CABRI® II Plus

CABRILOG

Creador de Herramientas Matemáticas

MANUAL DEL USUARIO

BIENVENIDO!

¡Bienvenido al mundo dinámico de Cabri II Plus!

Nacido al final de los 80 en el seno de un laboratorio de investigación asociado al CNRS (Centro Nacional de la Investigación Científica) y a la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Cabri Géomètre cuenta hoy con más de 100 millones de usuarios, en computadoras o calculadoras gráficas Texas Instruments, en todo el mundo. Cabri II Plus es ahora desarrollado y distribuido por la sociedad Cabrilog, fundada en marzo del 2000 por Jean-Marie LABORDE, director de investigación del CNRS y «padre espiritual» de Cabri II Plus.

La construcción en computadora de figuras geométricas tiene una nueva dimensión con respecto a las construcciones clásicas que utilizan lápiz, papel, regla y compás. Cabri II Plus posee un gran número de funcionalidades, potentes y fáciles de utilizar. Las figuras, de las más simples a las más complicadas pueden ser manipuladas libremente. En cualquier momento, se puede probar la construcción de una figura, hacer conjeturas, medir, calcular, borrar, ocultar/mostrar objetos, poner colores o textos, modificar el punteado, o bien recomenzar todo. Cabri II Plus es el líder de los softwares para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Esta dirigido tanto a los profesores como a los alumnos,y puede ser utilizado desde la escuela primaria hasta la universidad.

Algunas funcionalidades del software son específicas de las Plataformas Mac OS o Windows: las teclas `Ctrl` y `Alt` de Windows corresponden a las teclas ⌘ y `Alt` ⌥ para Mac OS. El clic derecho de Windows corresponde al `Ctrl`+clic en Mac OS.

- **Interfase:** Los nuevos iconos son más grandes y más legibles. Los menús contextuales hacen aun más intuitiva la utilización de Cabri II Plus, resolviendo fácilmente las situaciones de ambigüedad de selección o cambiando los atributos de cualquier objeto en algunos clics.

- **Etiquetas:** Nombre todos los objetos y posicione el nombre en cualquier parte o alrededor de un objeto.

- **Expresiones:** Defina y evalúe dinámicamente expresiones con una o más variables.

- **Graficación instantánea:** Trace y estudie fácilmente las gráficas de una o varias funciones.

- **Lugares:** Construya lugares de puntos o de objetos, lugares de lugares o intersecciones con lugares. Las ecuaciones de curvas algebraicas construidas con la herramienta Lugar pueden ser mostradas.

- **Rectas inteligentes:** Despliegue solamente la parte útil de una recta. El tamaño de esta porción de recta puede ser modificado a voluntad.

- **Colores:** Elija los colores de los objetos y de los textos así como los colores de relleno con la ayuda de la nueva paleta de colores extendida o utilizando los colores variables dinámicamente.

- **Imágenes (Bitmaps, JPEG, GIF):** Ligue una imagen a ciertos objetos de una figura (puntos, segmentos, polígonos, fondo). Las imágenes son recalculadas durante las animaciones y las manipulaciones de la figura.

- **Texto:** El estilo, la fuente y los atributos de texto de cualquier objeto pueden ser cambiados libremente.

- **Ventana de descripción:** Una ventana puede ser abierta para listar todas las etapas de la construcción de una figura.

- **Guardado de una sesión:** Guarde una sesión durante la utilización del software. Una sesión puede ser releída en la pantalla o puede ser impresa, para estudiar la progresión de los alumnos e identificar claramente las dificultades encontradas durante una experimentación.

- **Importación/Exportación de figuras:** Las figuras pueden ser transferidas hacia o desde una calculadora gráfica que utiliza Cabri Junior (TI-83 Plus y TI-84 Plus).

Todas estas novedosas funcionalidades pueden aportar una nueva dimensión a la práctica de su enseñanza.

Este documento esta dividido en dos partes.

La parte **[1] INICIACIÓN** esta destinada a los usuarios que utilizan Cabri II Plus por primera vez. Permite familiarizarse con la interfase de Cabri II Plus y con las convenciones de uso del ratón. Sin embargo, la experiencia muestra que la introducción a Cabri II Plus es muy rápida, y que en clase los alumnos hacen ya geometría en su primera media hora de uso del software.

La parte [**2] EXPLORACIÓN** está destinada a los nuevos usuarios y propone actividades de los niveles educativos secundaria y preparatoria (medio y medio superior). Otros documentos son también suministrados con Cabri II Plus. Estos están disponibles como documentos PDF en el repertorio de instalación del software o en el CD-ROM de instalación.

El primer documento **REFERENCIA.pdf** es una descripción completa del software.

El segundo documento **PROFUNDIZACIÓN.pdf** presenta otras actividades más avanzadas, de nivel preparatoria y primer ciclo universitario.

Las actividades de esos documentos son independientes las unas de las otras. El lector esta invitado a hacer las construcciones detalladas así como los ejercicios propuestos.

Nuestro sitio *www.cabri.com* le dará acceso a las últimas actualizaciones y a las novedades relacionadas con nuestros productos, en particular las nuevas versiones de este documento. El sitio contiene vínculos hacia decenas de páginas Internet y referencia igualmente numerosos libros sobre la geometría y sobre Cabri II Plus.

Todo el equipo de CABRILOG le desea largas y apasionantes horas de construcciones, de exploraciones y de descubrimientos.

Manuel de Cabri II Plus :
Autor inicial: Eric Bainville
Actualizaciones: Julio Moreno, Marzo 2007
Evoluciones: *www.cabri.com*
Errores a señalar: *support@cabri.com*
Creación gráfica, configuración de pagina y relecturas: Cabrilog

CONTENIDO

INICIACIÓN

EXPLORACIÓN

CAPÍTULO 1

INICIACIÓN

1.1 FILOSOFÍA

La filosofía de Cabri II Plus es de permitir el máximo de interacciones (ratón, teclado…) entre el usuario y el software, y en cada caso, de hacer lo que el usuario espera que haga el software, respetando por una parte los comportamientos usuales de las aplicaciones y del sistema, y por otra el comportamiento matemático más plausible.

Un ***documento*** Cabri II Plus está compuesto de una ***figura*** construida libremente sobre una hoja única de papel virtual de un metro cuadrado (1 m por 1 m). Una figura está compuesta de objetos geométricos (puntos, rectas, círculos, …) e igualmente de otros objetos (números, textos, fórmulas, …).

Un documento puede también incluir ***macro-construcciones***, que permiten, memorizando construcciones intermedias, extender las funcionalidades del software.

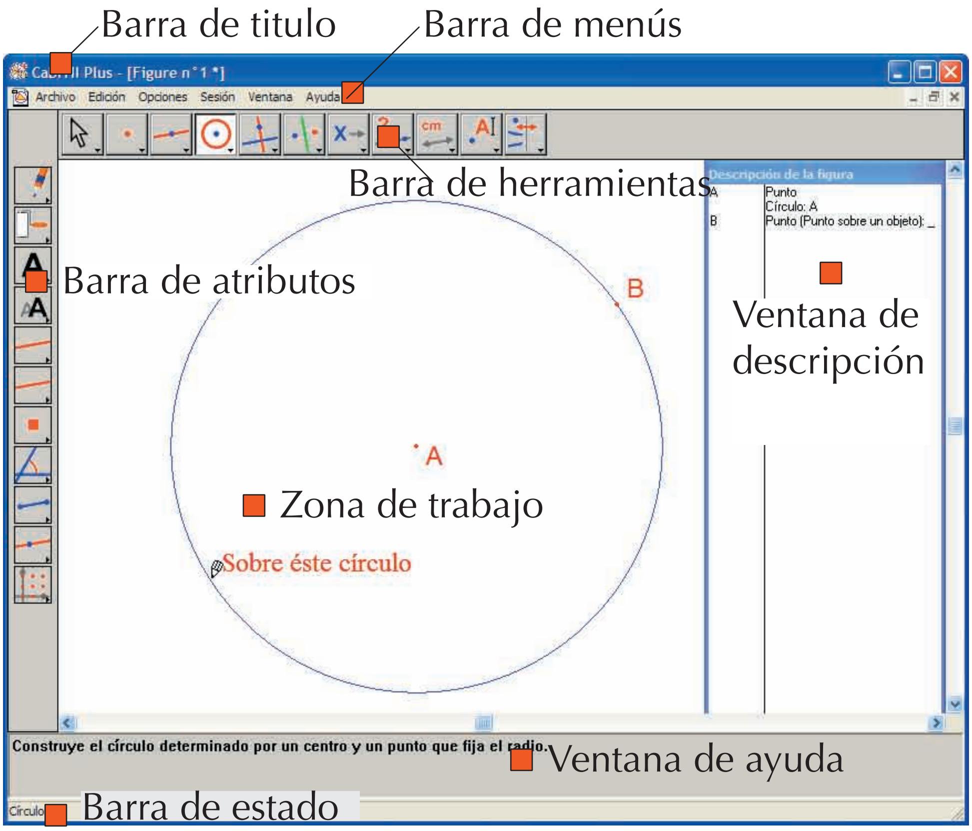
La aplicación permite abrir simultáneamente varios documentos y soporta el Cortar-Copiar/Pegar entre documentos abiertos.

1.2 INTERFASE

La figura anterior muestra la ventana principal de la aplicación y sus diferentes zonas. Al lanzamiento de Cabri II Plus, la barra de atributos, la ventana de ayuda y la ventana de descripción no son visibles.

La ***barra de título*** indica el nombre del archivo que contiene la figura, o Figura nº 1, 2… si a la figura no se le ha asignado aún un nombre.

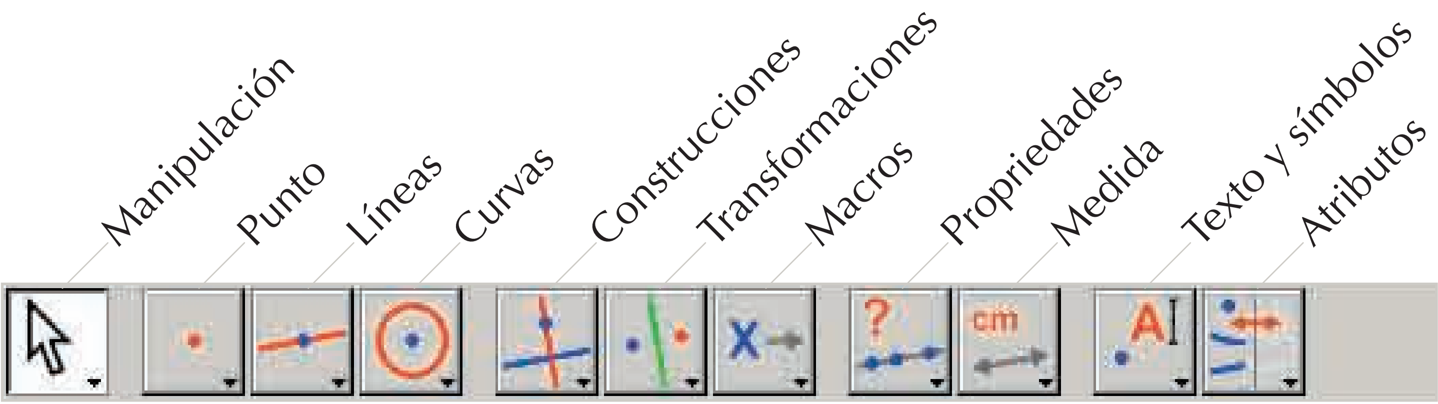
La ***barra de menús*** permite acceder a los comandos de la aplicación, que corresponden a los comandos usuales encontrados usualmente en los softwares.

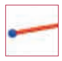


En lo que sigue de este documento, designaremos la opción Acción del menú Menú por [Menú]Acción. Por ejemplo, [Archivo]Grabar como... designa la entrada Grabar como... del menú Archivo.

