTWARE-PHILOSPHIE

Cabri Geometrie wurde entwickelt, um das größtmögliche Zusammenspiel zwischen Benutzer und Software (mittels Maus, Tastatur, etc.) zur Verfügung zu stellen. In jedem Falle zu tun, was der Benutzer von der Software erwarten würde. Auf der einen Seite durch Einhaltung gegebener Industriestandards, auf der anderen Seite durch Verfolgung des mathematisch plausibelsten Wegs.

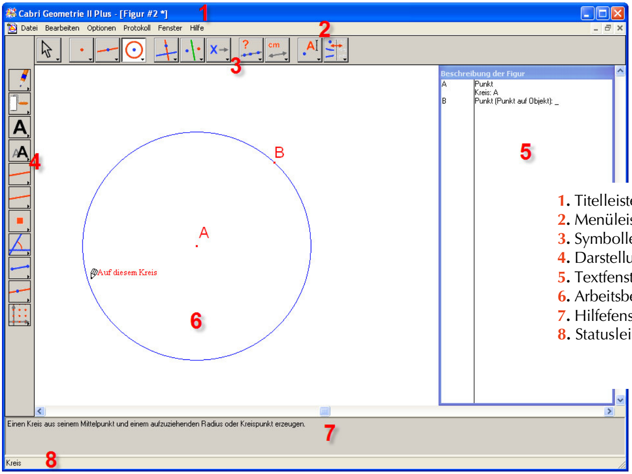
Ein ***Dokument*** von Cabri Geometrie besteht aus einer ***Figur***, welche frei auf einem 1m² großen virtuellen Arbeitsblatt konstruiert werden kann. Eine Figur besteht aus geometrischen Standardobjekten (Punkte, Linien, Kreise, usw.) und anderen Objekten (Zahlen, Text, Formeln, usw.).

Ein Dokument kann auch ***Makrokonstruktionen*** mit gespeicherten und widerherstellbaren Zwischenstadien von Konstruktionen enthalten, welches die Funktionalität des Programms erweitert.

Mit Cabri Geometrie können Sie mehrere Dokumente gleichzeitig öffnen und untereinander ausschneiden, kopieren und einfügen.

1.2 BENUTZEROBERFLÄCHE

Die obige Abbildung zeigt das Hauptfenster von Cabri Geometrie und seine verschiedenen Sektionen. Beim Erststart der Cabri Geometrie wird die Attributleiste, das Hilfefenster und das Textfenster nicht angezeigt.



1. Titelleiste
2. Menüleiste
3. Symbolleiste
4. Darstellungsart
5. Textfenster
6. Arbeitsbereich
7. Hilfefenster
8. Statusleiste

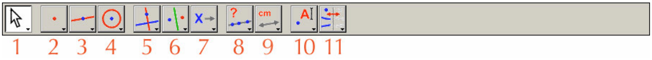
In der ***Titelleiste*** erscheint der Dateiname der Figur (vorausgesetzt die Datei wurde bereits geöffnet oder gespeichert) oder Figur #1,2..., wenn die Figur noch nicht benannt wurde.

Die ***Menüleiste*** gestattet dem Benutzer Dokumente zu verändern, Dateien aufzurufen und gibt die Kontrolle über die Programmeinstellungen und Eigenschaften.

Im weiteren Verlauf des Handbuchs werden alle Kommandos wie folgt beschrieben:
Aktion des Menüs [Menü] wird dargestellt im Format [Menü]Aktion.
Beispiel: [Datei]Sichern unter... bezeichnet die Option Sichern unter... des Menüs Datei.

Die ***Symbolleiste*** stellt die Werkzeuge zur Erstellung und Veränderung einer Figur bereit. Diese besteht aus mehreren Toolboxen, welche jeweils ein vorhandenes Werkzeug als Ikon (Symbol) in der Leiste darstellt. Wählen Sie ein gewünschtes Werkzeug durch einen einfachen Mausklick. Klicken und Halten Sie ein Werkzeug um die Toolbox als Drop-Down-Menü zu öffnen.
Ziehen Sie mit der Maus auf ein gewünschtes anderes Werkzeug. Dieses zuletzt gewählte Werkzeug erscheint nun als Ikon (Symbol) in der Toolbox.

Gestalten Sie Ihre ***Symbolleiste*** ganz individuell oder geben Sie diese als feste Konfiguration für Schulklassennutzung vor. Sehen Sie dazu Kapitel **[8] BENUTZEREINSTELLUNGEN** in der **REFERENZ SEKTION.pdf**.



1. Auswahl/ Zeiger
2. Punkte
3. Geradliniges
4. Kurven/ Krümmungen
5. Konstruktion
6. Abbildung
7. Makro
8. Eigenschaften
9. Messung/Berechnung
10. Text/ Animation
11. Darstellungsart

Im Verlauf dieses Handbuchs wird das Kommando zum Aufruf eines Werkzeugs in einer der Toolboxen dargestellt als: [Toolbox]Werkzeug. Das entsprechende Symbol wird am Seitenrand angezeigt.
Beispiel: [Gerade]Strahl bezeichnet das Werkzeug Strahl von der Toolbox Geraden.

Dabei werden Beschriftungen, welche für den Seitenrand zu lang sind, mit einer Abkürzung angezeigt.

Die Icons (Symbole) der Symbolleiste können in kleingeschriebenem oder großgeschriebenem Format dargestellt werde. Um Größe der Ikons (Symbole) zu ändern bewegen Sie den Mauszeiger auf die rechte Seite des letzten Werkzeugs in der Symbolleiste und wählen Sie nach einem Rechtsklick (unter Windows, `Strg` + Klick am Macintosh); Kleine Icons.

Die ***Statusleiste*** zeigt immer das aktive Werkzeug an.

Mit der ***Attributleiste*** können Sie die Darstellungsarten der Objekte ändern: Farbe, Stil, Größe, usw. Mit dem Befehl [Optionen]Attributleiste zeigen blenden Sie die Attributleiste ein, mit [Optionen]Attributleiste ausblenden wird diese ausgeblendet. Alternativ können Sie unter Windows dazu auch die Taste `F9` verwenden.

Im ***Hilfefenster*** wird ein knapper Hilfetext für das aktive Werkzeug angezeigt. Er gibt die vom Werkzeug erwarteten Objekte und die zu konstruierende Figur an. Drücken Sie die Taste `F1` um das Hilfefenster ein- und auszublenden.

