

# CABRI<sup>®</sup> II Plus



Creador de Herramientas Matemáticas

**PROFUNDIZACION**

# BIENVENIDO!

Bienvenido a la parte **Profundización** del manual del usuario de Cabri II Plus.

Esta sección, dividida en tres capítulos, presenta problemas matemáticos de nivel superior que se convierten, gracias a la utilización de Cabri II Plus, en actividades lúdicas a explorar y simples a resolver. Estos problemas complementan el **Tutoriel** para los usuarios deseosos de continuar la exploración del software.

Los ejercicios están concebidos para los niveles medio superior y universitario. Son independientes los unos de los otros, invitamos al lector a inspirarse en los métodos de construcción y a hacer los ejercicios correspondientes. Los que están marcados con un asterisco tienen un mayor grado de dificultad.

# CONTENIDO

## PROFUNDIZACION

CAPÍTULO

1

TRIÁNGULOS PODARES

P 4

CAPÍTULO

2

FUNCIONES

P 9

CAPÍTULO






3




MOSAICOS

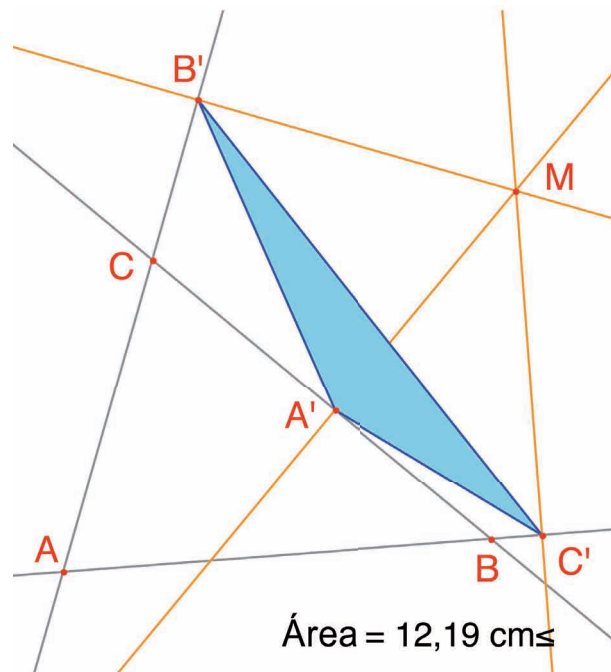
P 14




## TRIÁNGULOS PODARES


Sean tres puntos cualesquiera  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , contruidos con la herramienta [Puntos]Punto . Construya en primer lugar las tres rectas  $AB$ ,  $BC$ , y  $CA$ , con la herramienta [Líneas]Recta . Sea ahora  $M$  un punto cualquiera del plano, y  $C'$ ,  $A'$ , y  $B'$  las proyecciones ortogonales respectivas de  $M$  sobre esas tres rectas. Estos puntos se obtienen construyendo las rectas perpendiculares a  $AB$ ,  $BC$ , y  $CA$  que pasan por  $M$ , con la ayuda de la herramienta [Construcciones]Recta Perpendicular , y por la obtención de los puntos de intersección de cada una de estas rectas con la perpendicular correspondiente, utilizando la herramienta [Puntos]Punto . La herramienta [Puntos]Punto  permite construir implícitamente las intersecciones entre objetos. Es suficiente desplazar el cursor cerca de una intersección, y el programa muestra el mensaje [Punto en esta intersección](#), o [Intersección de...](#) y luego un menú en caso de ambigüedad.


Los tres puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  definen un triángulo que trazaremos utilizando la herramienta [Líneas]Triángulo . Es un triángulo podar relativo a  $ABC$ . Se puede colorear el interior del triángulo con la herramienta [Atributos]Rellenar... . Estamos interesados en el área de ese triángulo en función de la posición del punto  $M$ . El área del triángulo se obtiene con la herramienta [Medida]Área . Esta herramienta produce un área «geométrica» siempre positiva, que no tiene en cuenta la orientación del triángulo. Se obtiene una medida en  $\text{cm}^2$  que se puede colocar libremente en la hoja de trabajo. El menú contextual mostrado haciendo clic con el botón derecho en el número, permite desplegar el área «algebraica», cuyo signo depende de la orientación del triángulo.

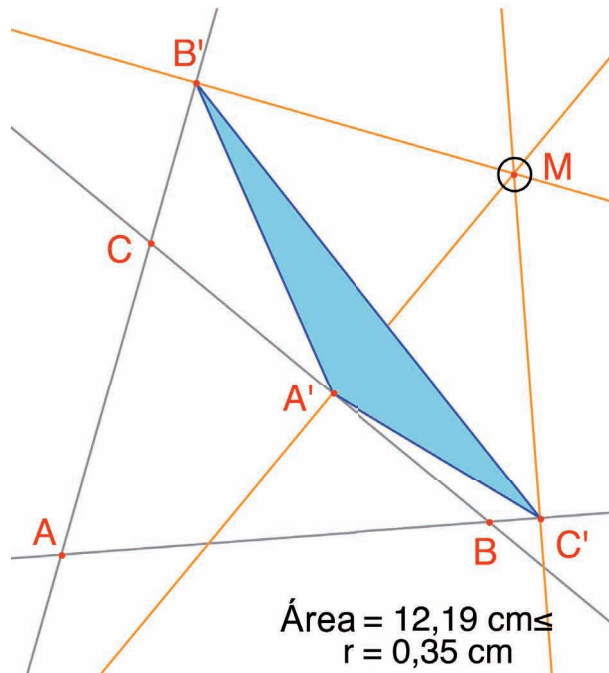


**Figura 1.1** - El triángulo podar correspondiente a  $M$ , y su área.



Vamos a estudiar la variación del área de  $A'B'C'$  en función de la posición de  $M$ . Para hacer esto, existen varias estrategias. Se puede por ejemplo activar la traza del punto  $M$  (herramienta [Texto y Símbolos]Trazar ) , luego desplazarlo intentando conservar el área  $A'B'C'$  constante. Las posiciones sucesivas de  $M$  permanecerán desplegadas, y se tendrá así el aspecto general de una curva de nivel de la función que remite al área de  $A'B'C'$ . Otra estrategia consiste en utilizar los lugares de puntos sobre una rejilla para dibujar una representación visual del área de  $A'B'C'$  en un gran número de posiciones de  $M$ .