La ***barra de herramientas*** proporciona las herramientas que permiten crear y manipular la figura. Está constituida de varios paquetes de herramientas, conteniendo cada uno, una herramienta visible que corresponde a un icono de la barra. La herramienta activa se representa por un botón oprimido, con un fondo blanco. Las otras herramientas se representan por botones no oprimidos, con un fondo gris. Un clic corto sobre un botón activa la herramienta correspondiente. Una presión prolongada sobre un botón despliega el paquete de herramientas y permite ahí elegir otra herramienta. Esta otra herramienta será la visible de ese paquete y la que estará activa.

La barra de herramientas puede ser reorganizada libremente por el usuario y eventualmente bloqueada en una configuración fija para una utilización en clase (ver el capítulo **[8] PREFERENCIAS Y PERSONALIZACIÓN en REFERENCIA.pdf**).



En lo que sigue de este documento, designaremos la herramienta Herramienta del paquete Paquete por [Paquete]Herramienta, con el icono correspondiente recordado en el margen (ciertas etiquetas demasiado largas para ser contenidas en el margen han sido abreviadas). Por ejemplo [Líneas]Semirrecta  representa la herramienta Semirrecta del paquete de herramientas Líneas.

Los iconos de la barra de herramientas pueden ser mostrados en dos tamaños. Para cambiar de tamaño, basta hacer clic sobre el botón derecho del ratón y seleccionar «Pequeños iconos», después de haber desplazado el cursor en la barra de herramientas, a la derecha de la última herramienta.

La ***barra de estado*** en la parte inferior de la ventana, indica de forma permanente la herramienta activa.

La ***barra de atributos*** permite modificar los atributos de los objetos: colores, estilos, tamaños… Se activa con el comando [Opciones]Mostrar los atributos, y se oculta con [Opciones] Ocultar los atributos, o con la tecla `F9` per Widows e ⌘+`F9` per Mac.

La ***ventana de ayuda*** proporciona una ayuda sucinta sobre la herramienta seleccionada. Indica los objetos esperados por la herramienta y lo que será construido. Se activa/oculta con la tecla `F1` per Widows e ⌘+`F1` per Mac.

La ***ventana de descripción*** contiene una descripción de la figura en formato de texto. Ahí se encuentra el conjunto de los objetos construidos y su método de construcción. Se activa con el comando [Opciones]Mostrar la descripción y se oculta con [Opciones]Ocultar la descripción, o con la tecla tecla `F10` per Widows e ⌘+`F10` per Mac.

Finalmente, la ***zona de trabajo*** representa una porción de la hoja de trabajo. Es en la zona de trabajo donde se efectúan las construcciones geométricas.

1.3 UTILIZACIÓN DEL RATÓN

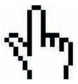
La mayor parte de las funcionalidades del software se realizan utilizando el ratón. Las acciones sobre el ratón son el desplazamiento, la presión sobre un botón y la liberación de un botón. En ausencia de indicación contraria, se tratará del botón izquierdo del ratón.

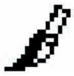
- Una secuencia presión-liberación es llamado ***clic***.
- Una secuencia presión-liberación-presión-liberación es llamado ***doble clic***.
- Una secuencia presión-desplazamiento-liberación es llamado ***deslizar-depositar***.

Cuando se desplaza el ratón en la zona de trabajo, el software nos informa de tres maneras lo que producirá un clic o un deslizar-depositar.

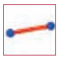
- la forma del apuntador,
- el texto mostrado al lado del apuntador,
- una representación parcial del objeto en construcción.

Según sea el caso, el texto y la representación parcial pueden no ser mostrados.

Los diferentes cursores son los siguientes:	
	Un objeto existente puede ser seleccionado.
	Un objeto existente puede ser seleccionado, o desplazado, o utilizado en una construcción.
	Aparece cuando se hace clic sobre un objeto existente para seleccionarlo, o utilizarlo en una construcción.
	Varias selecciones son posibles bajo el apuntador. Un clic provocará la aparición de un menú que permite precisar los objetos a seleccionar entre todas las posibilidades.
	Un objeto existente esta siendo desplazado.
	Un objeto existente esta siendo desplazado.
	Señala el modo de desplazamiento de la hoja. Se puede entrar en ese modo en todo momento manteniendo la tecla `Ctrl` (Windows) o ⌘ (Mac OS) oprimida. En ese modo, deslizar-depositar desplazará la hoja en la ventana.
	Aparece durante el desplazamiento de la hoja.

	Indica que un clic va a crear un nuevo punto libre sobre la hoja.
	Indica que un clic va a crear un nuevo punto, que puede ser libre sobre un objeto existente o en la intersección de dos objetos existentes.
	Indica que un clic va a rellenar el objeto bajo el apuntador con el color actual.
	Indica que un clic va a cambiar el atributo (por ejemplo el color, el estilo, el espesor, …) del objeto bajo el apuntador.

1.4 PRIMERA CONSTRUCCION

Para ilustrar este capítulo de **INICIACIÓN**, construiremos un cuadrado a partir de una de sus diagonales. Al lanzamiento de Cabri II Plus, un nuevo documento vacío es creado, y se puede inmediatamente comenzar una construcción. Vamos en primer lugar a construir el segmento que será una de las diagonales del cuadrado. Active la herramienta [Líneas]Segmento  haciendo clic sobre el icono de la recta y manteniendo el botón del ratón oprimido para desplegar el paquete de herramientas. Desplace en seguida el apuntador sobre la herramienta segmento y suelte el botón del ratón para activarla.

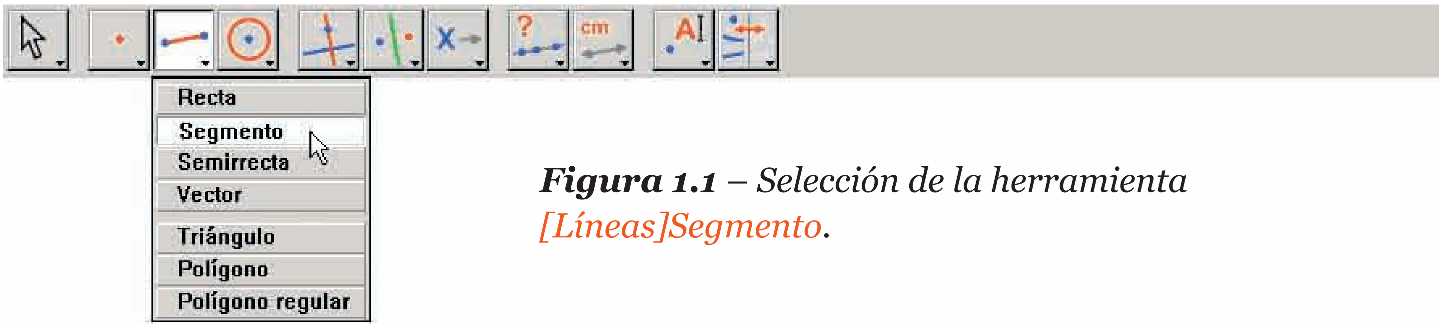


***Figura 1.1** – Selección de la herramienta [Líneas]Segmento.*

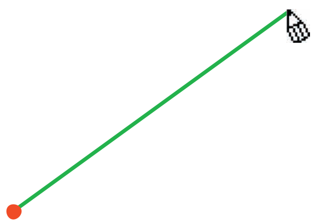
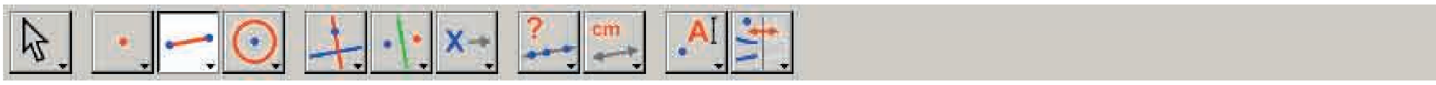


***Figura 1.2** – Construcción del primer punto. Una imagen del segmento final se desplaza con el apuntador hasta que el segundo punto sea construido.*



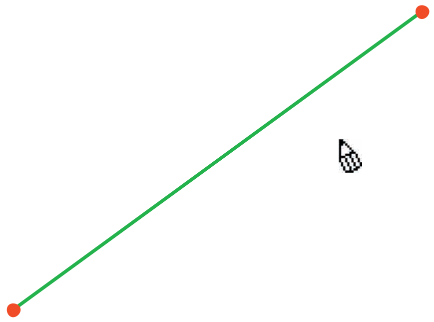
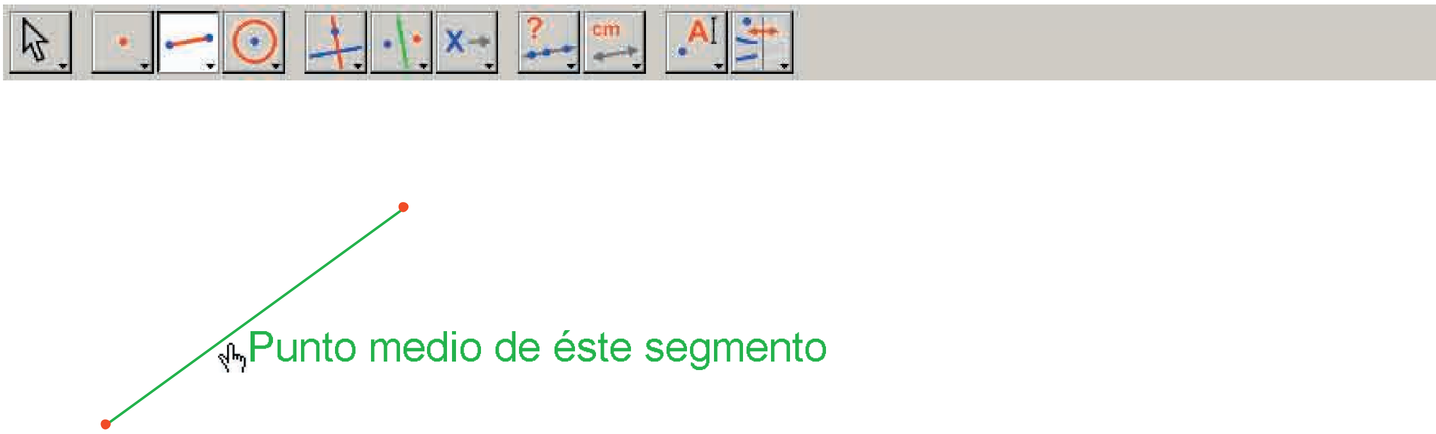


***Figura 1.3** – El segmento es construido después de la creación del segundo punto. La herramienta [Líneas]Segmento queda activa, permitiendo la construcción de otro segmento.*

Desplace ahora el apuntador a la zona de trabajo, donde toma la forma . Un simple clic crea el primer punto. Continúe desplazando el apuntador en la zona de trabajo. Un segmento trazado entre el primer punto y el cursor materializa el segmento que será construido. Se crea el segundo punto haciendo clic. La figura consta ahora de dos puntos y un segmento.

Para construir el cuadrado, podemos utilizar el círculo que tiene a este segmento por diámetro. El centro de ese círculo es el punto medio del segmento. Para construir el punto medio, active la herramienta [Construcciones]Punto Medio , luego desplace el apuntador sobre el segmento. El texto Punto medio de éste segmento es mostrado al lado del apuntador, el cual toma la forma . Haciendo clic, se construye el punto medio del segmento.



