CABRI® II Plus

CABRILOG

Créateur d'Outils Mathématiques

MANUEL D'UTILISATION

BIENVENUE !

Bienvenue dans le monde dynamique de Cabri !

Né à la fin des années 80 à l'IMAG, un laboratoire de recherche associé au CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) et à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, Cabri Géomètre compte aujourd'hui plus de cent millions d'utilisateurs, sur ordinateurs et calculatrices graphiques Texas Intruments, à travers le monde. Cabri II Plus est maintenant développé et distribué par la société Cabrilog, fondée en mars 2000 par Jean-Marie LABORDE, directeur de recherche au CNRS et père spirituel de Cabri II Plus.

La construction sur ordinateur de figures géométriques apporte une nouvelle dimension par rapport aux constructions classiques utilisant papier, crayon, règle et compas. Cabri II Plus possède un grand nombre de fonctionnalités, puissantes et faciles à utiliser. Les figures, des plus simples aux plus compliquées peuvent être manipulées librement. A n'importe quel moment, on peut tester la construction d'une figure, émettre des conjectures, mesurer, calculer, effacer, cacher/montrer des objets, mettre des couleurs, des pointillés, du texte, ou bien tout recommencer.

Cabri II Plus est à la pointe des logiciels pour l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie. Il s'adresse aux enseignants ainsi qu'aux étudiants, et peut être utilisé de l'école primaire à l'université.

Certaines fonctionnalités du logiciel sont spécifiques aux versions Macintosh/ Windows : les touches `Ctrl` et `Alt` de Windows correspondent à la commande ⌘ et à l'option `Alt` ⌥ sur Mac OS. Le clic droit sous Windows correspond au `Ctrl`+clic sur Mac OS.

• **Interface :** Les nouvelles icônes sont plus larges et plus lisibles. Les menus contextuels rendent encore plus intuitive l'utilisation de Cabri II Plus, en résolvant facilement les situations d'ambiguïté de sélection ou en changeant les attributs de n'importe quel objet en quelques clics.

• **Noms :** Nommez tous les objets et positionnez le nom n'importe où autour d'un objet.

• **Expressions :** Définissez et évaluez dynamiquement des expressions avec une ou plusieurs variables.

• **Graphe instantané :** Tracez et étudiez facilement les graphes d'une ou plusieurs fonctions.

• **Lieux :** Construisez des lieux de points ou d'objets, des lieux de lieux ou des intersections avec des lieux. Les équations de courbes algébriques, construites grâce à l'outil Lieu peuvent être affichées.

• **Droites intelligentes :** Affichez seulement la partie utile d'une droite. La longueur de cette portion de droite peut être modifiée à volonté.

• **Couleurs :** Choisissez les couleurs des objets et des textes ainsi que les couleurs de remplissage à l'aide de la nouvelle palette de couleurs étendue ou en utilisant les couleurs variables dynamiquement.

• **Images (Bitmaps, JPEG, GIF) :** Attachez une image à certains objets d'une figure (points, segments, polygones, fond). Les images sont recalculées pendant les animations et les manipulations de la figure.

• **Texte :** Le style, la police et les attributs de texte de n'importe quel objet peuvent être changés librement.

• **Fenêtre de description :** Une fenêtre peut être ouverte pour lister toutes les étapes de la construction d'une figure.

• **Enregistrement d'une session :** Enregistrez une session pendant l'utilisation du logiciel. Une session peut être relue à l'écran ou imprimée plus tard, pour étudier la progression des élèves et identifier clairement les difficultés rencontrées lors d'expérimentations.

• **Importation/Exportation de figures :** Des figures peuvent être transférées vers ou en provenance d'une calculatrice graphique utilisant Cabri Junior (TI-83 Plus et TI-84 Plus).

Toutes ces fonctionnalités novatrices peuvent apporter une nouvelle dimension à la pratique de votre enseignement.

Ce document est divisé en deux parties.

La partie **[1] PRISE EN MAIN** est destinée aux utilisateurs découvrant le logiciel pour la toute première fois. Elle leur permet de se familiariser avec l'interface de Cabri II Plus et les conventions d'utilisation de la souris. Néanmoins, l'expérience prouve que la prise en main est très rapide, et, qu'en classe, les élèves «font» déjà de la géométrie dans leur première demi-heure d'utilisation du logiciel.

La partie **[2] DÉCOUVERTE** est destinée aux nouveaux utilisateurs et propose des activités de niveau collège et lycée. D'autres documents sont disponibles sous forme de documents PDF dans le répertoire d'installation du logiciel ou sur le CD-ROM d'installation.

Le premier document, **RÉFÉRENCE.pdf** est une description complète du logiciel.

Le second document, **APPROFONDISSEMENT.pdf** présente d'autres activités plus avancées, de niveau lycée et premier cycle universitaire ou classes préparatoires.

Les activités de ces documents sont largement indépendantes les unes des autres. Le lecteur est invité à faire les constructions détaillées, puis les exercices proposés.

Notre site *www.cabri.com* vous donnera accès aux dernières mises à jour et aux nouvelles concernant nos produits, en particulier les nouvelles versions de ce document. Le site contient des liens vers des dizaines de pages Internet et référence également de nombreux livres sur la géométrie et sur Cabri II Plus.

Toute l'équipe de Cabrilog vous souhaite de longues et passionnantes heures de construction, d'exploration, et de découvertes.

Manuel de Cabri II Plus :
Auteur initial : Eric Bainville
Mise à jour : Christophe Foucher, Mars 2007
Nouvelles versions : *www.cabri.com*
Support : *support@cabri.com*
Création graphique, mise en page et relectures : Cabrilog

TABLE DES MATIÈRES

PRISE EN MAIN

DÉCOUVERTE

CHAPITRE 1

PRISE EN MAIN

1.1 PHILOSOPHIE

La philosophie de Cabri II Plus est de permettre le maximum d'interactions (souris, clavier,...) entre l'utilisateur et le logiciel, et dans chaque cas, de faire ce que l'utilisateur s'attend à ce que le logiciel fasse, en respectant d'une part les comportements usuels des applications et du système, et d'autre part le comportement mathématique le plus plausible.

Un ***document*** Cabri II Plus est composé d'une ***figure*** construite librement sur une feuille de papier virtuelle de un mètre carré (1m sur 1m). Une figure est composée d'objets géométriques (points, droites, cercles,...) mais également d'autres objets (nombres, textes, formules,...).

Un document peut aussi comporter des ***macro-constructions***, qui permettent, en mémorisant des constructions intermédiaires d'étendre les fonctionnalités du logiciel.