Das ***Textfenster*** enthält eine Beschreibung der Figur in Textform. Diese Beschreibung listet alle konstruierten Objekte und die verwendeten Konstruktionsmethoden auf. Das ***Textfenster*** wird mit dem Befehl [Optionen]Figurenbeschreibung zeigen aufgerufen und mit dem Kommando [Optionen]Figurenbeschreibung ausblenden ausgeblendet. Sie können dazu auch die Taste `F10` benutzen (unter Windows, `Ctrl F10` am Macintosh).

Im ***Arbeitsbereich*** schließlich wird ein Teil des bearbeiteten Blattes angezeigt. Geometrische Konstruktionen werden in diesem ***Arbeitsbereich*** durchgeführt.

1.3 VERWENDUNG DER MAUS

Die meisten Softwarefunktionen werden mit Hilfe der Maus gesteuert.
- Bewegen Sie die Maus um den Mauszeiger (Cursor) zu bewegen
- Drücken Sie eine Maustaste
- Lassen Sie die Maustaste wieder los

Wird der Cursor mit der Maus über den Arbeitsbereich geführt informiert Sie Cabri Geometrie über die zu erwartenden Ergebnisse eines Mausklicks oder eines ***drag-and-drops*** (Ziehen und Ablegen) in drei unterschiedlichen Weisen:
- Der Mauszeiger ändert seine Form
- Eine Meldung wird neben dem Mauszeiger angezeigt
- Das sich in Konstruktion befindende Objekt wird teilweise angezeigt

In bestimmten Fällen werden die Meldung und die teilweise Darstellung nicht angezeigt.

Im Folgenden ein Liste der Mauszeiger:


Ein bestehendes Objekt kann ausgewählt werden.


Ein vorhandenes Objekt kann ausgewählt, gezogen oder in einer Konstruktion verwendet werden.


Angezeigt, wenn auf ein vorhandenes Objekt geklickt wurde, um es auszuwählen oder in einer Konstruktion zu verwenden.


Unter dem Zeiger stehen mehrere Auswahlmöglichkeiten zur Verfügung. Mit einem Mausklick dieses Zeigers wird ein Menü angezeigt aus welchem Sie ein spezifisches Objekt aus einer Liste wählen können.


Ein bestehendes Objekt wird bewegt.


Der Zeiger befindet sich in einem leeren Bereich des Blattes. Mit Drag-and-Drop (Ziehen und Ablegen) kann eine rechteckige Auswahlzone definiert werden.


Signalisiert den Modus zum Verschieben des Blattes. Durch Drücken und Halten der Taste `Strg` unter Windows (`Optionen` am Macintosh) können Sie diesen Modus jeder Zeit aufrufen. In diesem Modus kann das Blatt mit Drag-and-Drop im Fenster verschoben werden.


Das Arbeitsblatt wird verschoben/ gezogen.


Ein Mausklick wird einen neuen freien Punkt auf dem Arbeitsblatt erstellen.


Ein Mausklick erstellt einen neuen Punkt, welcher entweder auf einem bestehenden Objekt oder im Schnitt zweier bestehender Objekte zu Liegen kommt.


Durch einen Mausklick wird das Objekt, welches sich unterhalb des Cursors befindet, mit der aktuellen Füllfarbe gefüllt.


Die Merkmale (z.B. Farbe, Stil, Dicke, usw.) des Objekts unter dem Cursor werden durch einen Mausklick geändert.

1.4 IHRE ERSTE KONSTRUKTION

Zur Veranschaulichung des Kapitels **[1] ERSTE SCHRITTE – GRUNDLAGEN** werden wir ein Quadrat, ausgehend von einer seiner Diagonalen, konstruieren. Beim Starten von Cabri Geometrie wird automatisch ein neues, leeres, virtuelles Zeichenblatt erstellt, auf welchem Sie sofort mit Ihrer Konstruktion beginnen können.

Konstruieren sie die Strecke, welche die Diagonale des Quadrats darstellen wird. Wählen Sie zuerst das Werkzeug [Geradliniges]Strecke (s. ***Abb. 1.1***).

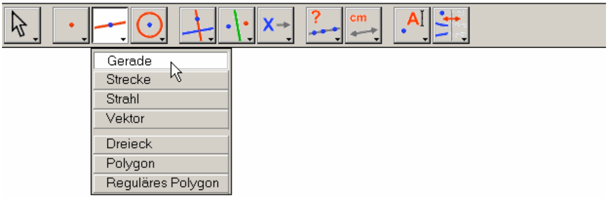


Abb. 1.1 *– Auswahl des Werkzeugs [Geradliniges]Strecke*

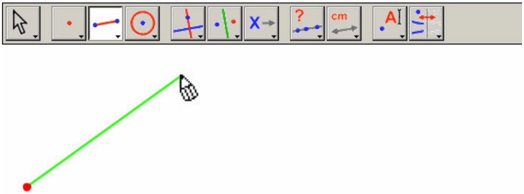


Abb. 1.2 *– Konstruktion des ersten Punktes. Bis zur Wahl des zweiten Punktes bewegt sich eine Vorschau der endgültigen Strecke mit dem Cursor mit.*

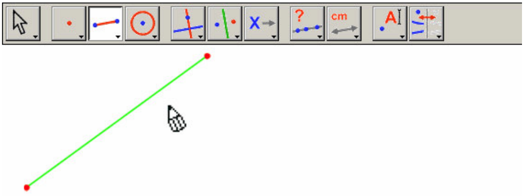
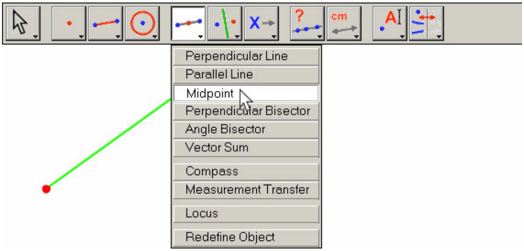
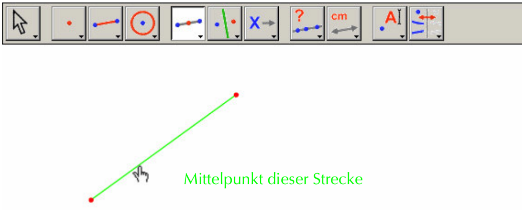


Abb. 1.3 *– Nach Kreation des zweiten Punktes wird die Strecke vervollständigt. Das Werkzeug [Geradliniges]Strecke bleibt aktiv und gestattet die Konstruktion der nächsten Strecke.*

Setzen Sie nun den Zeiger in den Arbeitsbereich, wo er folgende Form annehmen wird . Erstellen Sie den ersten Punkt durch einmaliges Klicken. Verschieben sie des Weiteren den Zeiger im Arbeitsbereich. Eine Linie zwischen dem ersten Punkt und dem Zeiger veranschaulicht die Strecke, welche konstruiert wird. Erstellen Sie den zweiten Punkt durch Klicken. Unsere Figur umfasst jetzt zwei Punkte und eine Strecke.