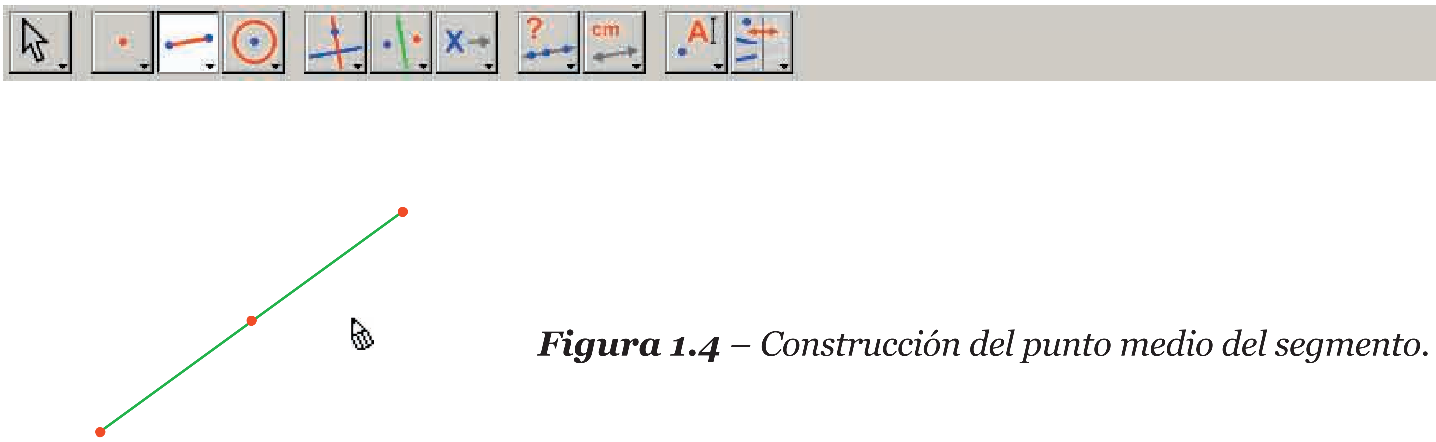
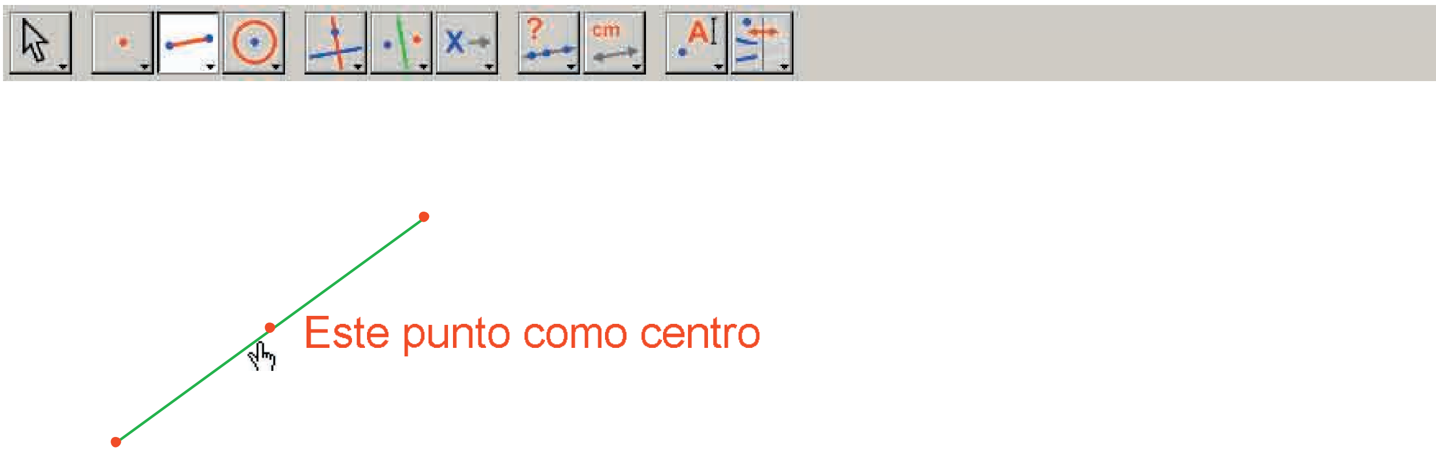
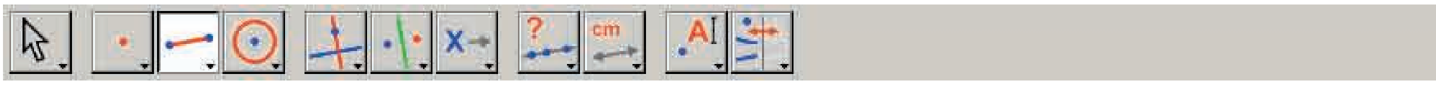


Figura 1.4 *– Construcción del punto medio del segmento.*

Active en seguida la herramienta [Curvas]Círculo , y desplace el apuntador a las proximidades del punto medio construido. El texto Este punto como centro es mostrado, haga clic para seleccionar el punto medio del segmento como centro del círculo. Enseguida, la herramienta círculo espera un punto de la circunferencia. Durante el desplazamiento, un círculo centrado en el punto medio del segmento y que pasa por el apuntador se traza dinámicamente, como anteriormente con el segmento. Cuando el apuntador pasa en las proximidades de un extremo del segmento, el mensaje pasando por este punto es mostrado. Al hacer clic, el círculo que pasa por ese extremo se construye.





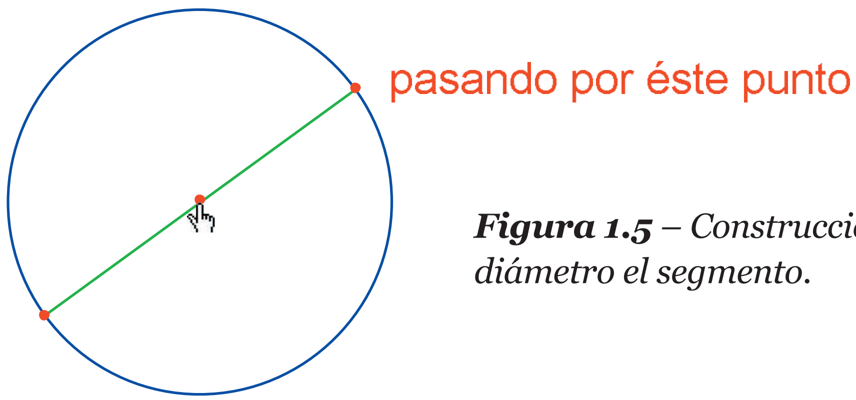
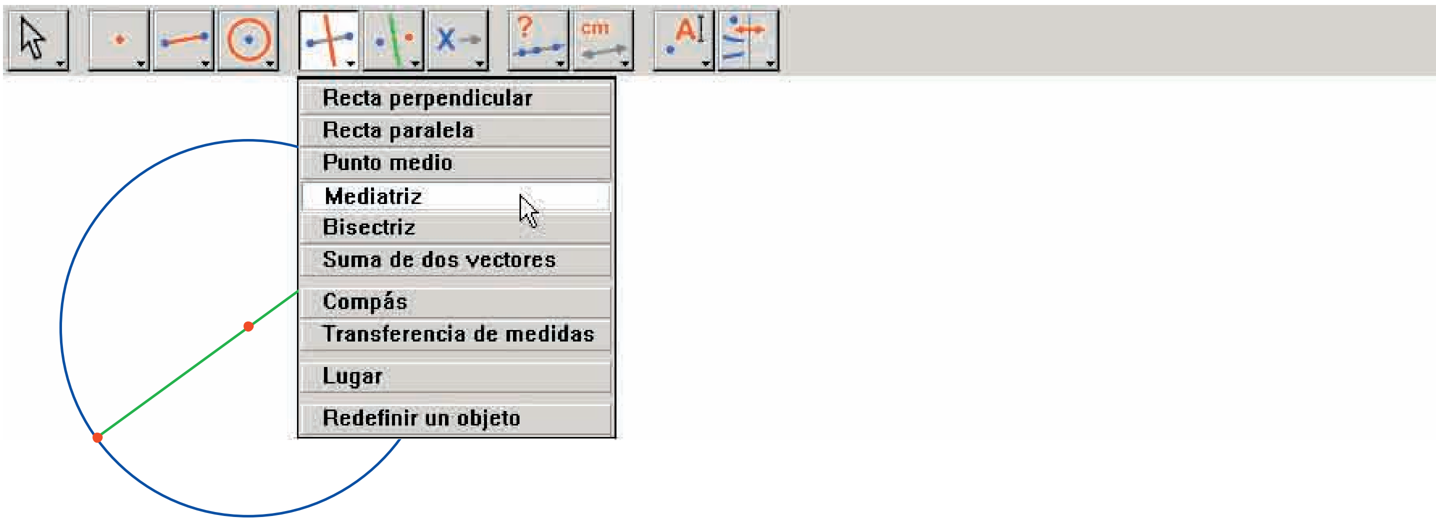
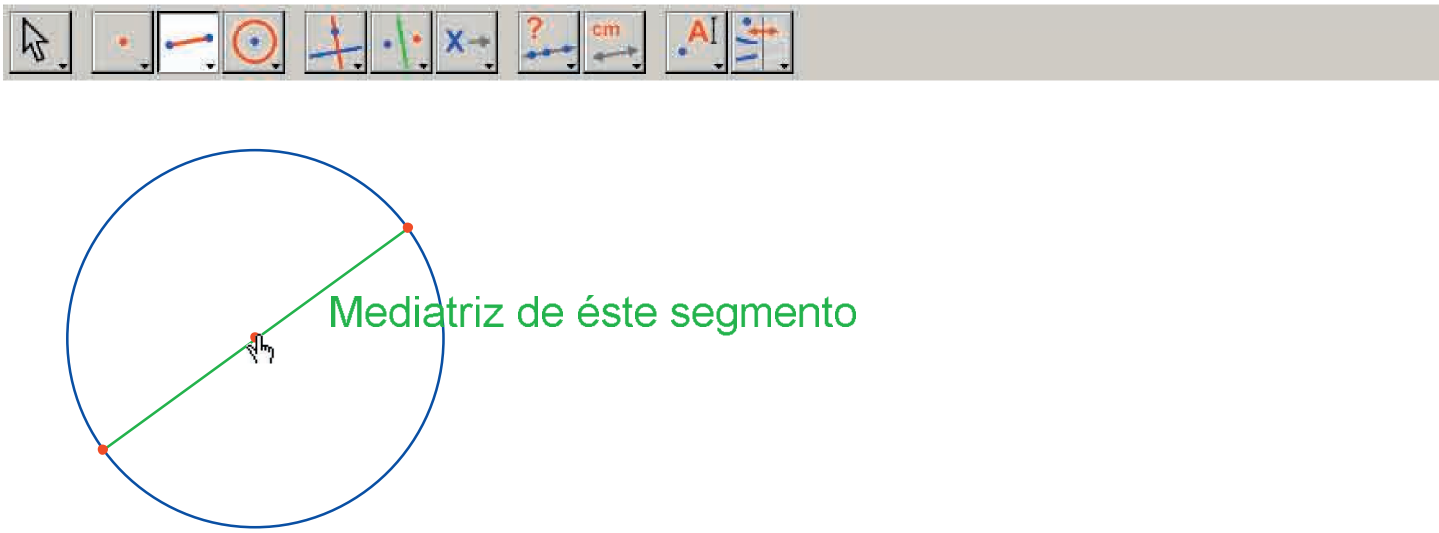


__Figura 1.5__ – Construcción del círculo que tiene por diámetro el segmento.

Puede activar el Apuntador, herramienta [Manipulación]Apuntador, para manipular la figura. Desplazándolo sobre Desplazándolo sobre los extremos del segmento, que son los puntos libres de la figura, el apuntador se convierte en y se muestra el texto Este punto. Se puede desplazar el punto con deslizar-depositar. En ese caso, el conjunto de la construcción es actualizado: el segmento es redibujado, su punto medio es desplazado en consecuencia, y el círculo sigue.

Para construir nuestro cuadrado, nos falta encontrar la otra diagonal, que es el diámetro del círculo perpendicular al segmento inicial. Vamos a construir la mediatriz de este segmento, perpendicular a éste y que pasa por su punto medio. Active la herramienta [Construcciones]Mediatriz, luego seleccione el segmento para construir la mediatriz.