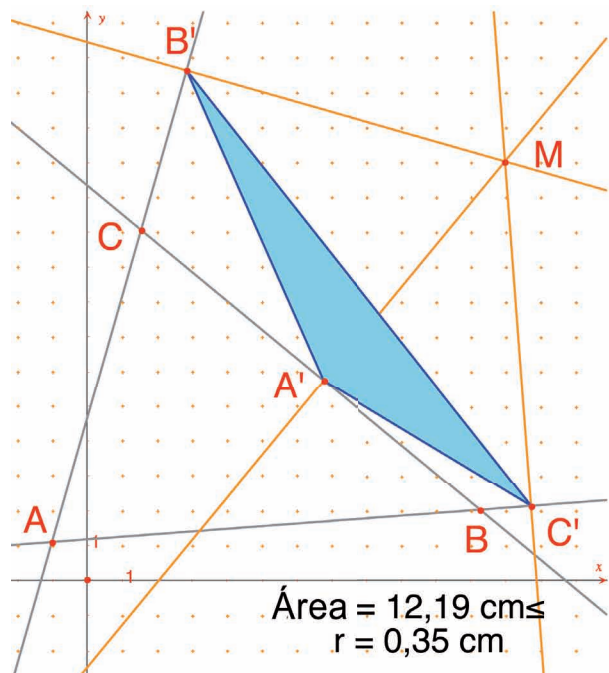
Adoptaremos esta estrategia por lo que trazaremos el círculo centrado en  $M$  y que tiene una área proporcional a la de  $A'B'C'$ . Para hacer esto, es necesario en primer lugar calcular el radio del círculo, proporcional a la raíz cuadrada del área del triángulo. Active la herramienta [Medida]Calculadora...  e introduzca la expresión `sqrt(` luego seleccione el número que representa el área del triángulo para incluirla en la expresión, la cual llega a ser `sqrt(a`. Cierre a continuación los paréntesis, y divida por 10 para evitar tener círculos demasiado grandes. La expresión en la calculadora es ahora `sqrt(a)/10`. Esta se evalúa haciendo clic en el botón `=`, luego efectúe un deslizar-depositar del resultado para colocarlo en la hoja de trabajo.

Para trazar un círculo centrado en  $M$  que tenga el radio calculado anteriormente, active la herramienta [Construcciones]Compás . Seleccione el número que acaba de colocar en la hoja, luego el punto  $M$ . Se obtiene así el círculo centrado en  $M$  con el radio buscado. Se puede ya observar visualmente la evolución del área del triángulo en función de la posición de  $M$ .





**Figura 1.2** - Se ha dibujado un círculo centrado en M de área proporcional a la de A'B'C'.

Vamos ahora a definir una rejilla, luego redefinir M como punto en esta rejilla, y finalmente a trazar todos los círculos que representan el área del triángulo podar cuando M recorre todos los puntos de la rejilla. Para definir una rejilla, es necesario un sistema de ejes. Tome los ejes por defecto presentes en toda figura. Estos se hacen visibles eligiendo la opción [Atributos]Mostrar los Ejes . En seguida, active la herramienta [Atributos]Rejilla , y seleccione los ejes. Aparece una rejilla de puntos.

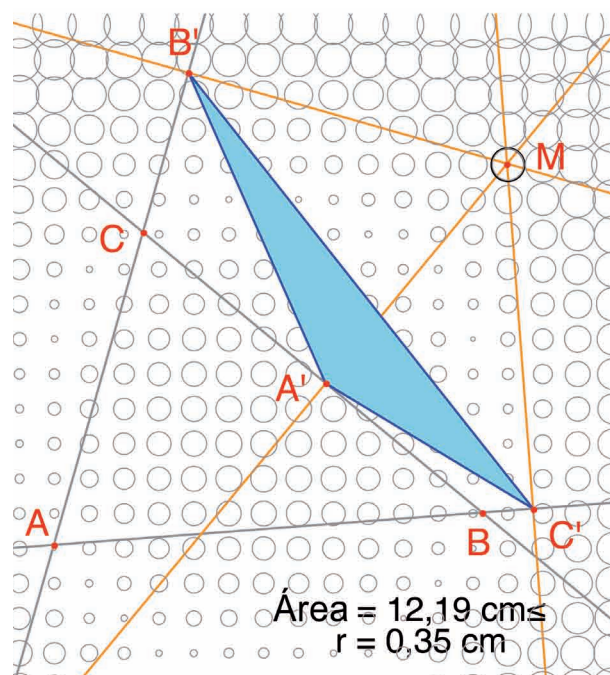


**Figura 1.3** - Construcción de una rejilla a partir de los ejes por defecto de la figura, y redefinición de M como punto libre de la rejilla.