Um das Quadrat zu konstruieren können wir zuerst den Kreis verwenden, dessen Durchmesser gleich der Länge der Diagonalen des Quadrats ist. Der Mittelpunkt des Kreises entspricht der Mitte der Strecke. Um den Mittelpunkt zu konstruierten, wählen Sie das Werkzeug [Konstruktion]Mittelpunkt und verschieben Sie den Zeiger auf der Strecke. Neben dem Zeiger, welcher folgende Form erhält , wird der Text Mittelpunkt dieser Strecke angezeigt. Klicken Sie, um den Mittelpunk der Strecke zu konstruieren.





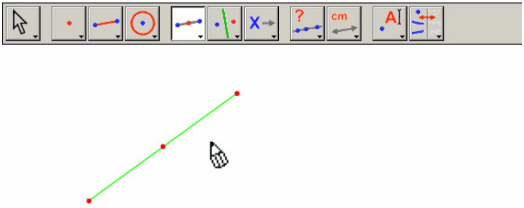
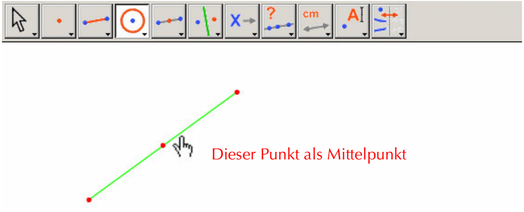


***Abb. 1.4** – Konstruktion des Mittelpunkts der Strecke.*

Wählen Sie das Werkzeug [Kurven]Kreis und verschieben den Zeiger in die Nähe des konstruierten Mittelpunkts. Die Meldung Dieser Punkt als Mittelpunkt wird dann angezeigt. Das Werkzeug [Kurven]Kreis erwartet nun die Wahl eines Punktes als Kreismittelpunkt. Klicken Sie daher zur Bestätigung auf den Mittelpunkt. Darauf hin erscheint, durch Bewegung des Zeigers, ein Kreis. Bewegen Sie den Cursor in die Nähe eines Endpunktes der Strecke. Die Meldung und dieser als Kreispunkt wird angezeigt. Klicken Sie und der Kreis mit diesem Endpunkt als Kreispunkt wird konstruiert.



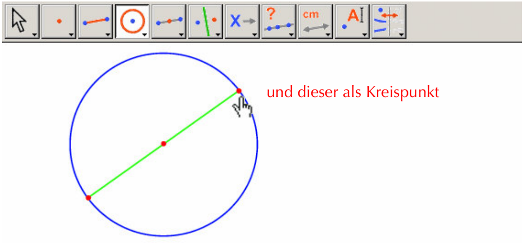


Abb. 1.5 *– Konstruktion des Kreises mit der Strecke als Durchmesser.*

Wählen die das Werkzeug [Auswahl/ Zeiger]Zeiger um die Figur zu verändern. Die einzigen Punkte der Figur, welche Sie bewegen können, sind die Endpunkte des Streckensegments und die Strecke selber. Wird der Cursor über eines dieser Objekte geführt, wird der Zeiger zu und die Meldung Dieser Punkt oder Diese Strecke wird angezeigt. Der Punkt oder die Strecke kann dann via Drag-and-Drop bewegt werden und die gesamte Figur wird automatisch aktualisiert: Die Strecke wird neu gezeichnet, der Mittelpunkt und Kreis werden entsprechend angefügt.

Zur Konstruktion Ihres Quadrats fehlt Ihnen noch die andere Diagonale, welche dem Durchmesser des Kreises entspricht und senkrecht zur Ausgangsstrecke steht. Konstruieren Sie dazu die Mittelsenkrechte der Strecke: Eine Linie, senkrecht zur Ausgangsstrecke und durch deren Mittelpunkt. Aktivieren Sie das Werkzeug [Konstruktion]Mittelsenkrechte und wählen Sie die Ausgangsstrecke durch einen Mausklick. Cabri Geometrie konstruiert die Mittelsenkrechte.

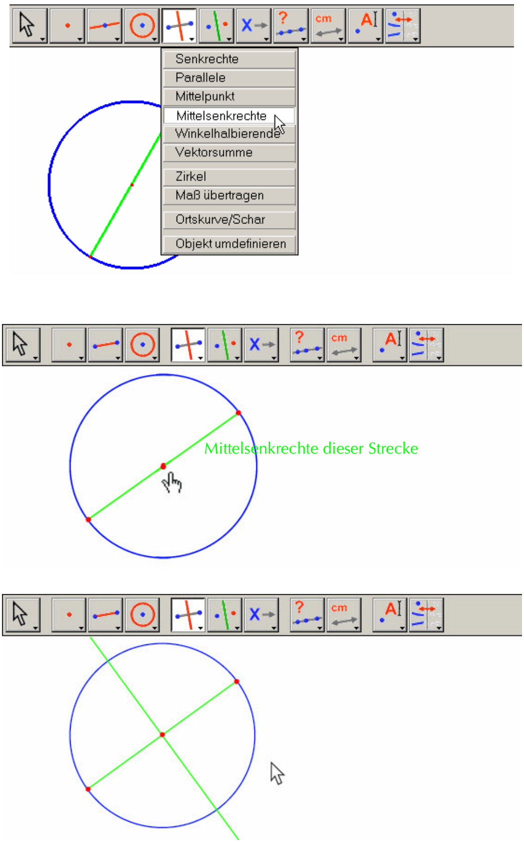
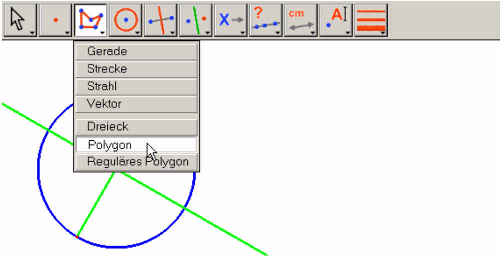
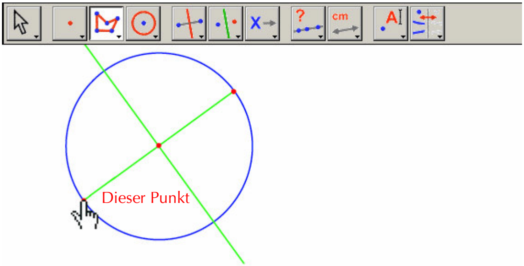


Abb. 1.6 *– Konstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke, welche die andere Diagonale des Quadrats bestimmt.*

Zur Vervollständigung des Quadrats wählen Sie [Geradliniges]Polygon. Dieses Werkzeug erwartet die Auswahl einer Folge von Punkten, welche die Eckpunkte des Polygons definieren. Die Eingabe ist beendet, wenn der Ausgangspunkt erneut angeklickt wird oder der letzte Punkt der Punktfolge mit einem Doppelklick ausgewählt wird. Die beiden Schnittpunkte des Kreises mit der Mittelsenkrechten sind zwar noch nicht explizit konstruiert, Cabri Geometrie gestattet jedoch ihre implizite Auswahl wie gewünscht.