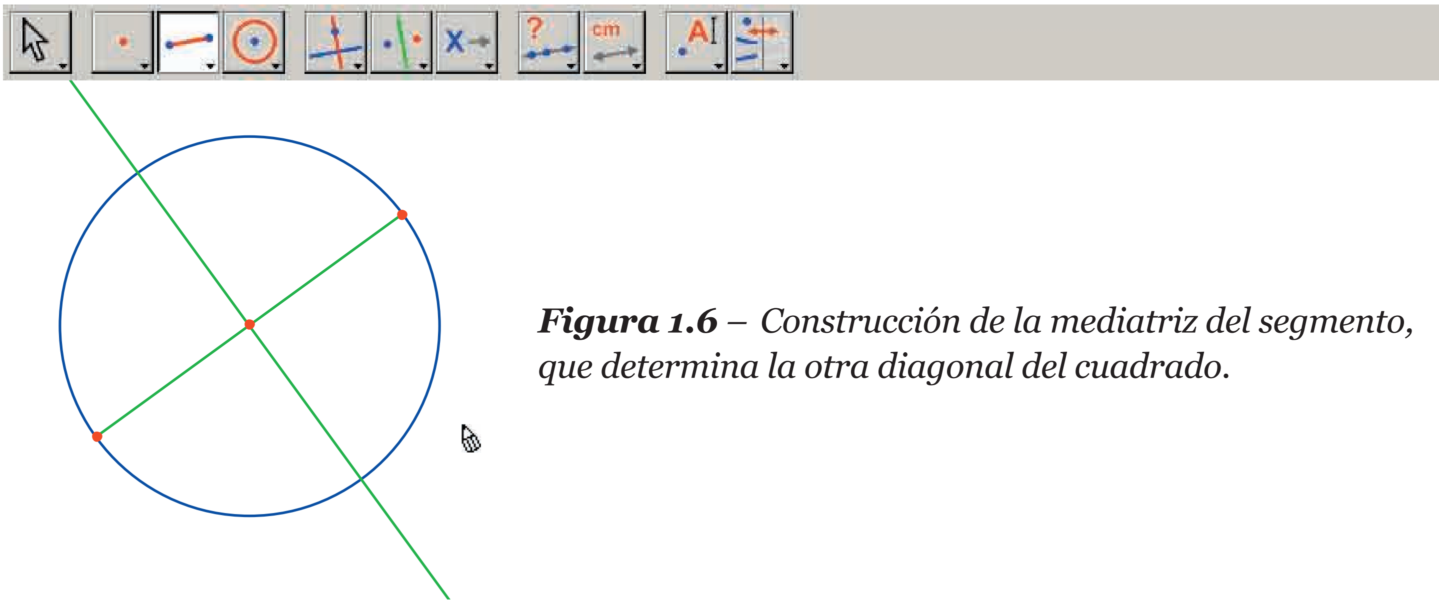
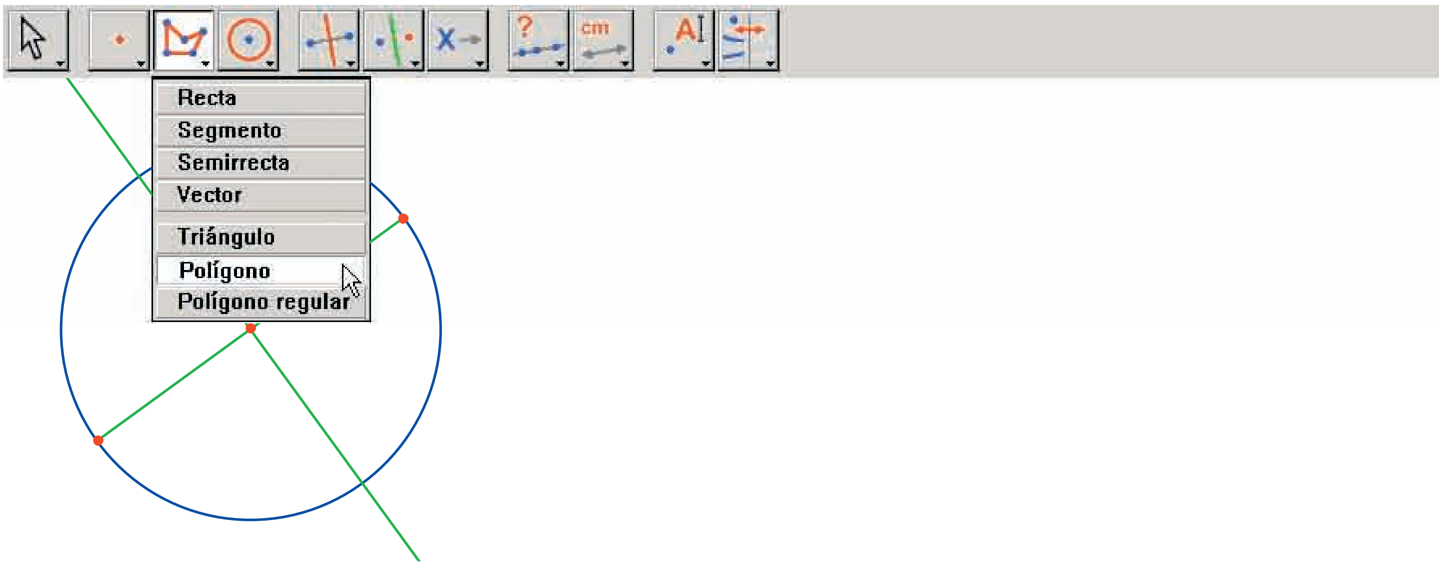
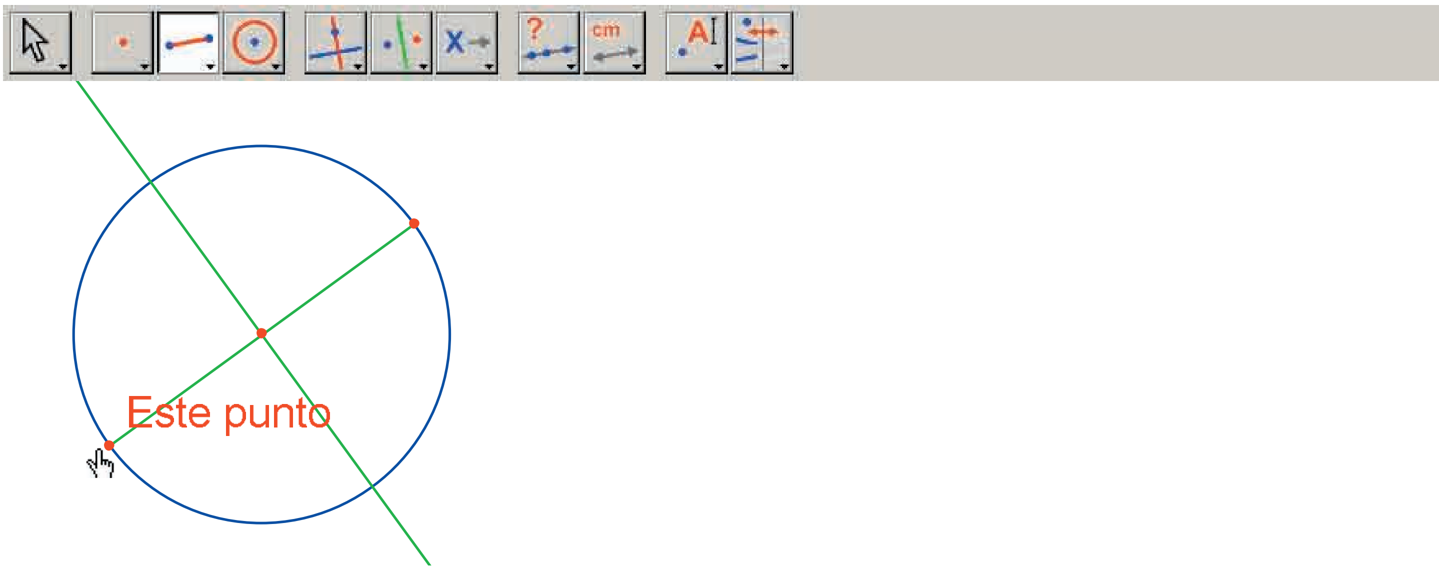


Figura 1.6 – Construcción de la mediatriz del segmento, que determina la otra diagonal del cuadrado.

Para terminar, la construcción del cuadrado, active la herramienta [Líneas]Polígono . Esta herramienta espera la selección de una secuencia de puntos que definen un polígono cualquiera. La captación termina cuando se vuelve a seleccionar el punto inicial, o se hace doble clic al seleccionar el último punto. Los dos puntos, de intersección del círculo y de la mediatriz no están aún explícitamente construidos, pero Cabri II Plus permite construirlos implícitamente en el momento de su utilización.





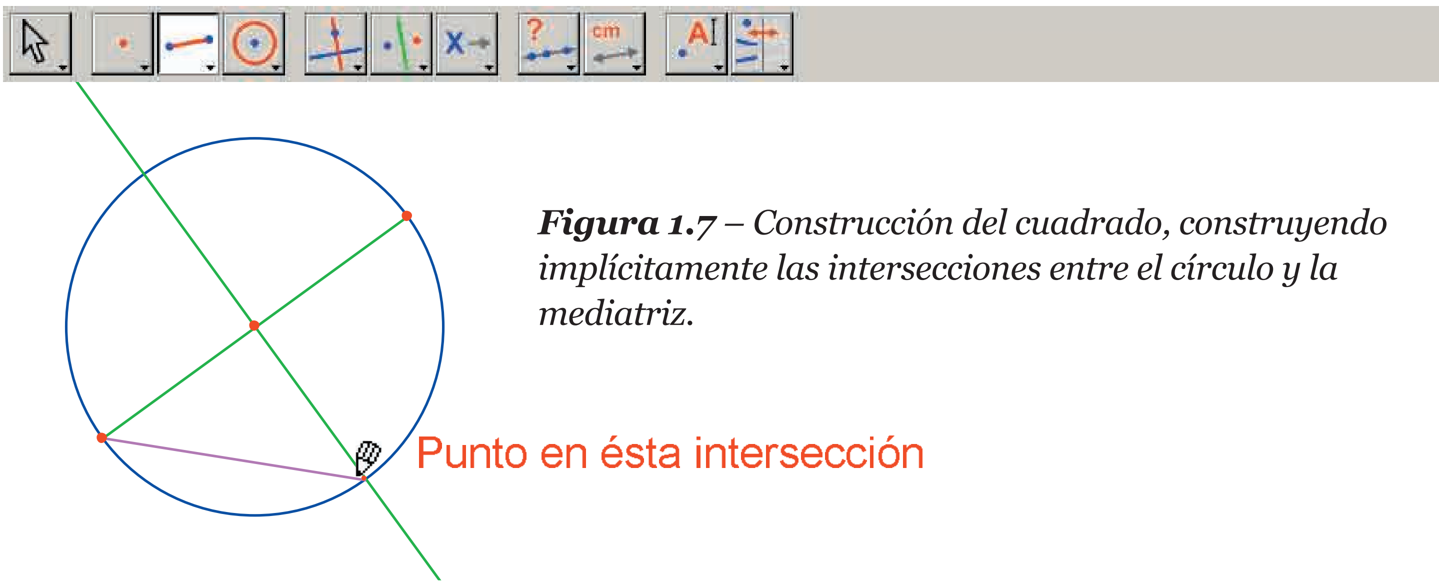


Figura 1.7 – *Construcción del cuadrado, construyendo implícitamente las intersecciones entre el círculo y la mediatriz.*

Seleccione un extremo del segmento (texto Este punto) como primer vértice del polígono, luego desplace el apuntador sobre una de las dos intersecciones entre el círculo y la mediatriz. El texto Punto en esta intersección indica que un clic va a construir el punto de intersección y al mismo tiempo va a seleccionarlo como vértice siguiente del polígono. Seleccione entonces ese punto, luego el otro extremo del segmento, luego el otro punto de intersección, y finalmente seleccione de nuevo el punto inicial para terminar la construcción del cuadrado.