El punto  $M$  es un punto libre en el plano; vamos a redefinirlo para obligarlo a permanecer en la rejilla. Active la herramienta [Construcciones]Redefinir un Objeto , luego seleccione  $M$ , elija la opción Punto sobre un objeto en el menú que aparece, luego seleccione un punto de la rejilla. El punto  $M$  está ahora restringido a desplazarse solamente en la rejilla.

La herramienta [Construcciones]Lugar  permite construir el conjunto de círculos obtenidos al desplazar  $M$  en toda la rejilla. Seleccione el círculo luego el punto  $M$ , para obtener el lugar de los círculos cuando  $M$  recorre la rejilla.

Se demuestra (ver por ejemplo la *Geometría de Marcel Berger*, ediciones CEDIC, ítem 10.4.5) que las curvas de nivel del área del triángulo podar son círculos cuyo centro es el mismo que el del círculo circunscrito en  $ABC$ . En particular, el área del triángulo  $A'B'C'$  es nulo si  $M$  está sobre el círculo circunscrito en  $ABC$ , o aún, de forma equivalente, los puntos  $A'$ ,  $B'$ , y  $C'$  están alineados si y solamente si  $M$  está sobre el círculo circunscrito en  $ABC$ .





**Figura 1.4** - Repartición del área del triángulo podar en función de la posición de  $M$ .

**Ejercicio 1** - Para  $M$  sobre el círculo circunscrito al triángulo  $ABC$ , los tres puntos  $A'$ ,  $B'$ , y  $C'$  están pues alineados, y la recta que pasa por  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  se llama recta de *Simson*<sup>1</sup> o recta de *Wallace*<sup>2</sup> asociado al punto  $M$ .

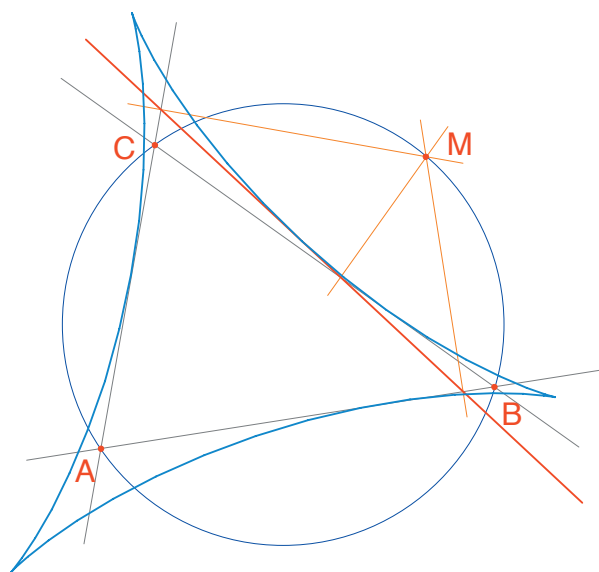
<sup>1</sup> Robert Simson, 1687-1768

<sup>2</sup> William Wallace, 1768-1843

<sup>3</sup> Jakob Steiner, 1796-1863

Este resultado fue durante mucho tiempo atribuido equivocadamente a *Simson*, pero había sido de hecho publicado por *Wallace* en 1799. Construya la envolvente de las rectas de *Simson* (utilizar la herramienta [Construcciones]Lugar ). Por defecto, esta herramienta produce, en el caso de las rectas, no el conjunto de las rectas, sino su envolvente. Esta curva, invariante por una rotación de ángulo  $120^\circ$ , se llama deltoide, ya que tiene la forma de la letra  $\Delta$ : es la deltoide de *Steiner*<sup>3</sup>. Es tangente a las tres rectas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ . Esta es una curva algebraica de grado 4. Puede comprobar esto solicitando su ecuación con la herramienta [Medidas]Coordenadas o Ecuación .

**Ejercicio 2** - Para la deltoide del ejercicio precedente, construir su centro, los tres puntos de tangencia con las tres rectas, los tres vértices de la curva, así como el círculo más grande inscrito en la curva.








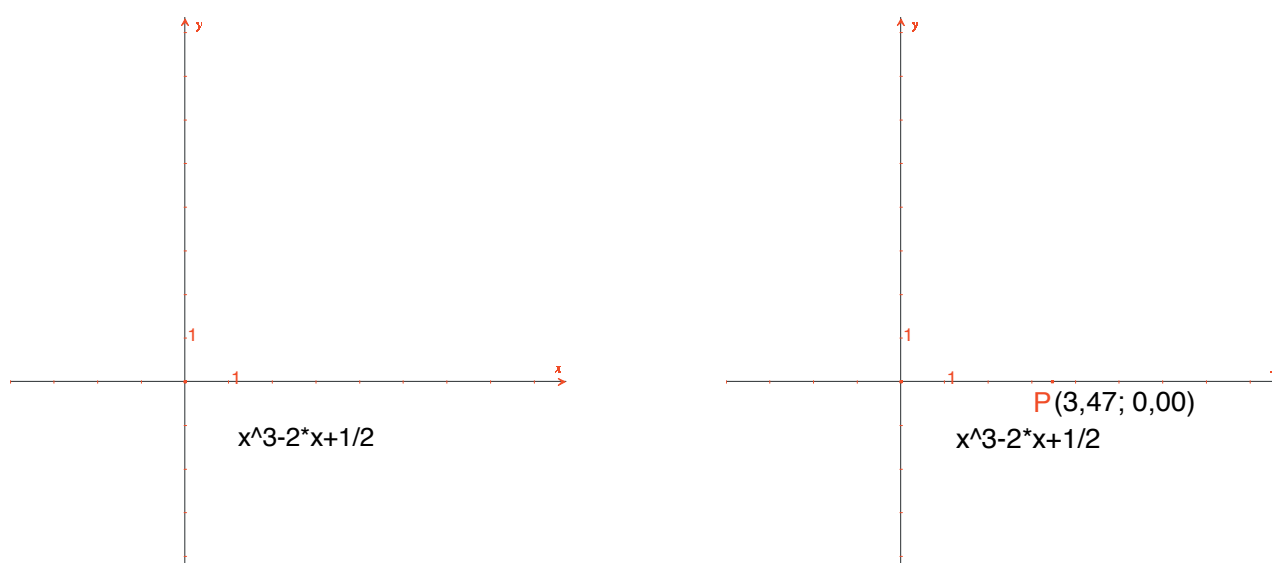
**Figura 1.5** - La envolvente de las rectas de *Simson* de un triángulo  $ABC$  es llamada deltoide. Posee las mismas simetrías que un triángulo equilátero.