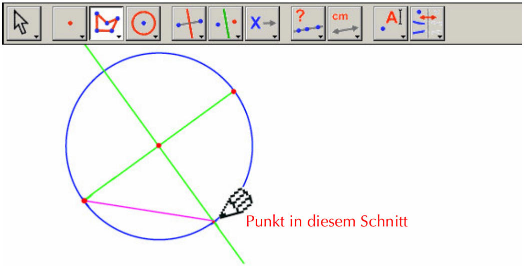


***Abb. 1.7** – Konstruktion des Quadrats durch implizite Auswahl der Schnittpunkte zwischen Kreis und Mittelsenkrechten.*

In anderen Worten, wählen Sie einen Endpunkt der Strecke als ersten Eckpunkt des Polygons. Bewegen Sie den Zeiger nun zu einem der Schnittpunkte zwischen Kreis und Mittelsenkrechten.

Die Meldung Punkt in diesem Schnitt gibt an, dass ein Mausklick den Schnittpunkt konstruiert und gleichzeitig als nächsten Eckpunkt des Polygons auswählt. Wählen Sie diesen Punkt, dann den verbliebenen Endpunkt der Ausgangsstrecke und den zweiten Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit dem Kreis. Klicken sie schließlich ein zweites mal auf den Ausgangspunkt (oder Doppelklick auf den letzten Eckpunkt des Polygons).

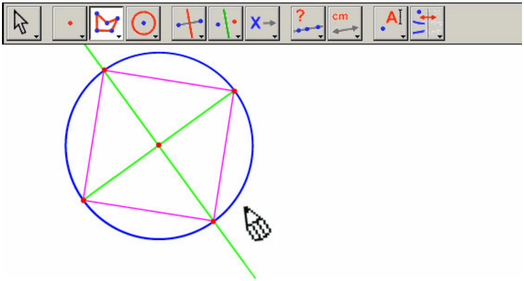


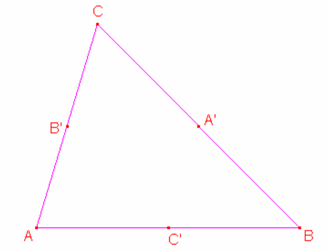
***Abb. 1.8** – Ihre erste Konstruktion mit CabriII Plus!*

EULER'SCHE GERADE

In diesem Kapitel werden wir in beliebiges Dreieck ABC und anschließend die drei Seitenhalbierenden dieses Dreiecks konstruieren. Dabei handelt es sich um die Gerade, die einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbinden. Im Anschluss werden wir die drei Höhen des Dreiecks konstruieren: Die Geraden, welche senkrecht zu einer Seite sind und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen. Zuletzt werden die drei Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks konstruiert: Die Geraden, welche senkrecht zu einer Seite sind und durch ihren Mittelpunkt gehen. Wie wir wissen, schneiden sich jeweils die drei Höhen, die drei Seitenhalbierenden und die drei Mittelsenkrechten. Diese Schnittpunkte liegen auf einer Geraden, der *Euler'schen*[1] Geraden des Dreiecks.

Zur Konstruktion eines Dreiecks wählen Sie das Werkzeug [Geradliniges]Dreieck. Erklärungen für das Arbeiten mit der Toolbox finden sie im vorherigen Kapitel **[1] ERSTE SCHRITTE – GRUNDLAGEN**.

Sobald das Werkzeug [Geradliniges]Dreieck aktiviert ist, klicken Sie auf einen leeren Platz des Arbeitsbereichs, um drei neue Punkte zu erstellen. Direkt nach deren Erstellung können Sie, durch Eingabe über die Tastatur, die Punkte beschriften. Sobald das Dreieck konstruiert ist, können Sie die Bezeichnungen der Punkte verschieben, damit sie sich z.B. außerhalb des Dreiecks befinden.



[1]Leonhard Euler, 1707-1783

Abb. 2.1 *– Mit dem Werkzeug [Geradliniges]Dreieck konstruiertes Dreieck. Die Eckpunkte sind bereits während ihrer Erstellung beschriftet worden.*

Eine Objektbezeichnung können Sie mit dem Werkzeug [Auswahl/ Zeiger]Zeiger verschieben. Ziehen Sie die Objektbezeichnung indem Sie den Mauszeiger auf dieser zum Ruhen bringen, bis die Meldung Diese Beschriftung erscheint. Drücken Sie die rechte Maustaste und verschieben Sie die Bezeichnung zur gewünschten Stelle. Um eine Objektbezeichnung zu ändern, aktivieren Sie das Werkzeug [Text/ Animation]Objektname. Wählen Sie den Namen in dem sich öffnenden Bearbeitungsfenster.

Mittelpunkte werden mit dem Werkzeug [Konstruktion]Mittelpunkt konstruiert. Um den Mittelpunkt von AB zu konstruieren, wählen Sie nacheinander A und B aus.

Ein weiterer Weg, der Konstruktion des Mittelpunkts eines Segments besteht durch direkte Wahl des Segments an sich. Der neue Punkt kann sofort, z.B. mit C′ benannt werden. Erstellen Sie den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seiten auf dieselbe Art: A′ von BC und B′ von CA.