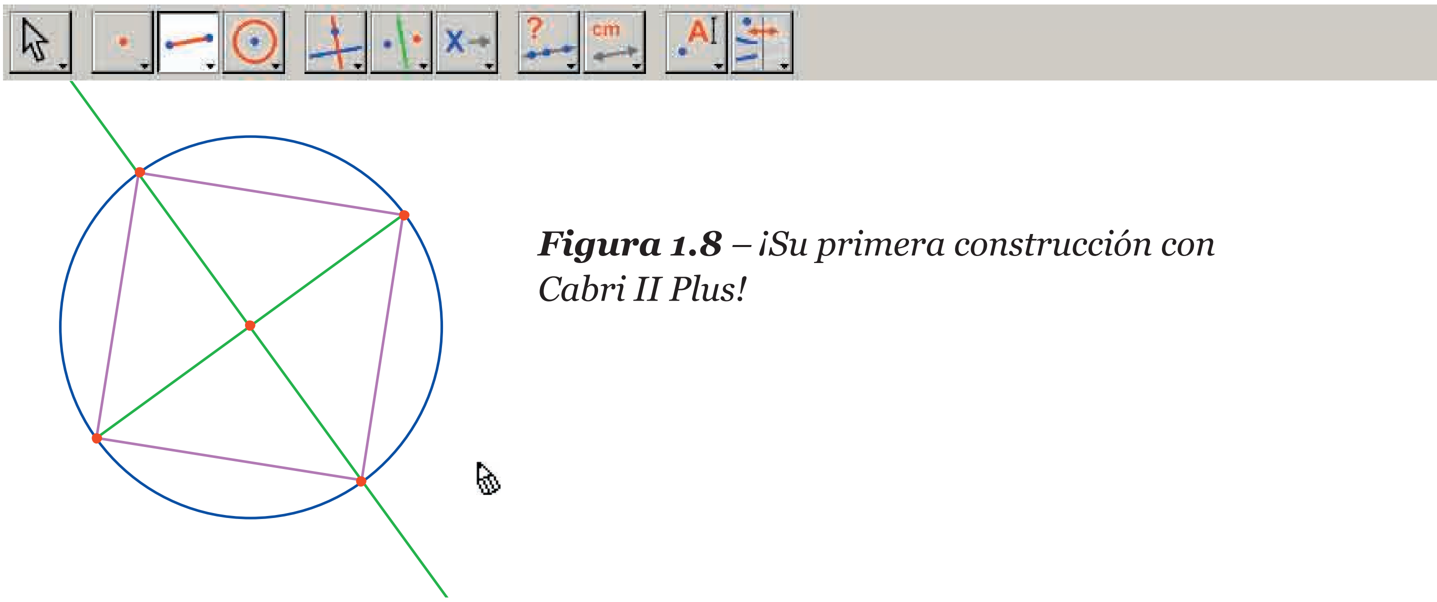


***Figura 1.8** – ¡Su primera construcción con Cabri II Plus!*

RECTA DE EULER DE UN TRIÁNGULO

Construiremos un triángulo cualquiera *ABC*, y a continuación las tres medianas de ese triángulo: las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto. Enseguida construiremos las tres alturas del triángulo: las rectas perpendiculares a un lado y que pasan por el vértice opuesto. Finalmente, construiremos las tres mediatrices de los lados del triángulo: las rectas perpendiculares a un lado y que pasan por su punto medio.

Como se sabe, las tres alturas, las tres medianas y las tres mediatrices son respectivamente concurrentes, y estos puntos de concurrencia están alineados sobre una recta, llamada recta de *Euler*[1] del triángulo.

Para construir un triángulo, elija la herramienta [Líneas]Triángulo. La manipulación de la barra de herramientas se encuentra descrita en la parte **[1] INICIACIÓN** de este documento. Una vez la herramienta Triángulo activada [Líneas]Triángulo, es suficiente crear tres nuevos puntos en la hoja de trabajo, haciendo clic en zonas vacías. Se pueden nombrar los puntos justo después de su creación «sobre la marcha» simplemente introduciendo sus nombres por el teclado. Una vez construido el triángulo, los nombres pueden ser desplazados alrededor de los puntos, por ejemplo para colocarlos en el exterior del triángulo.

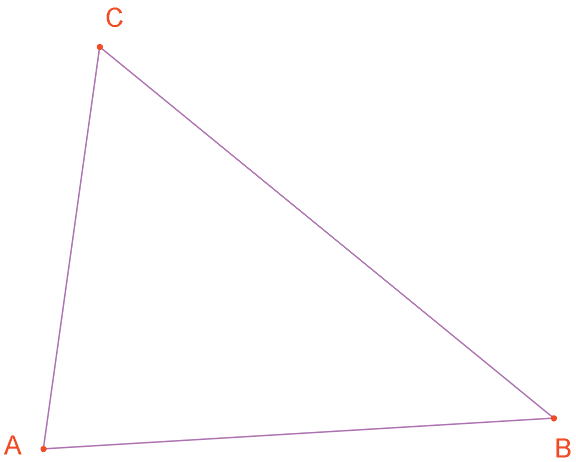


Figura 2.1 *– Triángulo ABC construido con la herramienta [Líneas]Triángulo. Los puntos fueron nombrados sobre la marcha tecleando su nombre al momento de su creación.*

Para desplazar el nombre de un objeto, utilice la herramienta [Manipulación] Apuntador haciendo deslizar el nombre (se hace clic y se desplaza el cursor manteniendo el botón del ratón presionado). Para cambiar el nombre de un objeto, active la herramienta [Texto y Símbolos]Nombrar, luego seleccione el nombre: una ventana de edición aparece para efectuar las modificaciones.

[1]*Léonard Euler, 1707-1783*

Los puntos medios se construyen gracias a la herramienta [Construcciones]Punto Medio. Para construir el punto medio de AB, seleccione sucesivamente A y B. El punto medio de un segmento o de un lado de un polígono puede ser construido haciendo clic directamente sobre el segmento o el lado. El nuevo punto puede ser nombrado «sobre la marcha», llamémosle C'. Se procede de la misma forma para los otros dos lados construyendo el punto medio A' de $[BC]$ y el punto medio B' de $[CA]$.

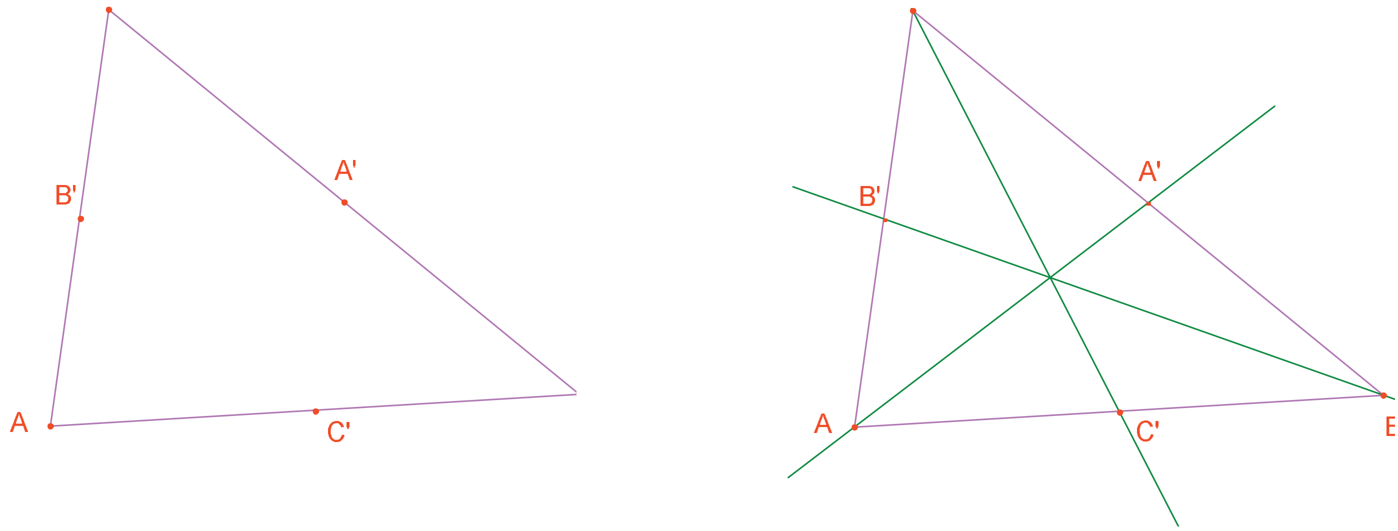


Figura 2.2 *– [A la izquierda]. Los puntos medios están construidos con la herramienta [Construcciones]Punto medio, que acepta los dos vértices, un segmento, o el lado de un polígono.*
[A la derecha]. Las medianas están construidas con la herramienta [Líneas]Recta, y su color se ha cambiado con la herramienta [Atributos]Color.

La herramienta [Manipulación]Apuntador permite desplazar libremente los objetos de la figura, en este caso los tres puntos A, B y C. El conjunto de la construcción se actualiza automáticamente al desplazar uno de estos puntos. Puede así explorar la construcción en numerosas configuraciones. Para identificar los objetos libres de una figura, es suficiente activar la herramienta [Manipulación]Apuntador luego hacer clic sobre un espacio vacío de la hoja manteniendo el botón del ratón oprimido. Los objetos libres se ponen a parpadear.

La herramienta [Líneas]Recta permite construir las tres medianas. Para construir la recta $[AA']$, señale sucesivamente A luego A'.

La herramienta [Atributos]Color... permite cambiar el color de los objetos. Se elige el color en la paleta, luego se seleccionan los objetos a colorear.

Después de haber activado la herramienta [Puntos]Punto , aproxime el apuntador al punto de intersección de las tres medianas. En este punto, Cabri II Plus busca crear el punto de intersección de dos rectas. Como hay ambigüedad (tenemos ahí tres rectas concurrentes), Aparece un menú que permite elegir cuáles dos de las tres rectas utilizar para la construcción del punto. En el momento del desplazamiento del apuntador sobre las opciones del menú, la recta correspondiente aparece punteada parpadeando. Una vez que se han seleccionado dos rectas, el punto de intersección es creado. Llamémosle G sobre la marcha.