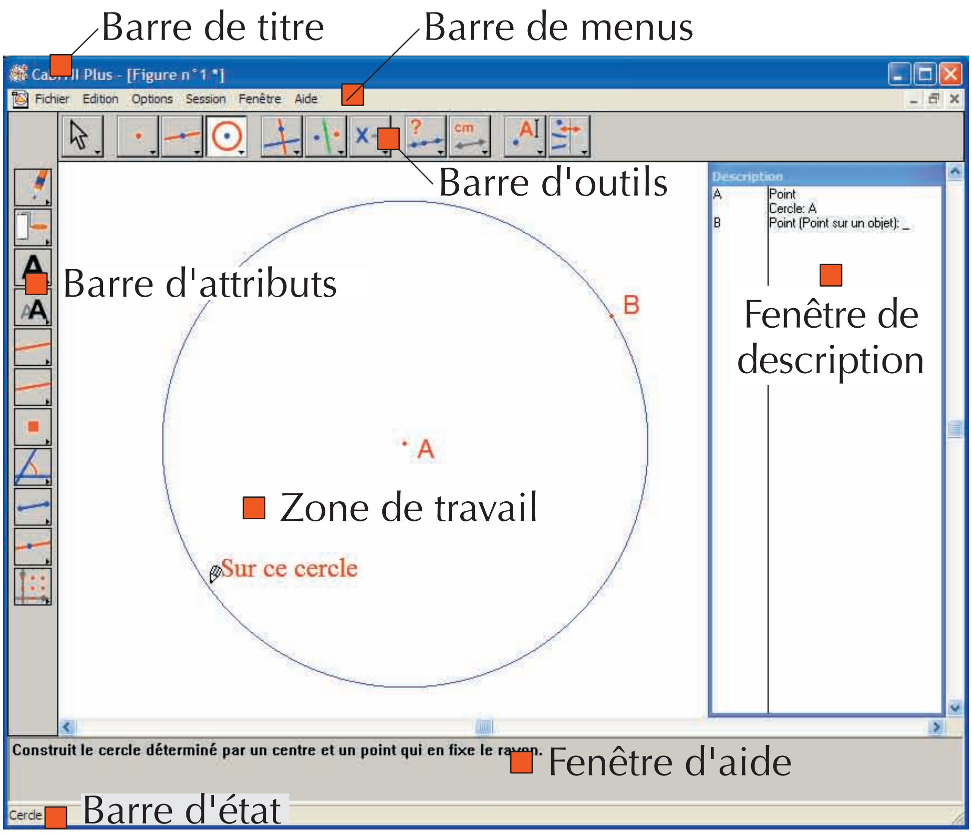
L'application permet d'ouvrir simultanément plusieurs documents et supporte le Couper-Copier/Coller entre documents ouverts.

1.2 INTERFACE DE L'APPLICATION

La figure ci-après montre la fenêtre principale de l'application et ses différentes zones. Au lancement de Cabri II Plus, la barre d'attributs, la fenêtre d'aide et la fenêtre de description ne sont pas visibles.

La ***barre de titre*** indique le nom du fichier contenant la figure, ou Figure n°1, 2... si la figure n'a pas encore été nommée.

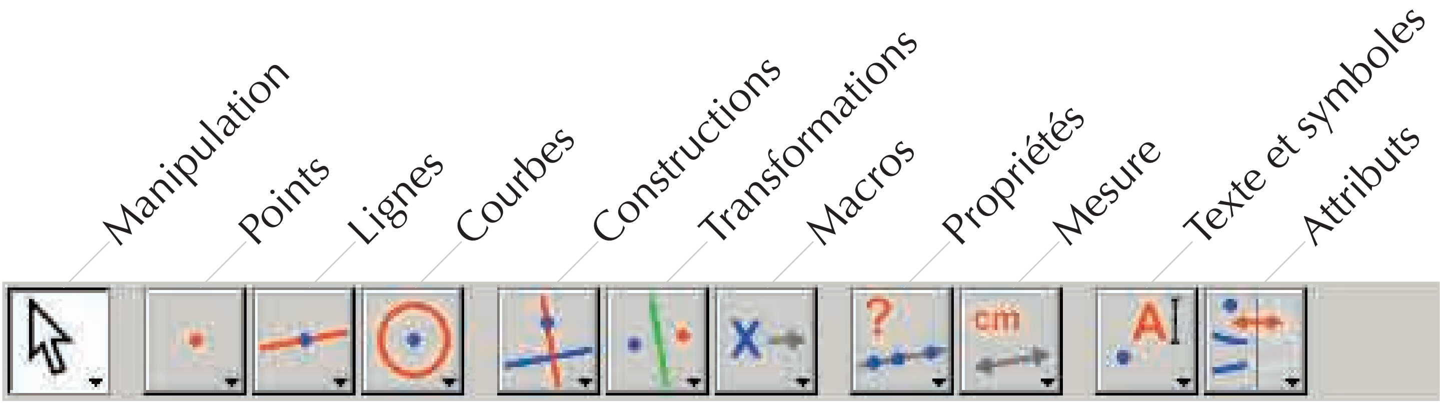
La ***barre de menus*** permet d'accéder aux commandes de l'application, qui correspondent aux commandes rencontrées usuellement dans les logiciels.

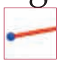


Dans la suite de ce document, nous désignerons l’entrée Action du menu Menu par [Menu]Action. Par exemple, [Fichier]Enregistrer sous... désigne l’entrée Enregistrer sous... du menu Fichier.

La ***barre d’outils*** fournit les outils permettant de créer et manipuler la figure. Elle est constituée de plusieurs boîtes à outils, comportant chacune un outil visible, correspondant à une icône de la barre. L’outil actif est représenté par un bouton enfoncé, avec un fond blanc. Les autres outils sont représentés par des boutons non enfoncés, avec un fond gris. Un clic court sur un bouton active l’outil correspondant. Une pression prolongée sur un bouton déroule la boîte à outils, et permet d’y choisir un autre outil. Cet outil devient l’outil visible de la boîte à outils, et l’outil actif.

La barre d'outils peut être recomposée librement par l'utilisateur, et éventuellement verrouillée dans une configuration fixée pour une utilisation en classe (voir chapitre : **[8] PRÉFÉRENCES ET PERSONNALISATION** dans **RÉFÉRENCE.pdf**)



Dans la suite de ce document, nous désignerons l'outil Outil de la boîte Boîte par [Boîte]Outil, avec l'icône correspondante rappelée dans la marge (certains libellés trop longs pour tenir dans la marge ont été abrégés). Par exemple [Lignes]Demi-droite  représente l'outil Demi-droite de la boîte à outils Lignes.