Gracias a su sistema de ejes y a la herramienta expresión, Cabri II Plus permite fácilmente tanto construir la gráfica de una función como de estudiarla. En este capítulo vamos a estudiar una función polinómica de grado 3:

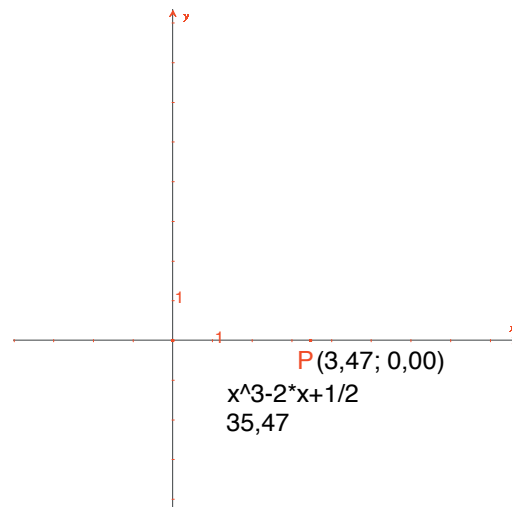
$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

En primer lugar, haga visibles los ejes de coordenadas, con **[Atributos]Mostrar los Ejes** . Seguidamente, cree la expresión correspondiente en la hoja de trabajo. Una expresión que se encuentre en la hoja puede enseguida ser calculada para diferentes valores de sus variables. En éste caso, active **[Texto y Símbolos]Expresión** , e introduzca  $x^3 - 2x + 1/2$ . Los nombres de las variables admitidas en las expresiones son las letras  $a, b, c, \dots, z$ . Coloque un punto  $P$  sobre el eje de las abscisas (con la herramienta **[Puntos]Punto** ). Obtenga sus coordenadas utilizando **[Medida]Coordenadas o Ecuación**  y seleccionando  $P$ . El texto que muestra las coordenadas está inicialmente unido a  $P$ , y se desplazará con el punto. Con la herramienta **[Manipulación]Apuntador** , se pueden desunir las coordenadas del punto  $P$  y colocarlas donde quiera. Se puede igualmente reunir las de nuevo aproximándolas al punto.





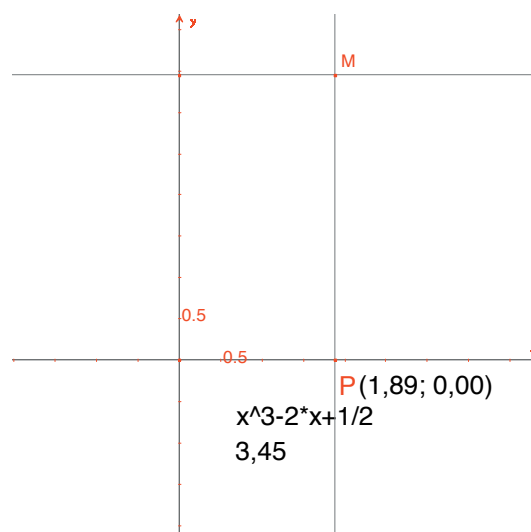
**Figura 2.1** - [A la izquierda]. La expresión correspondiente a la función a estudiar. [A la derecha]. El punto  $P$  en el eje de las abscisas, se muestran sus coordenadas con **[Medida]Coordenadas o ecuación**.

Calculamos enseguida el valor de  $f(x)$  donde  $x$  representa la abscisa de  $P$ . Para esto, active la herramienta [Medida]Aplicar una Expresión , y seleccione la abscisa de  $P$  en el texto que muestra sus coordenadas.




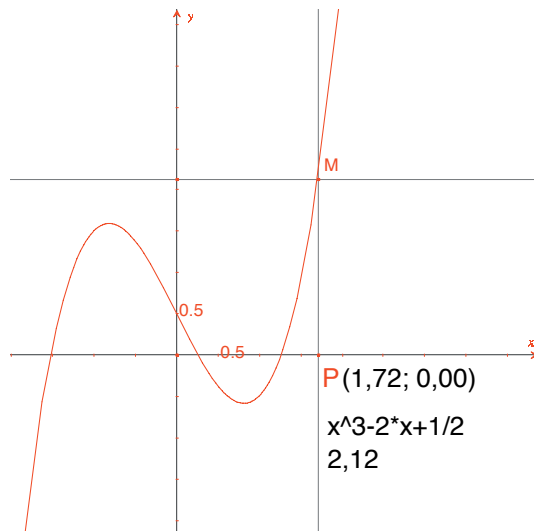
**Figura 2.2** - La herramienta [Medida]Aplicar una expresión se ha utilizado para calcular el valor de  $f(x)$  cuando  $x$  es la abscisa de  $P$ .