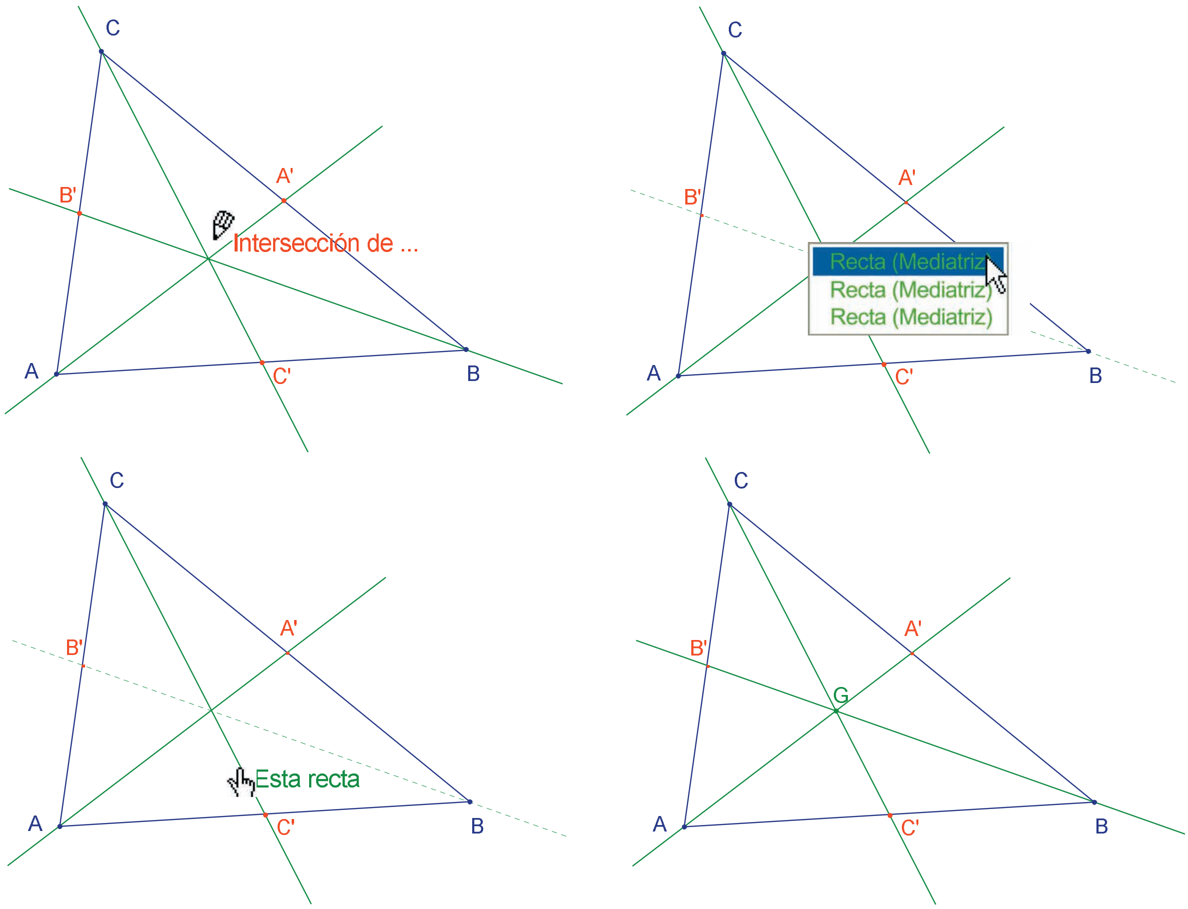


***Figura 2.3** – Construcción del punto de intersección de las medianas y resolución de las ambigüedades de selección.*

Las alturas se construyen con la herramienta [Construcciones]Recta Perpendicular . Esta herramienta crea la única recta perpendicular a una dirección dada, que pasa por un punto determinado. Requiere la selección de un punto y de una recta, o de un segmento, una semirrecta o de un lado de un polígono. El orden de la selección no es importante. Para construir la altura desde *A*, seleccione *A*, y el lado *[BC]*. Lo mismo para las alturas desde *B* y *C*. De la misma forma que para las medianas, elija un color para las alturas, y construya su punto de intersección H.

La herramienta [Construcciones]Mediatriz permite construir la mediatriz de dos puntos, de un segmento o de un lado de un polígono. Es suficiente seleccionar el segmento o sus extremos. Denote *O* al punto de intersección de las tres mediatrices.

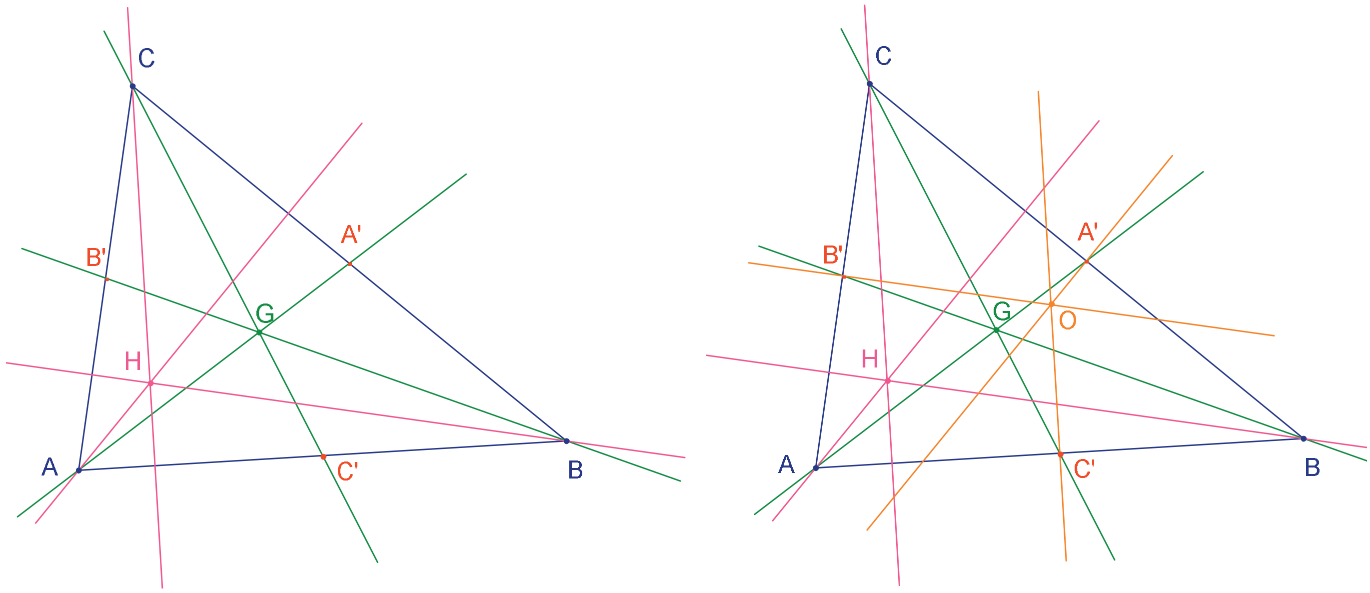


Figura 2.4 *– [A la izquierda]. Las alturas están construidas con la herramienta [Construcciones]Recta Perpendicular.*
[A la derecha]. Las mediatrices están construidas con la herramienta [Construcciones] Mediatriz.

La herramienta [Propiedades]¿Alineados? nos da la posibilidad de verificar si los tres puntos *O*, *H* y *G* están alineados. Seleccione sucesivamente esos puntos, luego designe un lugar sobre la hoja de trabajo para depositar el resultado. El resultado es un texto que indica si los puntos están o no alineados.

Cuando la figura es manipulada, el texto se actualiza al mismo tiempo que los otros elementos de la figura.

Con la herramienta [Líneas]Recta , construyamos la recta de *Euler* del triángulo, seleccionando dos de los tres puntos, por ejemplo *O* y *H*. La herramienta [Atributos]Espesor… la utilizaremos para modificar el aspecto de esta recta,

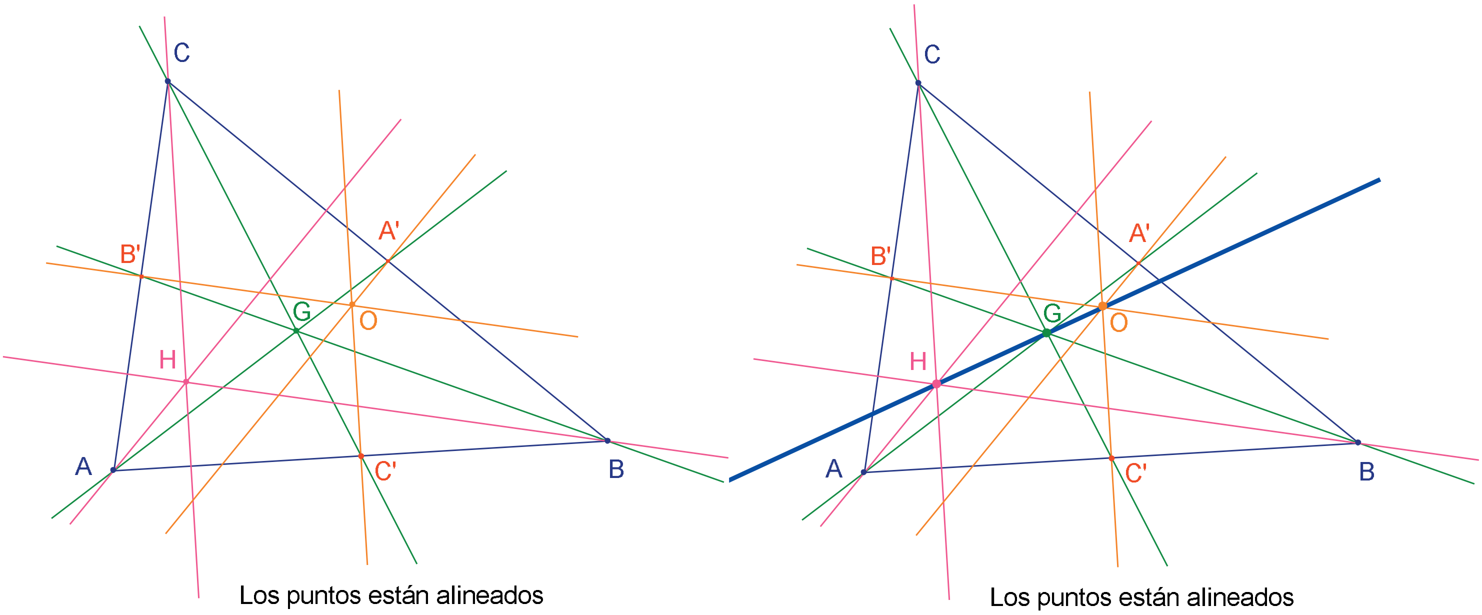


Figura 2.5 *– [A la izquierda]. Verificación del alineamiento de los tres puntos* O, H, *y* G. *La herramienta [Propiedades]¿Alineados? crea un texto Los puntos están alineados* o *Los puntos no están alineados según el estado actual de la figura.*
[A la derecha]. La recta de Euler del triángulo, resaltada por su espesor, ha sido modificada con la herramienta [Atributos]Espesor….

Constatamos manipulando la figura que el punto *G* parece permanecer entre *O* y *H*, e incluso que su posición relativa sobre el segmento *[OH]* no cambia. Verifiquémoslo midiendo las longitudes *GO* y *GH*. Active la herramienta [Medida]Distancia o Longitud . Esta herramienta permite medir la distancia entre dos puntos, o la longitud de un segmento, según los objetos seleccionados. Seleccione entonces *G* luego *O*; la distancia *GO* aparece, medida en cm. Haga lo mismo para *GH*. Una vez efectuada la medida, puede editar el texto correspondiente, por ejemplo añadiéndole los caracteres *GO =* delante del número.