Les icônes de la barre d'outils peuvent être affichées en deux tailles. Pour changer de taille, cliquer sur le bouton droit de la souris après avoir déplacé le pointeur dans la barre d'outil, à droite du dernier outil et sélectionner «Petites icônes».

La ***barre d'état*** en bas de la fenêtre, indique en permanence l'outil actif.

La ***barre d'attributs*** permet de modifier les attributs des objets : couleurs, styles, tailles,... Elle est activée par la commande [Options]Montrer les attributs, et masquée de nouveau par [Options]Cacher les attributs, ou par la touche `F9` sur Windows, ⌘+`F9` sur Mac.

La ***fenêtre d'aide*** fournit une aide succincte sur l'outil sélectionné. Elle indique les objets attendus par l'outil, et ce qui sera construit. Elle est activée/masquée par la touche `F1` sur Windows, ⌘+`F1` sur Mac.

La ***fenêtre de description*** contient une description de la figure sous forme de texte. On y trouve l'ensemble des objets construits et leur méthode de construction. Elle est activée par la commande [Options]Montrer la description, et masquée de nouveau par [Options]Cacher la description, ou par la touche `F10` sur Windows, ⌘+`F10` sur Mac.

Enfin, la ***zone de travail*** représente une portion de la feuille de travail. C'est dans la zone de travail que l'on effectue les constructions géométriques.

1.3 UTILISATION DE LA SOURIS

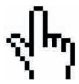
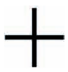
La plupart des fonctionnalités du logiciel sont réalisées en utilisant la souris.
Les actions sur la souris sont le déplacement, la pression sur un bouton et le relâchement d'un bouton. En l'absence d'indication contraire, il s'agira du bouton gauche de la souris.

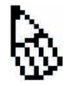
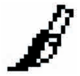
- Une séquence pression-relâchement est appelée ***clic***.
- Une séquence pression-relâchement-pression-relachement est appelée ***double-clic***.
- Une séquence pression-déplacement-relâchement est appelée ***glisser-déposer***.

Lorsqu'on déplace la souris dans la zone de travail, le logiciel nous informe de trois façons de ce que va produire un clic ou un ***glisser-déposer*** :

- la forme du pointeur,
- le texte affiché à côté du pointeur,
- une représentation partielle de l'objet en cours de construction.

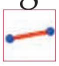
Suivant les cas, le texte et la représentation partielle peuvent ne pas être affichés.

Les différents pointeurs :	
	Un objet existant peut être sélectionné.
	Un objet existant peut être sélectionné, ou déplacé, ou utilisé dans une construction.
	Apparaît lorsqu'on clique sur un objet existant pour le sélectionner, ou l'utiliser dans une construction.
	Plusieurs sélections sont possibles sous le pointeur. Un clic provoquera l'apparition d'un menu permettant de préciser les objets à sélectionner parmi toutes les possibilités.
	Un objet existant est en train d'être déplacé.
	Le pointeur est dans une portion libre de la feuille, et on peut définir une sélection rectangulaire par glisser-déposer.
	Signale le mode de déplacement de la feuille. On peut entrer dans ce mode à tout moment en maintenant la touche `ctrl` (Windows) ou ⌘ (Mac OS) enfoncée. Dans ce mode, glisser-déposer déplacera la feuille dans la fenêtre.
	Apparaît pendant le déplacement de la feuille.

	Indique qu'un clic va créer un nouveau point libre sur la feuille.
	Indique qu'un clic va créer un nouveau point, qui peut être libre sur un objet existant ou à l'intersection de deux objets existants.
	Indique qu'un clic va remplir l'objet sous le pointeur avec la couleur courante.
	Indique qu'un clic va changer l'attribut (par exemple la couleur, le style, l'épaisseur,...) de l'objet sous le pointeur.

1.4 PREMIÈRE CONSTRUCTION

Pour illustrer ce chapitre **[1] PRISE EN MAIN**, construisons un carré à partir d'une de ses diagonales. Au lancement de Cabri II Plus, un nouveau document vide est créé, et on peut immédiatement commencer une construction.

Construisons le segment qui sera une des diagonales du carré. Activons l'outil [Lignes]Segment  en cliquant sur l'icône de la droite et en maintenant le bouton de la souris enfoncé pour dérouler la boîte à outils. Déplaçons ensuite le pointeur sur l'outil segment et relâchons le bouton de la souris pour l'activer.

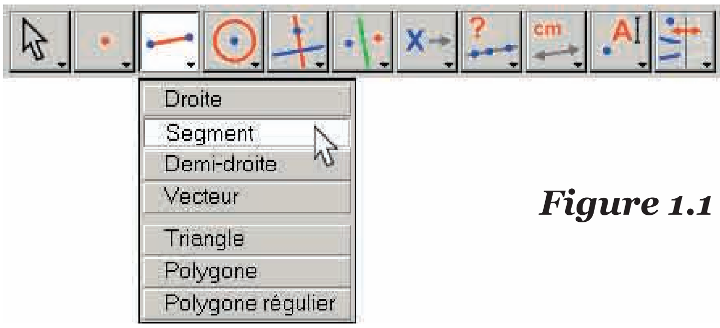


***Figure 1.1** – Selection de l'outil [Lignes]Segment.*

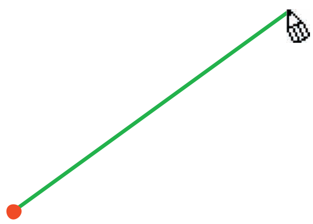


***Figure 1.2** – Construction du premier point.*
Une image du segment final se déplace avec le pointeur jusqu'à ce que le second point soit construit.