Transfiera a continuación este valor al eje de las ordenadas, con la herramienta [Construcciones]Transferencia de Medidas , seleccionando el valor a transferir y el eje de las ordenadas. Es suficiente con construir paralelas a los ejes que pasen por estos dos puntos ([Construcciones]Recta Paralela ) , y obtener en su intersección el punto  $M$  de coordenadas  $(x, f(x))$ . En la **figura 2.3**, se ha desplazado  $P$  con respecto a su posición en la **figura 2.2**, de manera a hacer visible el punto del eje de las ordenadas obtenido por transferencia de medidas.



**Figura 2.3** - Construcción del punto  $M(x, f(x))$ .




La gráfica de la función se obtiene generando el lugar del punto  $M$  cuando  $P$  recorre el eje de las abscisas. Este lugar se construye con la herramienta [Construcciones]Lugar  seleccionando  $M$  y luego  $P$ . A fin de encuadrar mejor la parte que nos interesa de la gráfica de la función, se puede desplazar el origen del sistema de coordenadas y las graduaciones, con deslizar-depositar el origen del sistema de coordenadas o cualquiera de las marcas de la graduación.





**Figura 2.4** - La herramienta [Construcciones]Lugar permite finalmente construir la gráfica de la función.

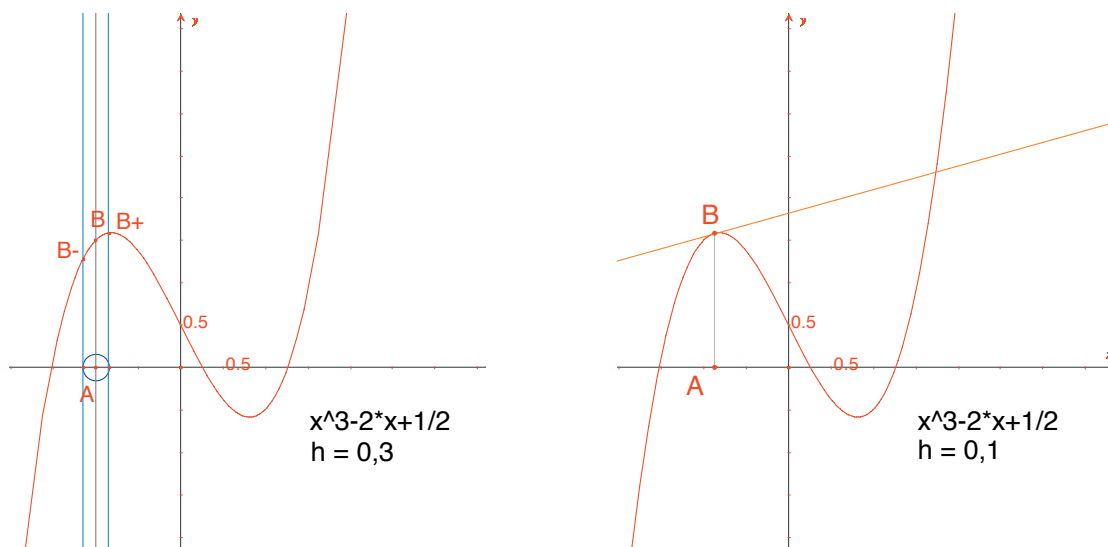
Vamos a construir una aproximación de la tangente a la curva en un punto. Para  $h$  pequeño, se sabe que :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



Desde el punto de vista geométrico, esta aproximación consiste en tomar como dirección de la tangente en el punto de la curva de abscisa  $x$ , la dirección de la recta que une los puntos de abscisas  $x-h$  y  $x+h$ . Con la herramienta [Texto y Símbolos]Número 2.1 , asigne un valor para  $h$ , por ejemplo 0.3, que conviene en este caso para estas construcciones. Se podrá luego editarlo para reemplazarlo por un valor más pequeño que dé una mejor aproximación. Construya a continuación un punto  $A$  en el eje de las abscisas, y el círculo de centro  $A$  y de radio  $h$ . Este círculo se obtiene con la herramienta [Construcciones]Compás  seleccionando  $h$  y luego  $A$ . Las dos intersecciones del círculo de centro  $A$  y de radio  $h$  con el eje de las abscisas tienen por abscisas  $x-h$  y  $x+h$ , siendo  $x$  la abscisa de  $A$ . Trace las tres rectas paralelas al eje de las ordenadas ([Construcciones]Recta Paralela ) y que pasen por los dos puntos de intersección, y el punto  $A$ .

Las intersecciones de estas tres rectas con la curva producen los puntos  $B^-$ ,  $B$ ,  $B^+$  de la curva, de abscisas respectivas  $x-h$ ,  $x$ ,  $x+h$ .

Como la figura empieza a resultar un poco compleja, oculte los elementos que no sirvan más. Active la herramienta **[Atributos] Ocultar/Mostrar** , y seleccione los elementos a ocultar. En este caso, oculte  $P$ ,  $M$ , las dos rectas de construcción de  $M$ , las coordenadas de  $P$  y la imagen de la abscisa de  $P$  por la función. Los objetos ocultos se ven punteados solamente cuando la herramienta **[Atributos] Ocultar/Mostrar**  está activa. Para hacer visible un objeto oculto, es suficiente con seleccionarlo otra vez con esta misma herramienta.



**Figura 2.5** - [A la izquierda]. Tomando las intersecciones del círculo de centro  $A$  y de radio  $h$  así como su centro se han construido los tres puntos de la curva de abscisas  $x-h$ ,  $x$ , y  $x+h$ . [A la derecha]. La aproximación de la tangente en  $B$  es paralela a la recta  $B^-B^+$  que pasa por  $B$ .