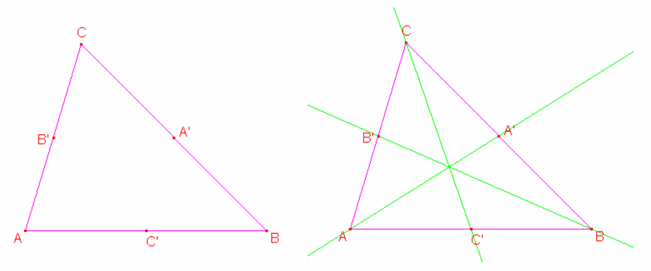


Abb. 2.2 *– [Links]. Die Mittelpunkte werden mit dem Werkzeug [Konstruktion]Mittelpunkt konstruiert, welches zwei Punkte, eine Strecke (Segment) oder die Seite eines Polygons als Argument akzeptiert. [Rechts]. Die Streckenhalbierenden werden mit dem Werkzeug [Geradliniges]Gerade erstellt, ihre Farbe wird mit [Darstellungsart]Objekt färben geändert..*

Mit dem Werkzeug [Manipulation/ Zeiger]Zeiger können Sie die unabhängigen, beweglichen Objekte einer Konstruktion verschieben. In diesem Fall sind die drei Punkte A, B und C die unabhängigen, beweglichen Objekte der Konstruktion. Der komplette Entwurf wird automatisch aktualisiert, sobald Sie eines dieser Objekte bewegen. Dies gestattet, die Konstruktion in zahlreichen Konfigurationen zu untersuchen. Um die unabhängigen, beweglichen Objekte einer Figur zu ermitteln, aktivieren Sie das Werkzeug [Manipulation/ Zeiger]Zeiger, klicken Sie in einen leeren Bereich des Arbeitsblattes und halten Sie die Maus gedrückt. Nach einem kurzen Augenblick beginnen die freien Objekte zu blinken. Das Werkzeug [Geradliniges]Gerade gestattet die Konstruktion der drei Seitenhalbierenden. Zur Erstellung der Geraden (AA′) geben Sie zuerst A und dann A′ an.

Benutzen Sie das Werkzeug [Darstellungsart]Objekt färben um die Linienfarbe zu ändern.
Wählen Sie die Farbe in der Palette und dann die zu färbenden Objekte aus.

Aktivieren Sie das Werkzeug [Punkte]Punkt und nähern Sie den Zeiger dem Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden an. Cabri Geometrie versucht, den Schnittpunkt von zwei Geraden zu erstellen. Da

Mehrdeutigkeit herrscht (Existenz dreier, sich schneidender Geraden), wird ein Menü zur Auswahl der Geraden angezeigt, aus welchem Sie zwei Geraden wählen, welche zur Erstellung des Schnittpunkts verwendet werden sollen. Beim Ziehen des Zeigers auf den Menü-Einträgen, wird die entsprechende Gerade in der Figur hervorgehoben. Nennen Sie den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden G.

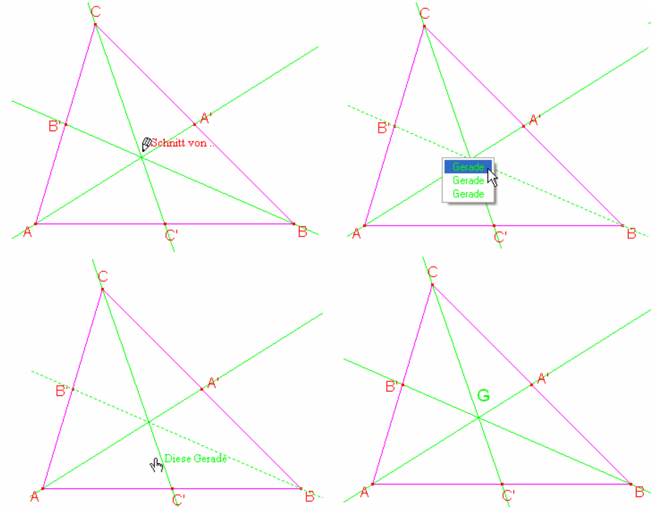


Abb. 2.3 *– Konstruktion des Schnittpunkts der Seitenhalbierenden und Auflösung der Mehrdeutigkeit der Auswahl.*

Wählen Sie das Werkzeug [Konstruktion]Senkrechte um die Höhen des Dreiecks zu konstruieren. Dieses Werkzeug erstellt die eindeutige Senkrechte, die in einer gegebenen Richtung durch einen gegebenen Punkt geht. Das Werkzeug benötigt hierfür die Auswahl eines Punktes sowie einer Geraden, einer Strecke, eines Strahls usw. Die Reihenfolge der Auswahl spielt hierbei keine Rolle. Um die Höhe von A zu konstruieren, wählen Sie A und die Seite BC. Verfahren Sie mit der gleichen Methode für die Höhen durch B und C. Suchen Sie für die

Höhen wie für die Seitenhalbierenden eine eigene Farbe und erstellen die den Schnittpunkt H der Höhen.

Das Werkzeug [Konstruktion]Mittelsenkrechte gestattet die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke. Wählen Sie die Strecke oder ihre Endpunkte aus. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten erhält die Bezeichnung O.

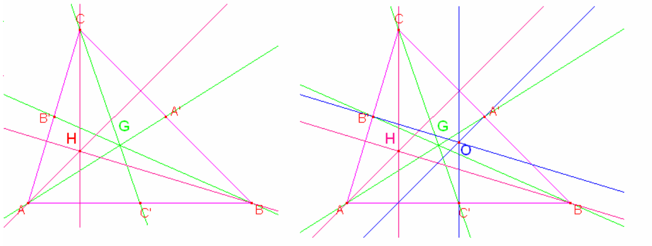


Abb. 2.4 – *[Links]. Erstellung der Höhen mit dem Werkzeug [Konstruktion]Senkrechte.*
[Rechts]. Die Mittelsenkrechten werden mit dem Werkzeug [Konstruktion]Mittelsenkrechte erstellt.

Überprüfen Sie die Kolliniarität der Punkte O, H und G mit dem Werkzeug [Eigenschaften]Kollinear?. Wählen Sie diese Punkte nacheinander aus und klicken Sie auf eine beliebige Stelle des Arbeitsblattes. Cabri Geometrie zeigt Ihnen an, ob die Punkte kollinear sind.

Beim Bewegen unabhängiger Punkte der Figur wird dieser Text ebenso wie die anderen Elemente der Figur aktualisiert.

Konstruieren Sie mit dem Werkzeug [Geradliniges]Gerade die Euler'sche Gerade des Dreiecks, welche durch die Punkte O, H und G verläuft, indem Sie z.B. O und H auswählen. Verwenden Sie [Darstellungsart]Liniendicke um diese Gerade hervorzuheben.

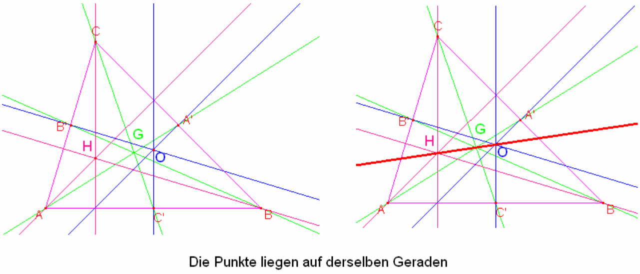


Abb. 2.5 *– [Links]. Überprüfung der drei Punkte O, H und G auf Kollinearität. Das Werkzeug [Eigenschaften]Kollinear? gibt, je nach Figureneigenschaft den Text „Die Punkte liegen auf derselben Geraden"(Punkte sind kollinear)oder „Die Punkte liegen nicht auf derselben Geraden"(Punkte sind nicht kollinear)aus.*
[Rechts]. Die Euler'sche Gerade des Dreiecks, welche durch eine geänderte Liniendicke [Darstellungsart]Liniendicke hervorgehoben ist.