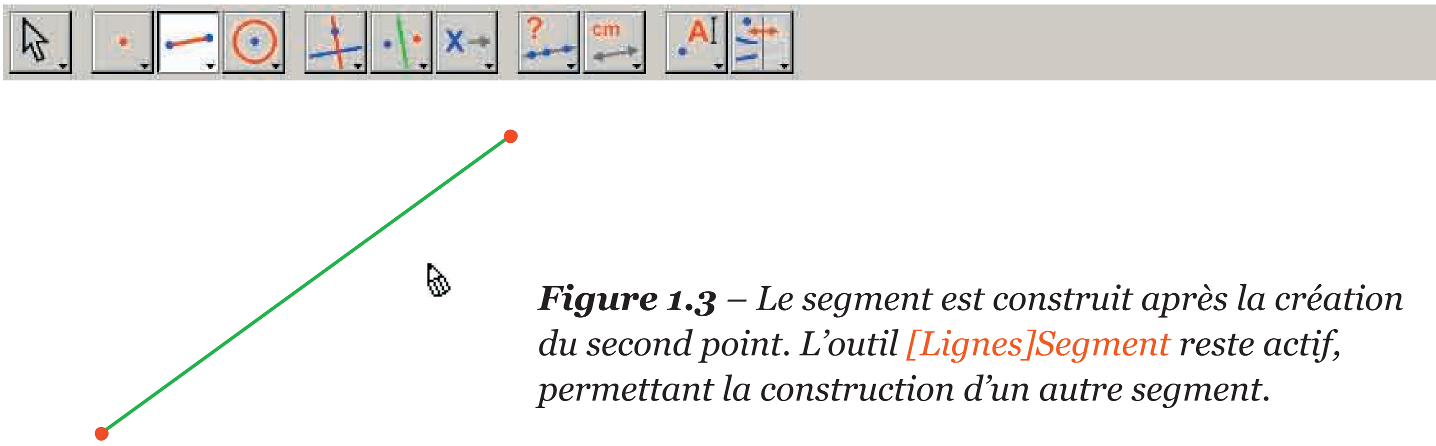
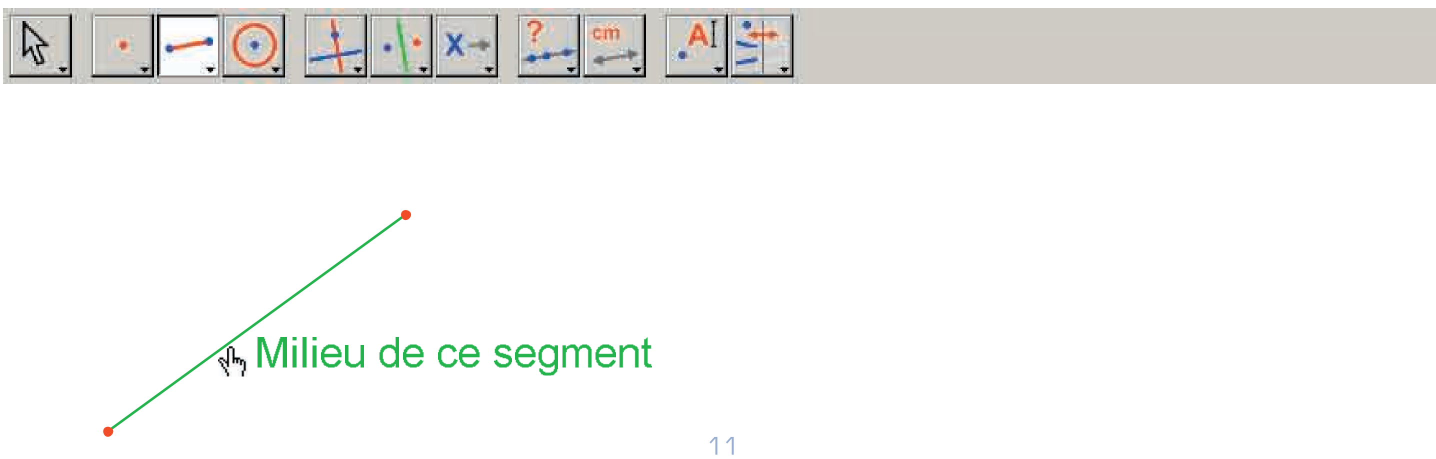


Figure 1.3 – Le segment est construit après la création du second point. L'outil [Lignes]Segment reste actif, permettant la construction d'un autre segment.

Déplaçons maintenant le pointeur dans la zone de travail, où il prend la forme . Un simple clic crée le premier point. Continuons à déplacer le pointeur dans la zone de travail. Un segment tracé entre le premier point et le pointeur matérialise le segment qui sera construit. On crée le second point en cliquant. Notre figure comporte maintenant deux points et un segment.

Pour construire le carré, nous pourrons utiliser le cercle ayant ce segment pour diamètre. Le centre de ce cercle est le milieu du segment. Pour construire ce milieu, on active l'outil [Constructions]Milieu , puis on déplace le pointeur sur le segment. Le texte Milieu de ce segment s'affiche alors à côté du pointeur, qui prend la forme . En cliquant, on construit le milieu du segment.



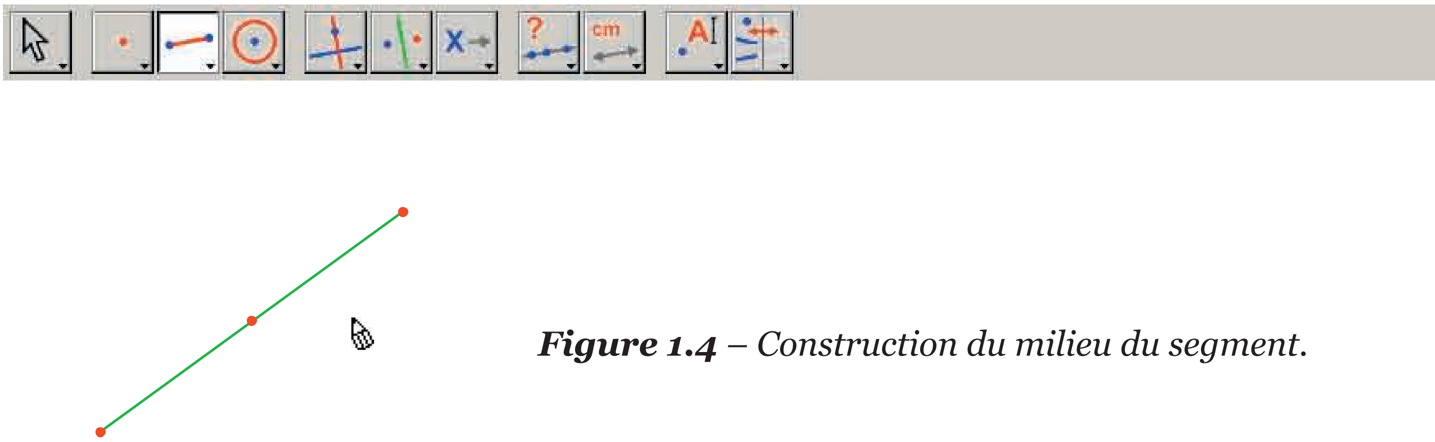
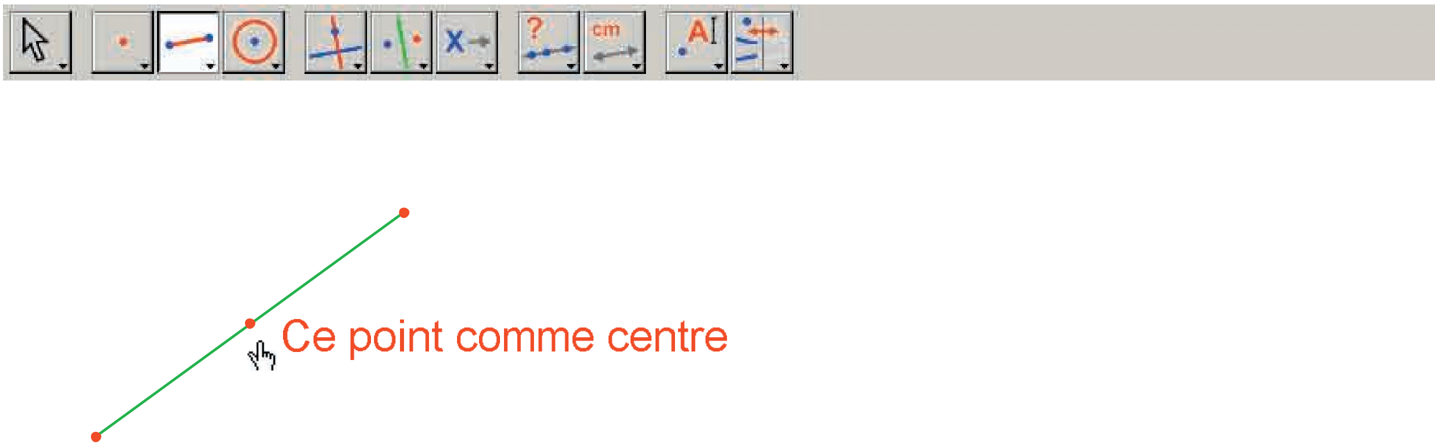
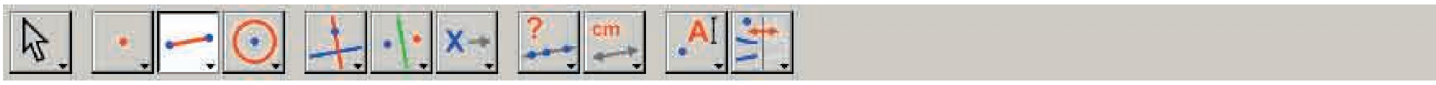