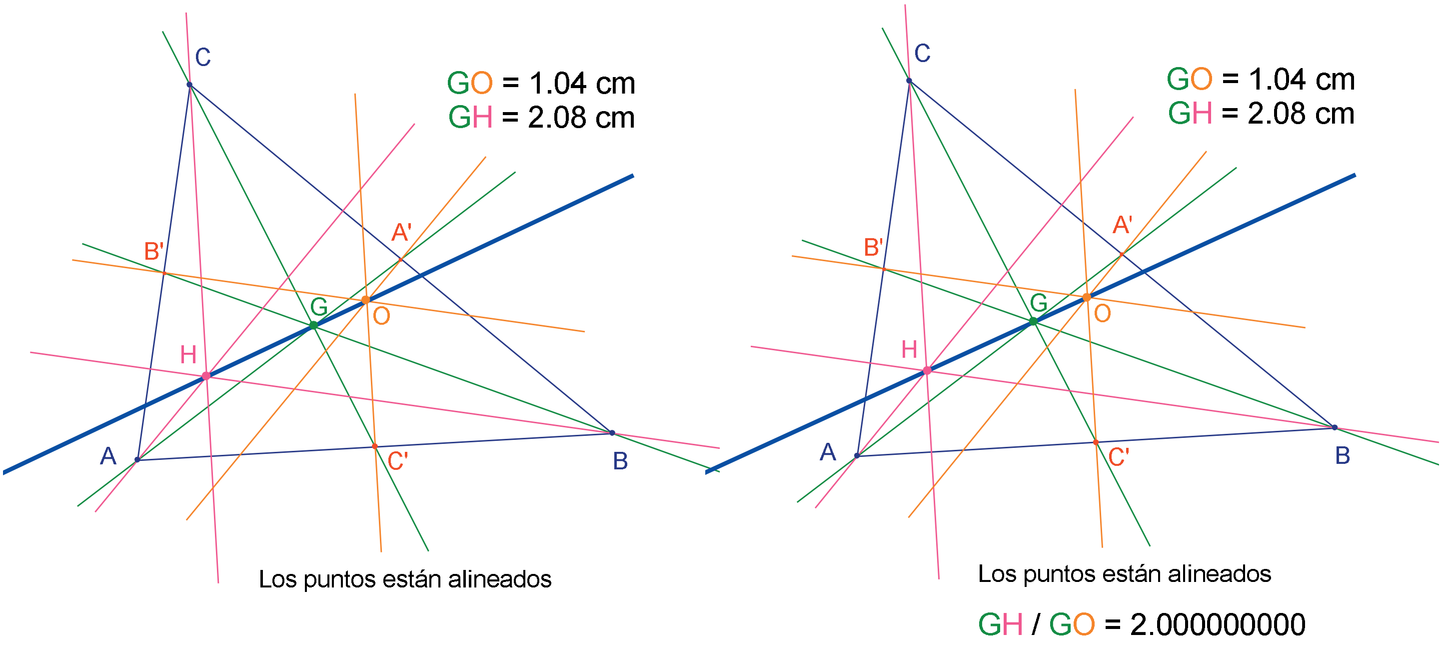


Figura 2.6 *– [A la izquierda]. La herramienta [Medida]Distancia o longitud permite obtener las distancia* GO *y* GH.
[A la derecha]. Con la ayuda de la calculadora – herramienta [Medida]Calculadora... – se calcula la razón GH/GO *y se verifica numéricamente que es igual a 2.*

Desplazando la figura, vea que *GH* parece ser el doble de *GO*. Vamos a calcular la razón *GH/GO* para verificarlo. Active la herramienta [Medida]Calculadora... . Seleccione la distancia *GH*, luego el operador / (la barra de división), y la distancia *GO*. Haga clic sobre el botón = para obtener el resultado, que se puede deslizar-depositar sobre la hoja. Cuando un número está seleccionado (herramienta [Manipulación]Apuntador), se puede aumentar o disminuir el número de decimales mostrados con la ayuda de las teclas + y –. Se puede mostrar así la razón con una decena de cifras después del punto, para constatar que permanece constante e igual a 2.

Ejercicio 1 - Completar la figura construyendo el círculo circunscrito al triángulo (centrado en O y que pasa por *A*, *B*, y *C*). Se utilizará la herramienta [Curvas]Círculo .

Ejercicio 2 - Construir a continuación el «círculo de los nueve puntos» del triángulo. Se trata del círculo centrado en el punto medio de *[OH]*, y que pasa por los puntos medios *A′*, *B′*, y *C′* de los lados, las bases de las alturas, y los puntos medios de los segmentos *HA*, *HB*, y *HC*.

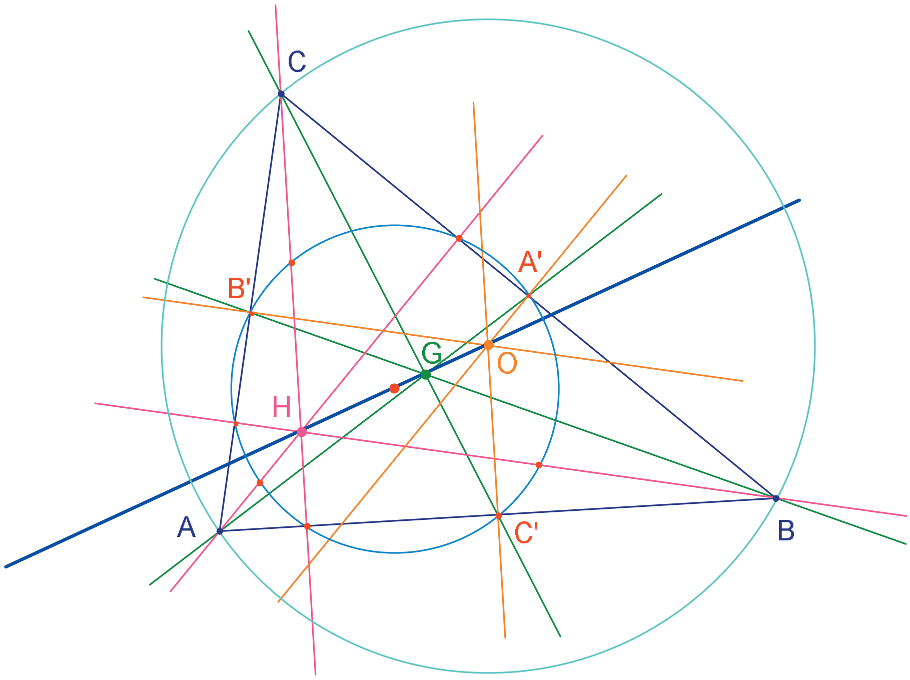


Figura 2.7 *– La figura final, con el círculo circunscrito al triángulo y el «círculo de los nueve punto» del triángulo.*

LA BÚSQUEDA DEL PUNTO MISTERIOSO

En este capítulo, presentamos una actividad que pone de manifiesto las posibilidades de exploración ofrecidas por Cabri II Plus. A partir de tres puntos *A, B, C* dados, vamos a buscar los puntos M que verifican la igualdad vectorial:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

Construya cuatro puntos cualesquiera con la herramienta [Puntos]Punto, nombrándolos *A, B, C, M* «sobre la marcha», es decir tecleando su nombre justo después de su creación. Cabri II Plus permite crear vectores. Cada vector es clásicamente representado por una flecha. Construya ahora un representante del vector $\overrightarrow{MA}$, con la herramienta [Líneas]Vector, seleccionando en primer lugar *M* luego A. Este representante tiene su origen en *M*. Se hace lo mismo para $\overrightarrow{MB}$ y $\overrightarrow{MC}$.

Construya luego un representante de la suma activando la herramienta [Construcciones]Suma de dos vectores, seleccionando los dos vectores y luego el origen del representante de la suma; que en este caso elegiremos *M*. Llame *N* al extremo de este representante.

Por último construya de la misma manera, un representante de la suma de los tres vectores con *M* como origen, sumando $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Llame *P* al extremo de este representante..

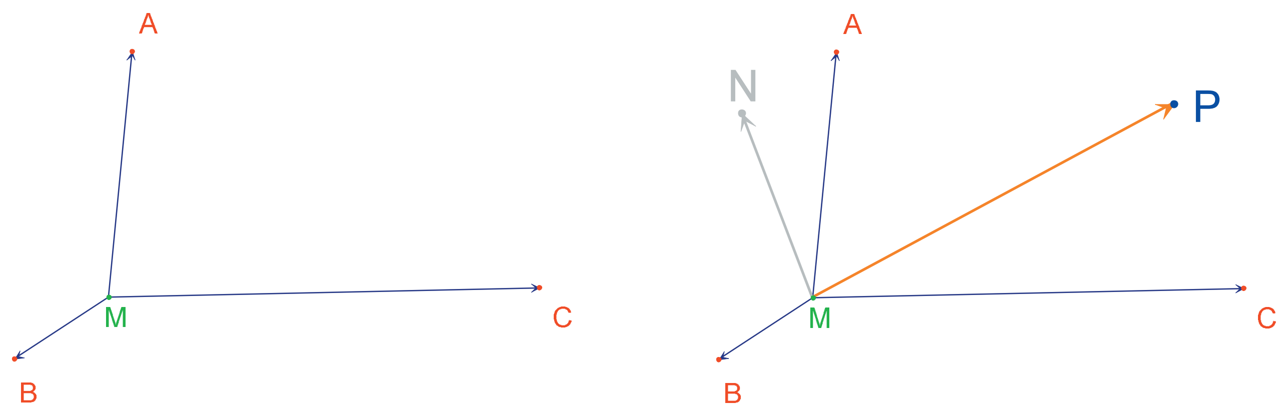


Figura 3.1 *– [A la izquierda]. A partir de tres puntos cualesquiera* A, B, C, *y de un punto* M, *construimos representantes de los vectores* $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ *y* $\overrightarrow{MC}$.
[A la derecha]. Con la ayuda de la herramienta [Construcciones]Suma de dos vectores, construimos $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, *y* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Se pueden ahora buscar las soluciones del problema por manipulación. Para hacer esto, active la herramienta [Manipulación]Apuntador y desplace el punto *M*. La suma de los tres vectores se actualiza a cada instante durante el desplazamiento.

En función de la posición de *M* con respecto a los puntos *A, B,* y *C*, se observa la norma y la orientación del vector $\overrightarrow{MP}$. Se puede luego hacer las conjeturas siguientes (entre otras):

• Una única posición de *M* permite anular la suma de los tres vectores: el problema tiene una solución única. Esta solución está en el interior del triángulo *ABC*.

• El cuadrilátero *MANB* es un paralelogramo.

• El cuadrilátero *MCPN* es un paralelogramo.

• Para que la suma sea nula, los vectores *MN* y *MC* deben ser colineales, de las mismas normas y de sentidos contrarios, es decir, opuestos.

• Pasa siempre por un mismo punto, y ese punto es la solución del problema.

• El extremo *P* del representante de la suma es un punto dependiente de *M*. Se define pues así una transformación, que asocia *P* a *M*. La solución del problema es un punto invariante de esta transformación.

Siguiendo las constataciones hechas, la búsqueda se orientará en una o en otra dirección.

Supongamos por ejemplo haber observado que los vectores *MN* y *MC* deben ser opuestos. Se tiene entonces otro problema: ¿para qué posiciones de *M* esos dos vectores son colineales?

Desplace *M* de tal manera que los dos vectores sean colineales. Se observa que *M* recorre una recta, y que esta recta pasa por *C* e igualmente por el punto medio de *AB*. Esta recta es entonces la mediana en *C* del triángulo *A, B* y *C* jugando roles simétricos, el punto está también sobre las otras dos medianas y entonces finalmente en la intersección de las tres medianas.

Para una actividad en clase, faltaría aún proponer a los alumnos y alumnas una construcción del punto solución, y demostrar esta conjetura elaborada por exploración.

El poder de convicción de una construcción dinámica es mucho más efectivo que el de una figura estática realizada sobre una hoja de papel. En efecto, es suficiente manipularla para verificar la conjetura en un gran número de casos. Una conjetura que permanece válida después de la manipulación será correcta en la gran mayoría de los casos.

Para una mejor utilización en clase, será interesante abordar los siguientes puntos (entre otros) con los alumnos y alumnas:

- ¿Una construcción dinámica visualmente correcta, es correcta?
- ¿Una construcción dinámica correcta constituye una respuesta al problema?
- ¿En qué momento un razonamiento puede ser calificado de demostración?
- ¿Qué le falta a una construcción dinámica correcta para ser una demostración?
- ¿La demostración debe estar basada sobre el proceso de elaboración de la figura?

Ejercicio 3 - Extender el problema a cuatro puntos, buscando los puntos M tales que:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 0$$

Ejercicio 4 - Enumerar el conjunto de los «caminos de exploración» y de las demostraciones para el problema inicial (tres puntos) accesibles para un alumno de segundo de preparatoria.

Ejercicio 5 - Estudiar y construir el punto *M* que minimiza la suma (*MA*+*MB*+*MC*) de las distancias a los tres puntos *A, B, C* dados: Se trata del punto de *Fermat*[1] del triángulo *ABC*.

[1] *Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

EL CUADRILÁTERO DE VARIGNON

En este capítulo, presentamos algunas construcciones alrededor del teorema de *Varignon*[1].

Construya un cuadrilátero cualquiera *ABCD*. Active la herramienta [Líneas]Polígono, luego seleccione cuatro puntos, nómbrados *A, B, C,* y *D* «sobre la marcha». Para terminar el polígono, vuelva a seleccionar *A* después de haber construido *D*.