Verändern Sie die Form des Dreiecks, durch Verschiebung eines Eckpunkts, scheint der Punkt G zwischen O und H zu bleiben und auch seine relative Position auf der Strecke OH scheint sich nicht zu ändern. Wir könnten dies durch Messung der Längern GO und GH überprüfen. Aktivieren Sie das Werkzeug [Messung/ Berechnung]Entfernung u. Länge. Mit diesem Werkzeug kann man, je nach ausgewähltem Objekt, die Entfernung zwischen zwei Punkten oder die Länge eines Streckensegments messen. Wählen Sie G und anschließend O aus. Die Entfernung GO wird in cm angegeben. Wiederholen Sie dies für G und H. Nach Abschluss der Messung können Sie das entsprechende Messergebnis bearbeiten, und z.B. „GO=" vor der Zahl einfügen.

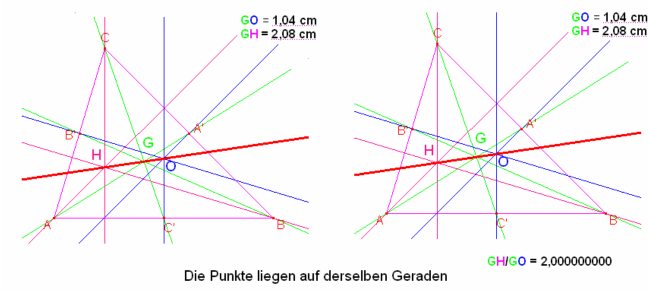


Abb. 2.6 - *[Links]. Mit dem Werkzeug [Messung/ Berechnung]Entfernung u. Länge erhält man die Längen von GO und GH.*
[Rechts]. Mit dem Rechner im Werkzeug [Messung/ Berechnung]Berechnung berechnen Sie das Verhältnis GH/ GO und zeigen, dass dies ist immer gleich 2 ist.

Durch Veränderung des ursprünglichen Dreiecks sehen Sie, dass GH immer zweimal der Länge GO ist. Zur Verifizierung, berechnen wir das Verhältnis GH/ GO. Aktivieren Sie das Werkzeug [Messung/ Berechnung]Berechnen. Geben Sie die Entfernung GH, dann den Operator / (das Zeichen der Division) und schließlich die Entfernung GO ein. Klicken Sie auf die Schaltfläche =, um das Ergebnis zu erhalten, welches Sie mit Drag-and-Drop auf dem Arbeitsblatt platzieren können. Wenn Sie eine Zahl ausgewählt haben (Werkzeug [Auswahl/ Zeiger]Zeiger), können Sie die Anzahl der Nachkommastellen mit den Tasten + und – erhöhen und reduzieren. Auch wenn Sie zur Verdeutlichung das Verhältnis mit Zehn oder mehr Nachkommastellen anzeigen lassen, bleibt sein Wert gleich 2.

Aufgabe 1 – Vervollständigen Sie die Figur durch Konstruktion des Umkreises des Dreiecks, welcher den Mittelpunkt O hat und durch die Punkte A, B und C geht. Verwenden Sie hierzu das Werkzeug [Kurven/ Krümmungen]Kreis.

Aufgabe 2 – Konstruieren Sie darauf folgend den "Neunpunktekreis" des Dreiecks. Dabei handelt es sich um den Kreis, dessen Zentrum der Mittelpunkt von OH ist und der durch die Mittelpunkte A′, B′ und C′ der Seiten, die Fußpunkte der Höhen und durch die Mittelpunkte der Strecken HA, HB und HC geht.

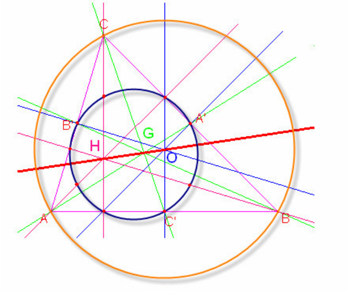


***Abb. 2.7** – Die endgültige Figur mit dem Umkreis und dem "Neunpunktekreis" des Dreiecks.*

JAGDT NACH DEM PUNKT

Die folgende Vorgehensweise illustriert verschiedene Wege, welche Sie mit Cabri Geometrie erforschen können. Suchen Sie, ausgehend von drei gegebenen Punkten A, B, C, die Punkte M, welche folgender Vektorgleichung genügen:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Konstruieren Sie zunächst vier beliebige Punkte mit dem Werkzeug [Punkte]Punkt und benennen Sie diese als A, B, C, M.

Cabri Geometrie gestattet das Erstellen von Vektoren. Jeder Vektor wird üblicherweise durch einen Pfeil gekennzeichnet. Konstruieren Sie nun eine Darstellung des Vektors $\overrightarrow{MA}$ mit dem Werkzeug [Geradliniges]Vektor, indem Sie zunächst M und dann A auswählen. Der Vektor hat seinen Anfangspunkt bei M. Wiederholen Sie die Operation für $\overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{MC}$.

Als nächstes erstellen Sie die Summe der Vektoren $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ indem Sie das Werkzeug [Konstruktion]Vektorsumme aktivieren. Klicken sie als erstes auf die beiden Vektoren und anschließend auf den Anfangspunkt des resultierenden Vektors, in diesem Fall M. Der Endpunkt erhält die Bezeichnung N.

Jetzt wird die Summe der drei Vektoren mit M als Anfangspunkt auf gleiche Weise, durch Summieren von $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{MC}$, konstruiert. Der Endpunkt dieser Darstellung erhält die Bezeichnung P.