Figure 1.4 – Construction du milieu du segment.

On active ensuite l'outil [Courbes]Cercle, et on déplace le pointeur au voisinage du milieu construit. Le texte Ce point comme centre s'affiche alors, et on clique pour sélectionner le milieu du segment comme centre du cercle. Ensuite, l'outil cercle attend un point de la circonférence. Pendant le déplacement un cercle centré sur le milieu du segment et passant par le pointeur est tracé dynamiquement, comme précédemment avec le segment. Lorsque le pointeur passe au voisinage d'une extrémité du segment, le message passant par ce point s'affiche. On clique, et le cercle passant par cette extrémité se construit.





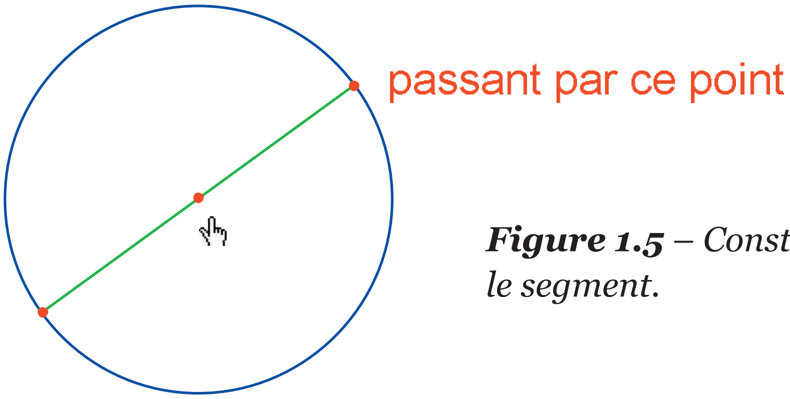
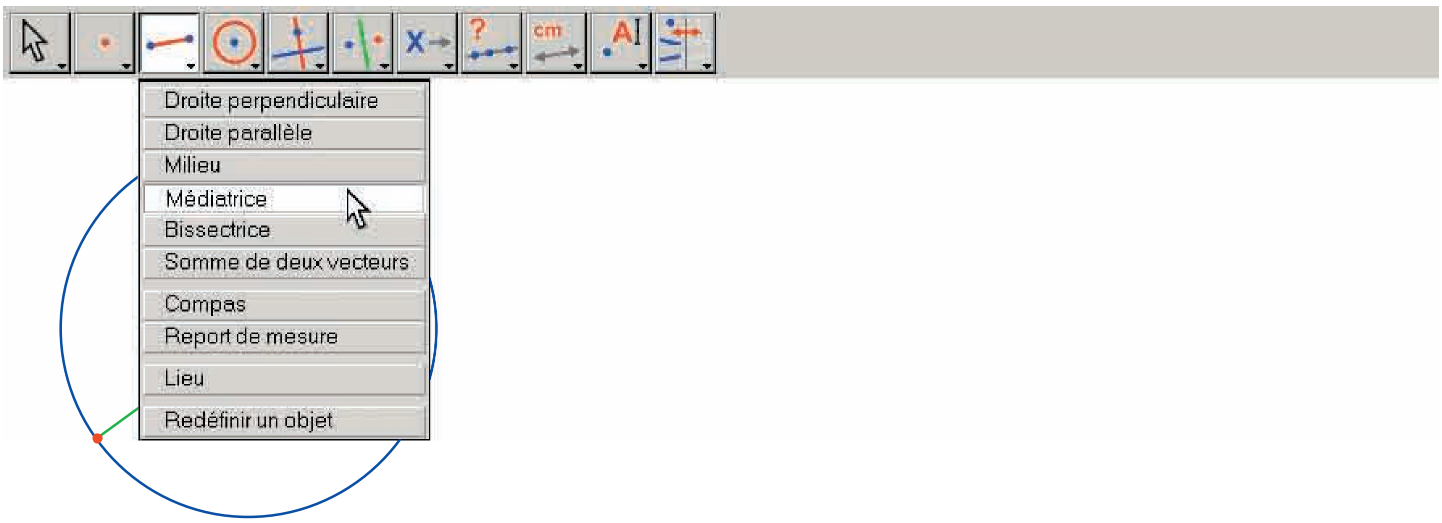
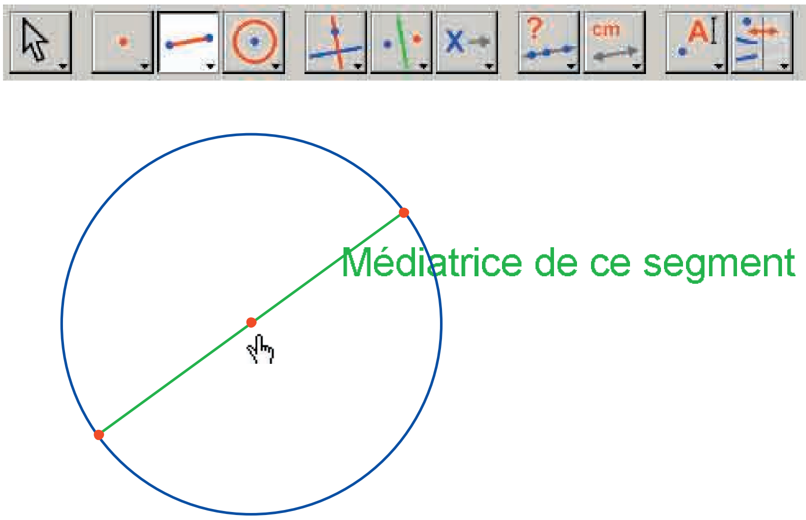