Construya a continuación los puntos medios *P* de *[AB]*, *Q* de *[BC]*, *R* de *[CD]*, y *S* de *[DA]* con la herramienta [Construcciones]Punto Medio. Esta herramienta espera la selección de *A* luego de *B* para construir el punto medio de *[AB]*. Se puede igualmente seleccionar directamente el segmento *[AB]* si éste existe ya, sea como segmento o como lado de un polígono como es este caso.

Construya finalmente el cuadrilátero *PQRS* con la herramienta [Líneas]Polígono.

Manipulando la construcción, con la herramienta [Manipulación]Apuntador, observe que *PQRS* parece ser siempre un paralelogramo. Vamos a preguntar a Cabri II Plus sobre el paralelismo de *[PQ]* y *[RS]* así, como de *[PS]* y *[QR]*, utilizando la herramienta [Propiedades]¿Paralelo(a)?. Seleccione los lados *[PQ]* luego *[RS]*, se despliega un texto, confirmando que los dos lados son paralelos. Verifique de la misma forma que *[PS]* y *[QR]* son paralelos.

[1] *Pierre Varignon, 1654-1722*

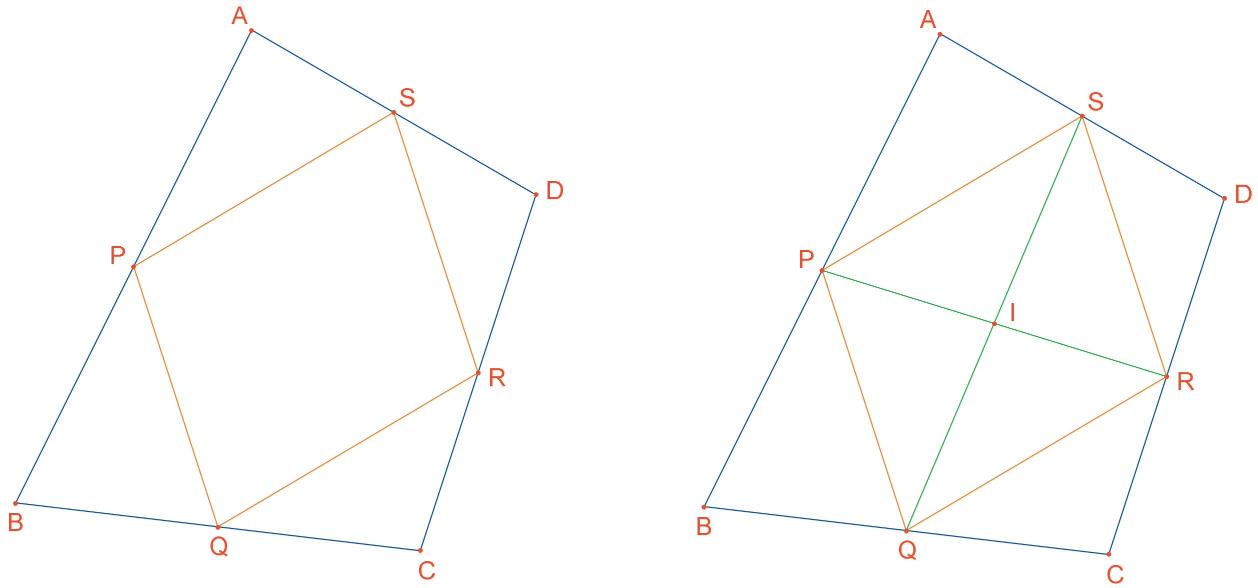


***Figura 4.1** – [A la izquierda]. A partir de un cuadrilátero cualquiera* ABCD*, se ha construido el cuadrilátero* PQRS *cuyos vértices son los puntos medios de los lados de* ABCD.
[A la derecha]. Construcción de las diagonales de PQRS*, las cuales se muestra que se cortan en su punto medio.*

Construya luego las dos diagonales *[PR]* y *[QS]* con la ayuda de la herramienta [Líneas]Segmento, y su punto de intersección *I* con la herramienta [Puntos]Punto. Existen varias formas de demostrar que I es el punto medio de *[PR]* e igualmente de *[QS]*, y por consiguiente que *PQRS* es un paralelogramo. Por ejemplo con un cálculo baricéntrico: *P* es el baricentro de {(*A*,1),(*B*,1)} y *R* de {(*C*,1),(*D*,1)}, y entonces el punto medio de *PR* es el baricentro de {(*A*,1),(*B*,1),(*C*, 1),(*D*,1)}, sucede lo mismo para el punto medio de *[QS]*. Por consiguiente los dos puntos medios están confundidos en un punto: el punto de intersección *I*.

El ***teorema de Varignon*** es el siguiente: el cuadrilátero *PQRS* construido a partir de los puntos medios de un cuadrilátero *ABCD* cualquiera es un paralelogramo, y su área es la mitad de la de *ABCD*.

Ejercicio 6 - Se ha establecido como se mencionó anteriormente la primera parte del teorema. Para demostrar la segunda parte relativa al área de *PQRS*, podremos ayudarnos de la ***figura 4.2***.

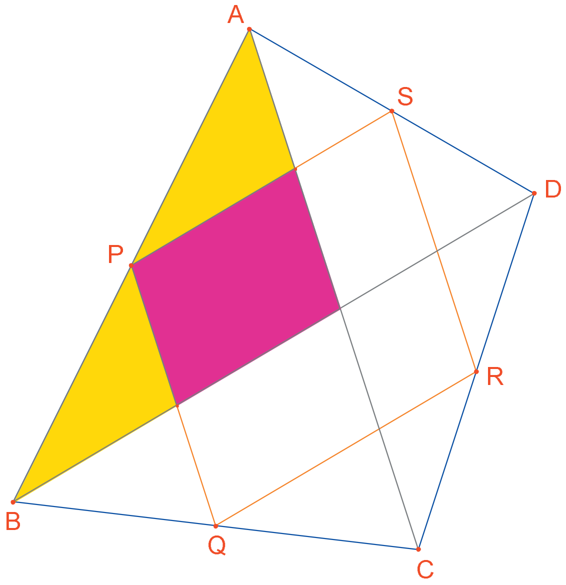


***Figura 4.2** – Construcción que permite establecer la segunda parte del teorema.*

Deje ahora *A, B* y *C* fijos, y desplace *D* de manera que *PQRS* sea rectángulo. Como sabemos que es un paralelogramo, es suficiente que uno de sus ángulos sea recto para poder afirmar que es un rectángulo. Mida el ángulo de vértice *P*, en este caso seleccione los puntos *S, P* (el vértice del ángulo) y *Q*.

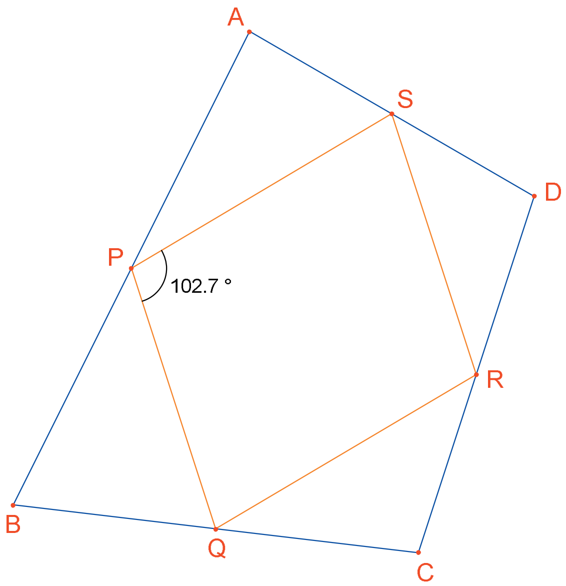


***Figura 4.3** – Se mide el ángulo en* P *del paralelogramo* PQRS.

La herramienta [Medida]Medida de Ángulo puede igualmente proporcionar la medida de un ángulo previamente marcado con la herramienta [Texto y símbolos]Marcar un Ángulo . Esta herramienta espera tres puntos que definen el ángulo, en el mismo orden que para la herramienta [Medida]Medida de Ángulo .

Desplazando *D* de manera que *PQRS* sea un rectángulo, las soluciones encontradas parecen claramente alineadas. De hecho, si se construyen las diagonales *[AC]* y *[BD]* del cuadrilátero inicial, se ve que los lados de *PQRS* son paralelos a esas diagonales, y luego que *PQRS* no es un rectángulo sino solamente cuando *[AC]* y *[BD]* son perpendiculares.

Vamos ahora a redefinir *D* para que *PQRS* sea siempre un rectángulo. Trace la recta *(AC)* con la herramienta [Líneas]Recta seleccionando *A* y *C*, luego la perpendicular a esta recta que pasa por *B*, con la herramienta [Construcciones]Recta Perpendicular, seleccionando *B* y la recta *(AC)*.

D es actualmente un punto libre en el plano. Vamos a modificar su definición, y hacerlo un punto libre sobre la perpendicular a *[AC]* que pasa por *B*. Active la herramienta [Construcciones]Redefinir un Objeto, luego seleccione *D*. Aparece un menú que indica las diferentes opciones de redefinición para *D*. Escoja Punto sobre un objeto, luego seleccione un punto sobre la perpendicular. *D* se desplaza entonces a ese punto, y está desde ahora obligado a permanecer sobre la recta. La redefinición es un medio de exploración muy potente, que permite quitar o añadir grados de libertad a los elementos de una figura sin tener que volver a crearla completamente.

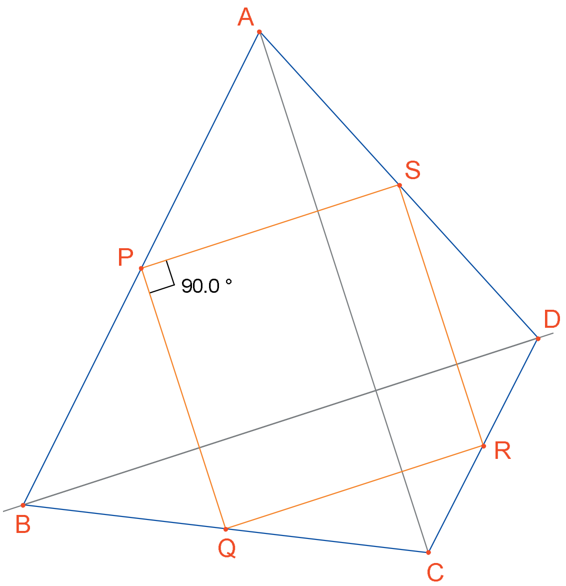


Figura 4.4 *– El punto D está redefinido de manera que PQRS sea siempre un rectángulo. Este punto conserva aún un grado de libertad; es móvil sobre una recta.*

Ejercicio 7 - Encontrar una condición necesaria y suficiente para que *PQRS* sea un cuadrado. Redefinir una nueva vez *D* para que la construcción produzca solamente cuadrados.

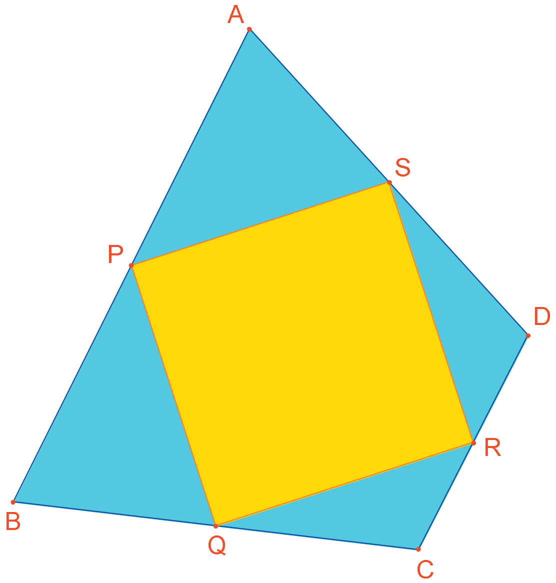


Figura 4.5 *– El punto* D *no tiene ningún grado de libertad, y* PQRS *es siempre un cuadrado.*