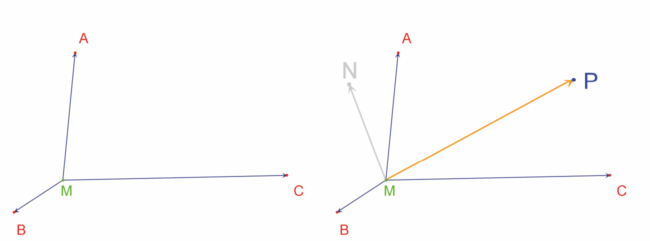


Abb. 3.1 *- [Links]. Ausgehend von drei beliebigen Punkten A, B und C sowie einem Punkt M werden die Vektoren* $\overrightarrow{MA}$*,* $\overrightarrow{MB}$ *und* $\overrightarrow{MC}$ *konstruiert.*
[Rechts]. Mit dem Werkzeug [Konstruktion]Vektorsumme *werden* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ *und* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ *konstruiert.*

Jetzt können Sie mit Hilfe graphischer Variationen Lösungen für das Problem suchen. Dazu aktivieren Sie das Werkzeug [Auswahl/Zeiger]Zeiger und verschieben Sie den Punkt M. Der resultierende Vektor der drei Vektoren wird während des Ziehens von M im Arbeitsbereich ständig aktualisiert. Gemäß der Position von M im Verhältnis zu den Punkten A, B und C können Sie die Länge und Ausrichtung des Vektors $\overrightarrow{MP}$ feststellen. Unter anderem können folgende Vermutungen aufgestellt werden:

• Wenn M nur eine einzige Position hat, wird die Summe der drei Vektoren zu einem Vektor der Länge 0. Das Problem hat nur eine Lösung, welche sich innerhalb des Dreiecks ABC befindet.
• Das Viereck MANB ist ein Parallelogramm.
• Das Viereck MCPN ist ein Parallelogramm.
• Damit die Summe 0 wird, müssen die Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MC}$ kollinear sein, gleiche Länge und entgegengesetzte Richtungen haben.
• $\overrightarrow{MP}$ verläuft immer durch denselben Punkt; dieser Punkt ist die Lösung des Problems.
• Der Endpunkt P der Summe ist ein von M abhängiger Punkt. Wir definieren dann eine Abbildung, die P dem Punkt M zuweist. Die Lösung des Problems ist ein invarianter Punkt dieser Abbildung.

Angenommen wir haben festgestellt, dass die Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MC}$ entgegengesetzt sein müssen. Dann stellt sich eine weitere Frage: Für welche Position von M sind diese beiden Vektoren kollinear? Verschieben Sie M, so dass die beiden Vektoren kollinear sind. Sie können beobachten, dass M auf einer Geraden liegen muss, welche ebenfalls durch den Punkt C und den Mittelpunkt von AB geht. Diese Gerade ist die Seitenhalbierende des Dreiecks durch C. Da M von A, B und C gleich abhängig ist, stellen Sie fest, dass M ebenfalls auf den anderen Seitenhalbierenden liegen muss. Dem zu Folge ist der gesuchte Punkt der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.

Als Aufgabe für Schüler könnten diese mit der Konstruktion des Lösungspunktes beginnen und die erarbeitete Hypothese mit einer Untersuchung begründen.

Eine dynamische Konstruktion ist eine bei weitem überzeugendere Darstellung al seine statisch, auf einem Blatt Papier erarbeitete, Figur. In der Regel genügt es, die Figur zu variieren, um die Hypothese zu überprüfen. Eine Vermutung, welche nach einer Variation gültig bleibt, ist in den meisten Fällen richtig.

Für einen effizienteren Einsatz im Unterricht ist es interessant, unter anderem folgende Fragen mit den Schülern zu behandeln:

- Ist eine dynamisch und optisch korrekt erscheinende Konstruktion tatsächlich richtig?
- Stellt eine richtige dynamische Konstruktion die Lösung für ein Problem dar?
- Zu welchem Zeitpunkt kann man eine mathematische Argumentation als “Beweis” qualifizieren?
- Was fehlt einer dynamischen Konstruktion, damit sie zum Beweis wird?
- Muss der Beweis auf dem Konstruktions- bzw. Bearbeitungsprozess der Figur basieren?

Aufgabe 3 – Erweitern Sie das Problem auf vier Punkte aus und suchen Sie die Punkte M, die z.B. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ genügen.

Aufgabe 4* - Entwickeln Sie alle “Untersuchungswege” und Begründungen für das Anfangsproblem (drei Punkte), welche für Schüler der Oberstufe verständlich sind.

Aufgabe 5* - Untersuchen und konstruieren Sie die Summe der Entfernungen des Punktes M zu den Punkten A, B, C und minimieren Sie

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Als Lösung ergibt sich der *Fermat*[1]-Punkt des Dreiecks ABC.

[1]Pierre Simon de Fermat, 1601-1665'

DAS VARIGNON-VIERECK

Die folgende Vorgehensweise zeigt einige Konstruktionen, welche auf dem *Satz von Varignon*[1] basieren.

Konstruieren Sie zunächst ein beliebiges Viereck ABCD. Aktivieren Sie das Werkzeug [Geradliniges]Polygon und wählen Sie vier, sofort als A, B, C und D bezeichnete, Punkte aus. Um das Polygon abzuschließen, wählen Sie nach der Erstellung von D erneut den Punkt A aus.

Erstellen Sie nun die Mittelpunkte P von AB, Q von BC, R von CD und S von DA unter Zuhilfenahme des Werkzeugs [Konstruktion]Mittelpunkt.

Konstruieren Sie schließlich das Viereck PQRS mit dem Werkzeug [Geradliniges]Polygon.

Durch Variation der Figur mit dem Werkzeug [Auswahl/ Zeiger]Zeiger scheint PQRS immer ein Parallelogramm zu sein. Mit [Eigenschaften]Parallel? können Sie Cabri Geometrie die Parallelität der Linien [PQ]und [RS] sowie für [PS] und [QR] prüfen lassen. Um dies zu tun, wählen Sie [PQ] und dann [RS]. Eine erscheinende Meldung, welche angibt, dass die beiden Seiten tatsächlich parallel sind, bestätigt dies. Verfahren Sie mit derselben Methode um [PS] und [QR] zu prüfen.