Construya esta recta con la herramienta **[Líneas] Recta**  luego la paralela con **[Construcciones] Recta Paralela** . Oculte a continuación la recta  $B^-B^+$  y los otros elementos de construcción para dejar visible solamente  $h$ ,  $A$ ,  $B$  y la tangente en  $B$ . Observe que el valor  $h=0.3$  proporciona ya una muy buena aproximación de la tangente. Se puede no obstante mejorarla disminuyendo  $h$ , por ejemplo haciéndolo 0.0001.

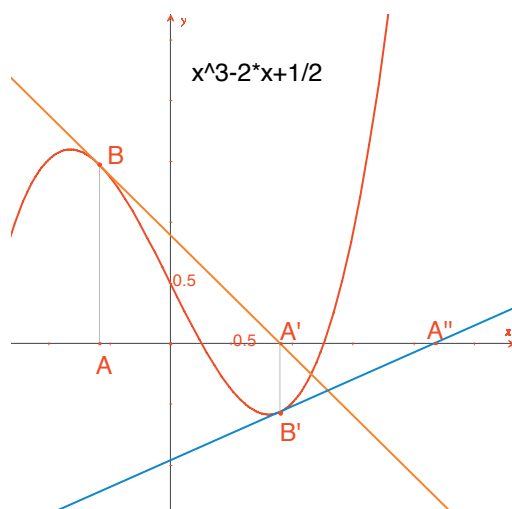
El desplazamiento del punto  $A$  sobre el eje permite determinar visualmente las tres raíces de la ecuación  $f(x)=0$ , los dos extremos locales de  $f$ , y el punto de inflexión de la curva.

Como información, las tres soluciones de  $f(x)=0$  son aproximadamente  $r_1 = -1,52568$ ,  $r_2 = 0,25865$ , y  $r_3 = 1,26703$ . Las abscisas de los extremos son  $e_1 = -\sqrt{6}/3 \approx -0,81649$  y  $e_2 = \sqrt{6}/3 \approx 0,81649$ . El punto de inflexión tiene por coordenadas  $(0, 1/2)$ .


**Ejercicio 3** - Utilizando la pendiente de la tangente, trazar la gráfica de la función derivada.

**Ejercicio 4** - La tangente corta el eje en un punto  $A'$  de abscisa  $x'$ , que es en general una mejor aproximación de la raíz que  $x$  si  $A$  se encuentra en un entorno de una raíz de  $f(x)=0$ . Esta constatación es la base del método iterativo de *Newton*<sup>1</sup> - *Raphson*<sup>2</sup> para encontrar una raíz de una ecuación. Construir  $A'$ , luego su iterado  $A''$  por el mismo método, luego estudiar la posición de  $A''$  en función de la posición de  $A$ . En particular, se pueden encontrar dos posiciones de  $A$ , además de las tres raíces, para las cuales  $A''$  regresa a  $A$ .

Como información, esas son las dos raíces reales de un polinomio de grado 6, que valen aproximadamente  $-0.56293$  y  $0.73727$ . Se ve así que una mala elección de  $A$  puede hacer divergir el método, llevando  $A'$  a uno de los dos puntos donde la derivada es nula.

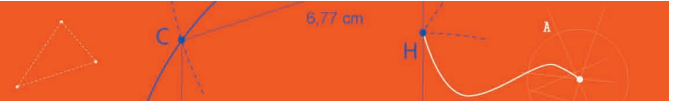


**Figura 2.6** - Las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson a partir del punto  $A$ .

**Nota:** La misma gráfica se puede obtener directamente con la herramienta [\[Medida\]Aplicar una expresión](#) . Seleccionando primero la expresión y luego uno de los dos ejes.

<sup>1</sup> Sir Isaac Newton, 1643-1727

<sup>2</sup> Joseph Raphson, 1648-1715



## MOSAICOS




Vamos a construir algunos mosaicos (o teselados) en el plano con polígonos. Comencemos por algunas definiciones simples, pero suficientes para lo que sigue. El lector interesado puede remitirse a la obra de referencia *Tilings and Patterns* de Branko Grünbaum y G.C. Shephard, Freeman 1987. Existe igualmente un gran número de sitios en Internet sobre los mosaicos y los grupos de simetría.

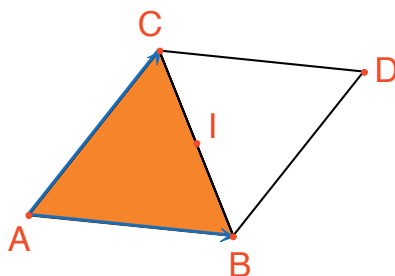
Se dice que un conjunto de figuras cerradas que recubren el plano es un mosaico si los interiores de las partes son disjuntas dos a dos, y la reunión de todas las partes es el plano entero. Estas partes se llaman teselas del mosaico, o teselas del teselado. La intersección no reducida a un punto de dos teselas se llama arista del mosaico, y la intersección reducida a un punto de dos teselas o más se llama vértice del mosaico.

Para un mosaico  $P$ , se denota  $S(P)$  el conjunto de las isometrías  $f$  del plano, de tal modo que la imagen de toda tesela de  $P$  por  $f$  es una tesela de  $P$ .  $S(P)$  es un grupo, llamado el grupo de las simetrías de los mosaicos. Se pueden considerar varios casos para este grupo:



- $S(P)$  no contiene ninguna traslación.  $S(P)$  es entonces isomorfo a un grupo cíclico, eventualmente reducido a la identidad, engendrado por una rotación de ángulo  $2\pi/n$ , o a un grupo diedral, grupo de las simetrías de un polígono regular de  $n$  lados.
- $S(P)$  contiene traslaciones de vectores todos colineales.  $S(P)$  es entonces isomorfo a uno de los 7 grupos de frieze.
- $S(P)$  contiene dos traslaciones de vectores no colineales. Entonces  $S(P)$  es isomorfo a uno de los 17 grupos cristalográficos, y el mosaico se denomina periódico.