Figure 1.5 *– Construction du cercle ayant pour diamètre le segment.*

On peut activer l'outil [Manipulation]Pointer pour manipuler la figure. En se déplaçant sur les extrémités du segment, qui sont les points libres de la figure, le pointeur devient et le texte indique Ce point. On peut déplacer le point par glisser-déposer. Dans ce cas, l'ensemble de la construction est mise à jour : le segment est redessiné, son milieu est déplacé en conséquence, et le cercle suit.

Pour construire notre carré, il nous reste à en trouver l'autre diagonale, qui est le diamètre du cercle perpendiculaire au segment de départ. Nous allons construire la médiatrice du segment, perpendiculaire à celui-ci et passant par son milieu. On active l'outil [Constructions]Médiatrice , puis on sélectionne le segment pour en construire la médiatrice.





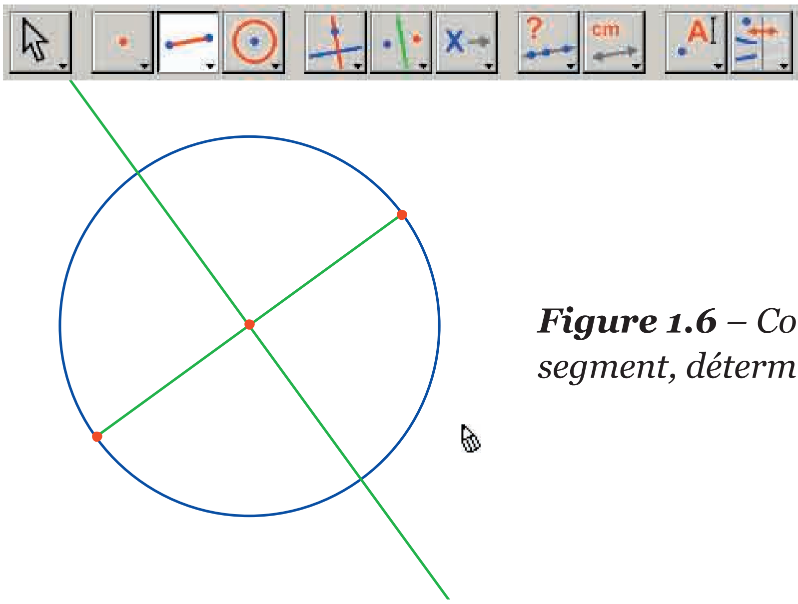
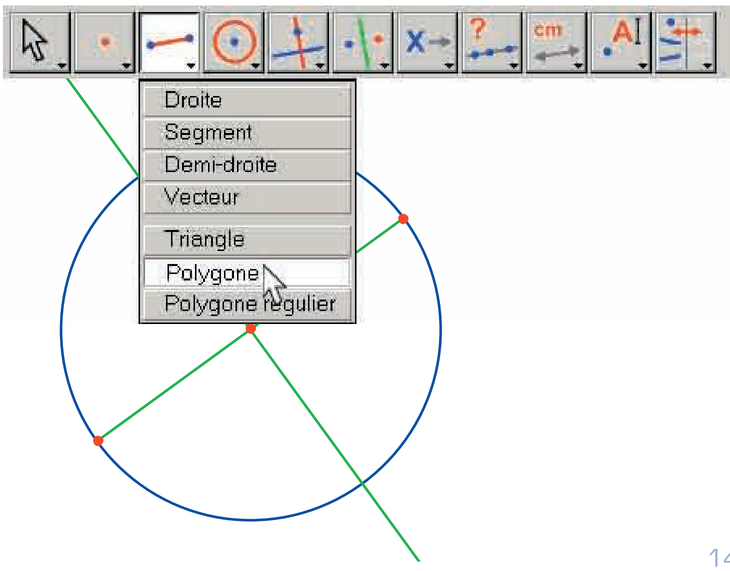
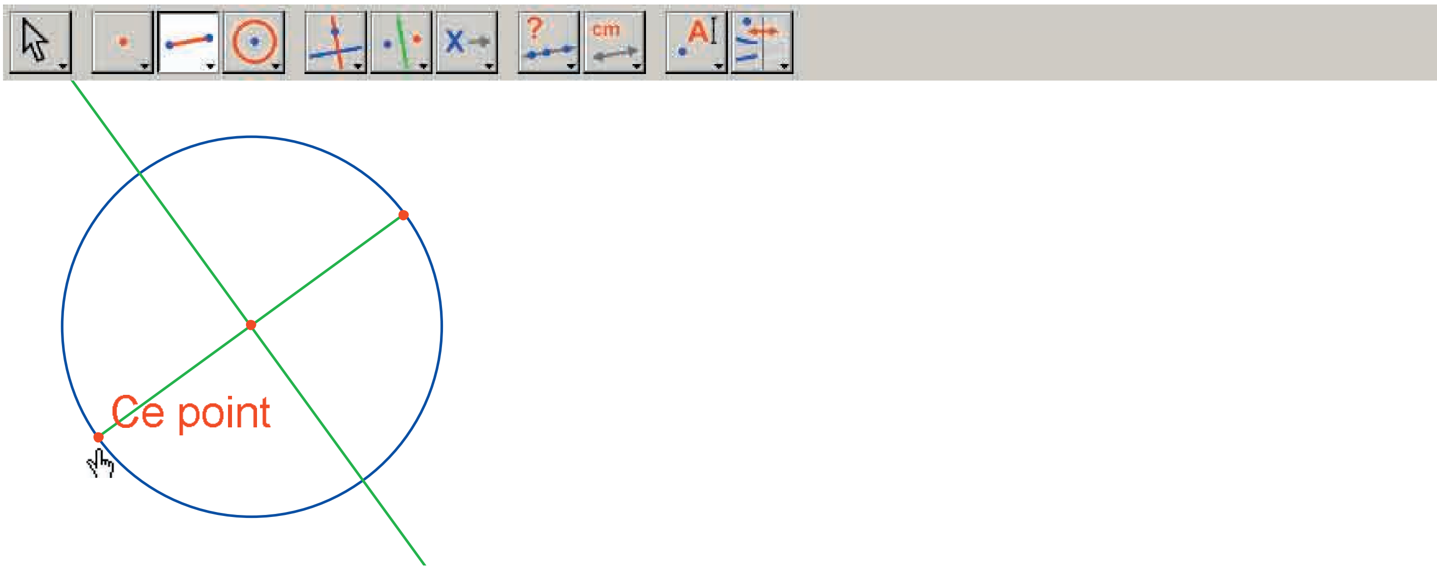