[1]Pierre Varignon,
1654-1722

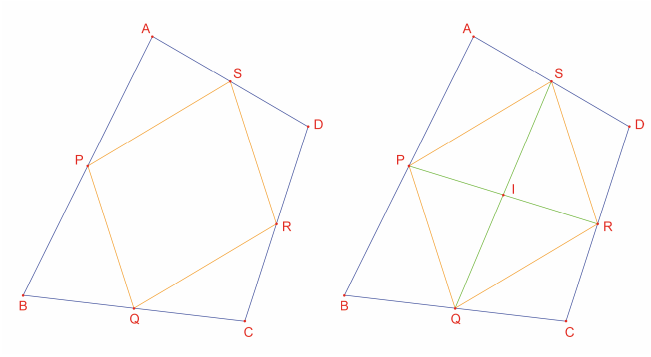


Abb. 4.1 - *[Links]. Ausgehend von einem beliebigen Viereck ABCD wird das Viereck PQRS konstruiert, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Seiten von ABCD sind.*
[Rechts]. Konstruktion der Diagonalen von PQRS, für welche gezeigt wird, dass sie sich in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Konstruieren Sie nun also die beiden Diagonalen PR und QS mit dem Werkzeug [Geradliniges]Strecke und ihren Schnittpunkt I mit dem Werkzeug [Punkte]Punkt. Es lässt sich auf mehrere Arten demonstrieren, dass I der Mittelpunkt von PR und QS ist, wonach PQRS ein Parallelogramm mist. Zum Beispiel mit einer Schwerpunktberechnung: Da P der Massenschwerpunkt zweier Partikel gleicher Massen an A und B {(A,1),(B,1)} und R der Schwerpunkt von {C,1),(D,1)} ist, ist der Mittelpunkt von PR der Massenschwerpunkt von {(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)}. Selbiges gilt für den Mittelpunkt von QS. Die beiden Mittelpunkte fallen daher in einem Punkt zusammen, dem Schnittpunkt I.

Satz von Varignon: Das Viereck PQRS, dass ausgehend von den Mittelpunkten eines beliebigen Vierecks ABCD konstruiert wird, ist ein Parallelogramm und seine Fläche entspricht der Hälfte der Fläche von ABCD.

Aufgabe 6 – Zeigen Sie, dass der zweite Teil des Theorems in Bezug auf die Fläche von PQRS richtig ist. Hinweis: Verwenden Sie die Figur, welche in Abb. 4.2., gezeigt ist.

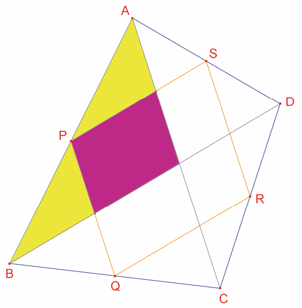


***Abb. 4.2** – Konstruktion zur Verdeutlichung des zweiten Teils des **Satzes von Varignon**.*

Ohne A, B und C zu modifizieren, verschieben Sie D so, dass PQRS ein Rechteck zu sein scheint. Da Sie bereits wissen, dass es sich um ein Parallelogramm handelt, genügt es zu zeigen, dass einer seiner Winkel ein rechter Winkel ist. Messen Sie den Winkel von P mit dem Werkzeug [Messung/ Berechnung]Winkel. Dieses Werkzeug erwartet von Ihnen die Auswahl dreier Punkte, welche einen Winkel definieren, wobei der zweite Punkt der Scheitelpunkt des Winkels ist. Wählen Sie hier, zum Beispiel, S, P (Scheitelpunkt des Winkels) und Q.

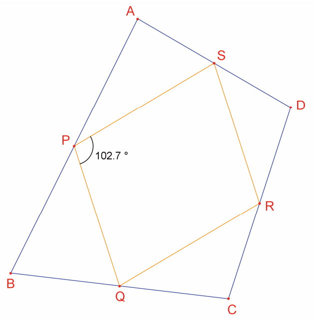


Abb. 4.3 *– Messung des Winkels bei P des Parallelogramms PQRS.*

Ebenso könne Sie zur Messung eines Winkels, welcher vorher mit dem Werkzeug [Text/Animation]Winkelmarkierung markiert wurde, das Werkzeug [Messung/ Berechnung]Winkel verwenden. Wählen Sie für das Werkzeug [Text/Animation]Winkelmarkierung ebenfalls drei Punkte, in derselben Reihenfolge wie für das Werkzeug [Messung/ Berechnung]Winkel. Durch Verschiebung von D, so dass PQRS ein Rechteck darstellt, erkennen Sie, dass es eine unendliche Anzahl an Lösungen gibt, so lange Da auf einer bestimmten Geraden geführt wird. In der Tat sehen Sie, wenn die Diagonalen AC und BD des Ausgangsvierecks ABCD gezeichnet werden, dass die Seiten von PQRS parallel zu diesen Diagonalen sind und dass daher PQRS nur dann ein Rechteck ist, wenn AC und BD senkrecht aufeinander stehen. Um sicher zu stellen, dass PQRS immer ein Rechteck ist, bedarf es einer neuen Definition der Position von D. Zeichnen Sie die Gerade AC mit dem Werkzeug [Geradliniges]Gerade, indem Sie A und C auswählen, und anschließend die durch B gehende Senkrechte zu dieser Geraden mit dem Werkzeug [Konstruktion]Senkrecht?, indem Sie B und die Gerade AC auswählen.

D ist momentan ein unabhängiger, beweglicher Punkt der Figur. Ändern Sie ihn so, dass er gezwungen wird, auf der Senkrechten zu AC zu liegen, welche durch den Punkt B geht. Aktivieren Sie das Werkzeug [Konstruktion]Objekt umdefinieren und wählen Sie dann D aus. Ein Menü mit den verschiedenen Optionen zum Umdefinieren von D wird angezeigt. Wählen Sie Punkt auf Objekt und anschließend einen Punkt auf der Senkrechten. D wird an diesen Punkt verschoben und ist künftig gezwungen, auf der gewählten Geraden zu bleiben.

Die Umdefinition ist eine besonders leitungsstarke Untersuchungsmethode, mit der Sie den Elementen einer Figur Freiheitsgrade entziehen oder hinzufügen können, ohne dass sie völlig neu erstellt werden muss.

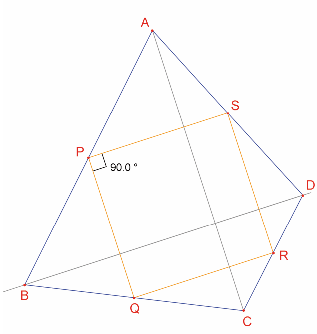


Abb. 4.4 *– Der Punkt D wurde jetzt so umdefiniert, dass PQRS immer in Rechteck ist. Dieser Punkt verfügt nur noch über einen Freiheitsgrad, da er auf der Geraden bewegt werden kann.*

Aufgabe 7 – Finden Sie eine Bedingung, die erforderlich und ausreichend ist, damit PQRS ein Quadrat wird. Definieren Sie D so um, dass die Konstruktion nur Quadrate liefert.

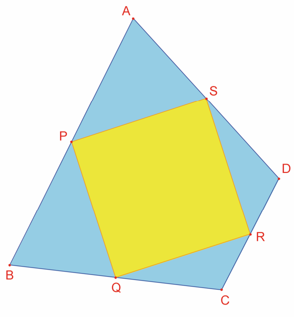


Abb. 4.5 *– Der Punkt D hat keinen Freiheitsgrad mehr und PQRS ist nun immer ein Quadrat.*