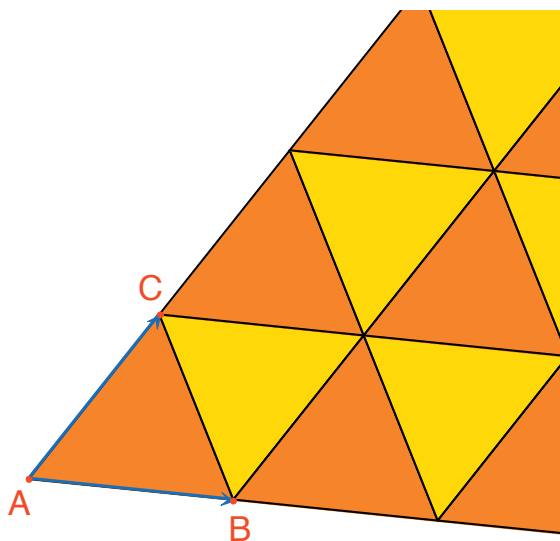
Si todas las teselas del mosaico pueden ser obtenidas por isometría a partir de una sola tesela, se dice que el mosaico es monohedral. Aquí nos interesaremos solamente por el caso de mosaicos monohedrales en los cuales las teselas son polígonos. Vamos en primer lugar a construir un mosaico monohedral en el cual una tesela es un triángulo cualquiera.

Construya un triángulo  $ABC$  cualquiera con la ayuda de la herramienta [Líneas]Triángulo , luego el punto medio  $I$  de uno de los lados, por ejemplo  $BC$ , con la herramienta [Construcciones]Punto Medio . Sea  $D$  el simétrico de  $A$  con respecto a  $I$ , obtenido con la herramienta [Transformaciones]Simetría Central  seleccionando en primer lugar el objeto a transformar  $A$ , luego el centro de simetría  $I$ .



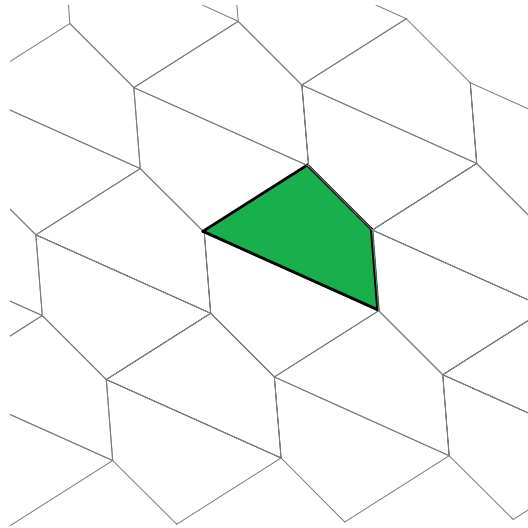
**Figura 3.1** - Construcción del simétrico de un triángulo  $ABC$  con respecto al punto medio de uno de sus lados (aquí  $BC$ ), para obtener un paralelogramo  $ABDC$ .

El cuadrilátero  $ABDC$  es un paralelogramo, y puede utilizarse para teselar el plano. Construya los dos vectores  $AB$  y  $AC$  con la herramienta [Líneas]Vector , luego utilícelos para duplicar los triángulos  $ABC$  y  $BCD$  por traslación, con la herramienta [Transformaciones]Traslación .



**Figura 3.2** - Construcción de las imágenes de los dos triángulos por las traslaciones de los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .

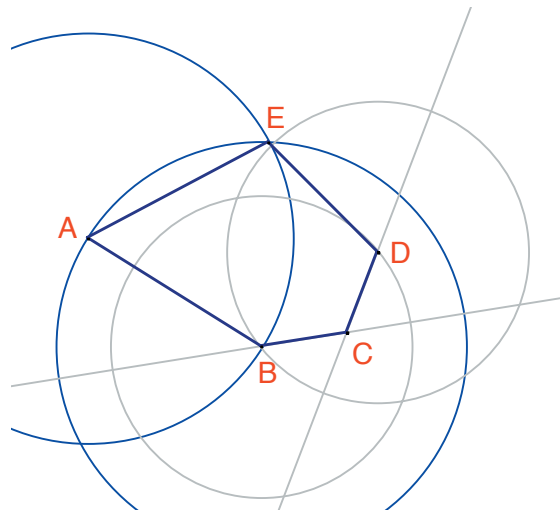
De la misma forma se puede teselar el plano con un cuadrilátero cualquiera, convexo o no, pero sin que se corten los lados. Tome el simétrico del cuadrilátero con respecto al punto medio de un lado, y obtenga un hexágono con lados paralelos dos a dos, que tesela el plano por traslación.



**Figura 3.3** - El mismo tipo de construcción permite teselar el plano con un cuadrilátero cualquiera, eventualmente no convexo pero que no se corten los lados.



El caso de los otros polígonos convexos es bastante más complejo. A partir de 7 lados, se puede demostrar que ningún polígono convexo puede teselar el plano. Hay 3 tipos de hexágonos convexos que teselan el plano, y al menos 14 tipos de pentágonos convexos que teselan el plano, para cada tipo hay que definir un conjunto de restricciones sobre los ángulos y las longitudes de los lados. En el caso de los pentágonos, no se sabe actualmente si los 14 tipos conocidos producen todas las soluciones al problema. El último tipo conocido fue descubierto en 1985. La cuestión de los polígonos no convexos, según sabemos, no está aún resuelta.