***Figure 1.6** – Construction de la médiatrice du segment, déterminant l'autre diagonale du carré.*

Pour achever la construction du carré, activons l'outil [Lignes]Polygone . Cet outil attend la sélection d'une séquence de points définissant un polygone quelconque. La saisie est terminée quand on sélectionne une nouvelle fois le point initial, ou en double-cliquant lors de la sélection du dernier point. Les deux points d'intersection du cercle et de la médiatrice ne sont pas encore explicitement construits, mais Cabri II Plus permet de les construire implicitement au moment de leur utilisation.





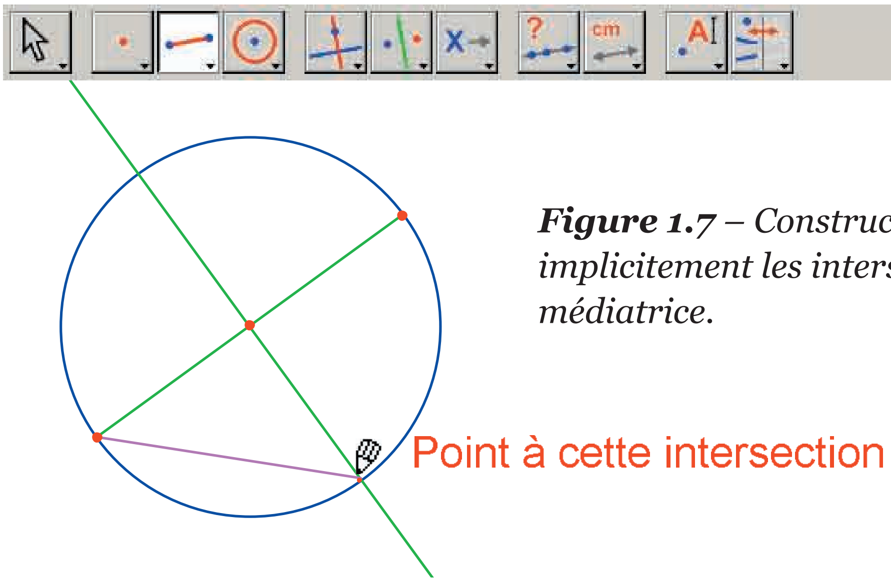


***Figure 1.7** – Construction du carré, en construisant implicitement les intersections entre le cercle et la médiatrice.*

On sélectionne donc une extrémité du segment (texte Ce point) comme premier sommet du polygone, puis on déplace le pointeur sur une des deux intersections entre le cercle et la médiatrice.

Le texte indique alors Point à cette intersection pour indiquer qu'un clic va construire le point d'intersection et en même temps le sélectionner comme sommet suivant du polygone. On sélectionne donc ce point, puis l'autre extrémité du segment, puis l'autre point d'intersection, et enfin on sélectionne de nouveau le point initial pour terminer la construction du carré.

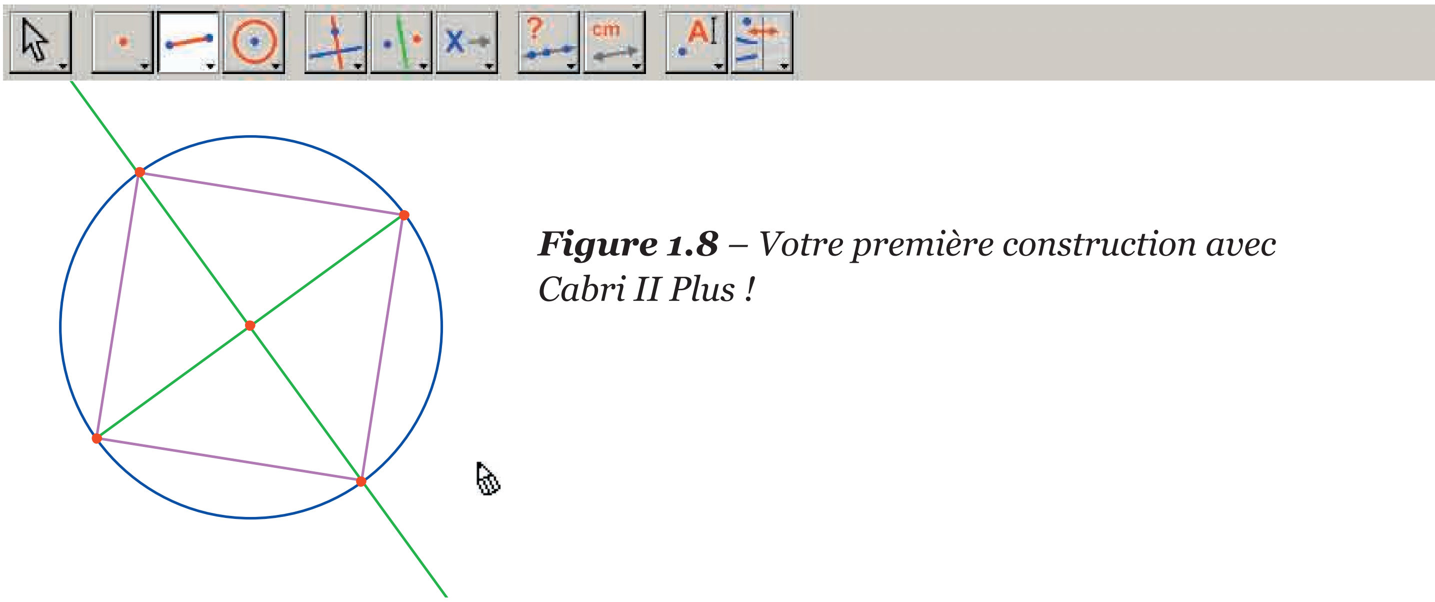


***Figure 1.8** – Votre première construction avec Cabri II Plus !*

CHAPITRE 2

DROITE D'EULER DU TRIANGLE

Construisons un triangle quelconque *ABC*, puis les trois médianes de ce triangle. Ce sont les droites joignant un sommet au milieu du côté opposé. On construira ensuite les trois hauteurs du triangle : les droites perpendiculaires à un côté et passant par le sommet opposé. Enfin, on construira les trois médiatrices des côtés du triangle : les droites perpendiculaires à un côté et passant par son milieu. Comme on le sait, les trois hauteurs, les trois médianes, et les trois médiatrices sont respectivement concourantes, et les points de concours sont alignés sur une droite, appelée droite d'*Euler*[1] du triangle.