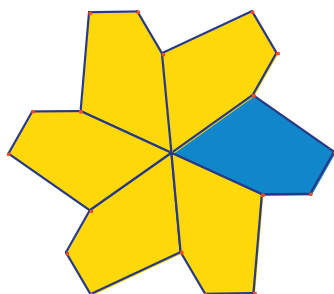
**Ejercicio 5** - Construir un pentágono convexo  $ABCDE$  que verifique las restricciones siguientes: el ángulo en  $A$  es  $\hat{A} = 60^\circ$ , el ángulo en  $C$  es  $\hat{C} = 120^\circ$ ,  $AB = AE$ ,  $CB = CD$ . Estas restricciones no determinan un pentágono único sino una familia de pentágonos. El número de puntos libres de la construcción será entonces de al menos tres.



**Figura 3.4** - Construcción de un pentágono que verifica las restricciones  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 120^\circ$ ,  $AB = AE$ , y  $CB = BD$ . Los puntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son libres en el plano.



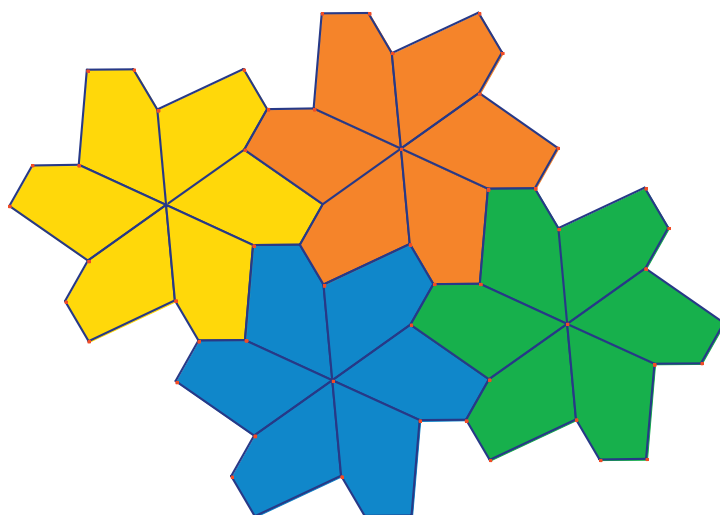
Por rotaciones sucesivas de centro  $A$  y de ángulo  $60^\circ$  (herramienta [Transformaciones] Rotación  que espera al objeto a transformar, a un ángulo, y a un centro) construir una «flor» de 6 pentágonos. El ángulo es un número creado en la hoja de trabajo con la herramienta [Texto y Símbolos]Número .



**Figura 3.5** - El pentágono de base se reproduce por rotación de centro  $A$  y de ángulo  $60^\circ$ , para formar una «flor» de seis pétalos.

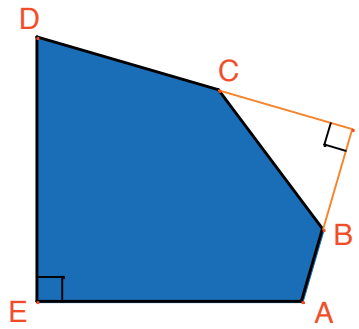
Las flores pueden entonces ser ensambladas por traslación para teselar el plano. El mosaico obtenido es del tipo 5 según la clasificación dada en *Tilings and Patterns*. Fue publicado por *K. Reinhardt* en 1918.

Este mosaico no es solamente monohedral, es decir que todas las teselas son idénticas salvo isometría, sino además isohedral: todas las teselas juegan el mismo rol en el mosaico. Más precisamente, si una isometría transforma una tesela en otra tesela del mosaico, entonces forma parte del grupo de simetrías del mosaico.



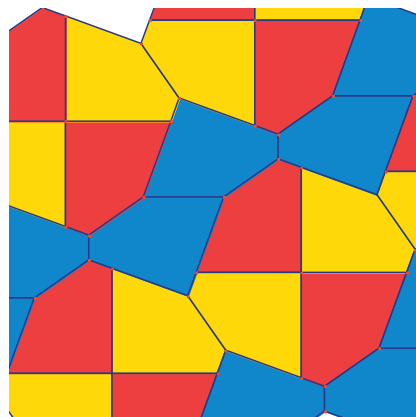
**Figura 3.6** - Las flores están ensambladas por traslación para cubrir el plano.

**Ejercicio 6** - Construir un pentágono  $ABCDE$  que verifique las restricciones:  $\hat{E} = 90^\circ$ ,  $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ ,  $2\hat{B} - \hat{D} = 180^\circ$ ,  $\hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ ,  $EA = ED = AB + CD$ .



**Figura 3.7** - Pentágono del tipo 10 según la clasificación de Tilings and Patterns. Este pentágono sirve de base a un mosaico monohedral del plano. Los puntos E y A son libres en el plano y el punto I es libre sobre un arco de círculo.

El mosaico se realiza haciendo en primer lugar tres copias de la tesela por rotaciones sucesivas de  $90^\circ$  alrededor de E, para obtener un cuadrado truncado. A continuación esos cuadrados se reúnen en bandas por traslación en una dirección. Las bandas de cuadrados están separadas por bandas de pentágonos, como en la figura siguiente.



**Figura 3.8** - Mosaico monohedral por pentágonos convexos. Este mosaico es debido a Richard E. James III, después de la publicación de un artículo de Martín Gardner en Scientific American en 1975. Se puede encontrar este artículo completo en Time travel and other mathematical bewilderments, Martín Gardner, Freeman 1987.