Pour construire un triangle, on choisit l'outil [Lignes]Triangle . La manipulation de la barre d'outils est décrite dans la partie **[1] PRISE EN MAIN** de ce document.

L'outil [Lignes]Triangle activé, il suffit alors de créer trois nouveaux points dans la fenêtre, en cliquant dans des zones vides. On peut nommer les points juste après leur création «à la volée» simplement en tapant leur nom au clavier. Une fois le triangle construit, les noms peuvent être déplacés autour des points, par exemple pour les placer à l'extérieur du triangle.

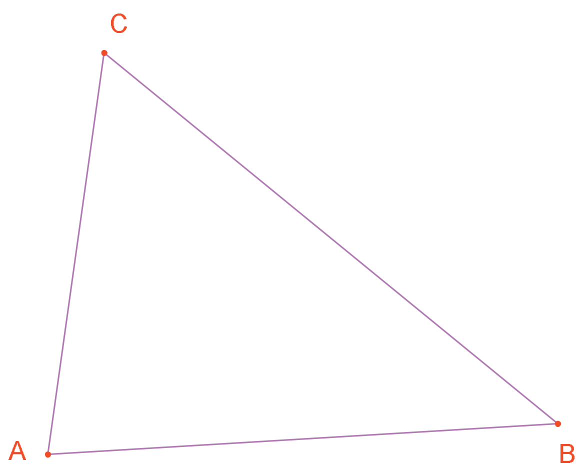


Figure 2.1 *– Triangle* ABC *construit avec l'outil [Lignes]Triangle. Les points sont nommés à la volée en tapant leur nom dès leur création.*

Pour déplacer le nom d'un objet, on utilise l'outil [Manipulation]Pointer en faisant glisser le nom (on clique et déplace le curseur en maintenant le bouton de la souris pressé). Pour changer le nom d'un objet, on active l'outil [Texte et Symboles]Nommer , puis on sélectionne le nom : une fenêtre d'édition apparaît pour effectuer les modifications. Les milieux sont construits grâce à l'outil [Constructions]Milieu . Pour construire le milieu de [*AB*], on sélectionnera

[1]*Léonard Euler, 1707-1783*

successivement A et B. Le milieu d'un segment ou d'un côté d'un polygone peut être construit également en cliquant directement sur le segment ou le côté. Le nouveau point peut être nommé à la volée, appelons-le C'. On procède de même pour les deux autres côtés en construisant le milieu A' de $[BC]$ et le milieu B' de $[CA]$.

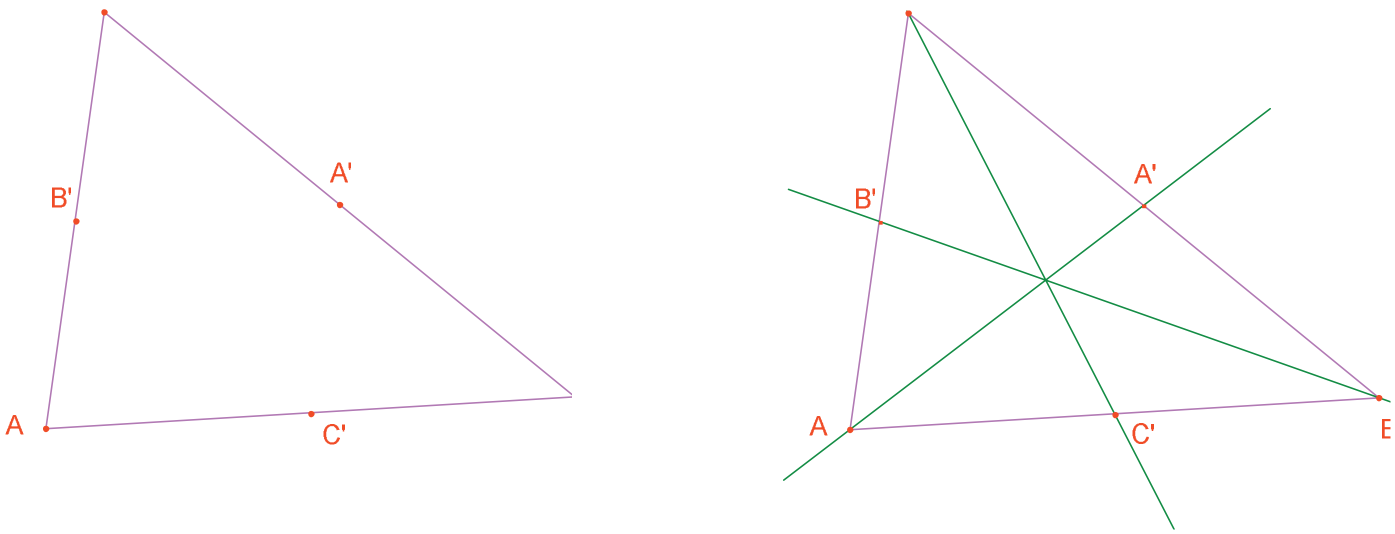


***Figure 2.2** – [À gauche] Les milieux sont construits avec l'outil [Constructions]Milieu, qui accepte soit deux sommets, soit un segment, soit encore le côté d'un polygone.*
[À droite] Les médianes sont construites à l'aide de l'outil [Lignes]Droite, et leur couleur est changée avec l'outil [Attributs]Couleur....

L'outil [Manipulation]Pointer permet de déplacer librement les objets de la figure, ici les trois points A, B et C. On voit que l'ensemble de la construction est mise à jour automatiquement lors du déplacement d'un de ces points. On peut ainsi explorer la construction dans de nombreuses configurations. Pour révéler les objets libres d'une figure, il suffit d'activer l'outil [Manipulation]Pointer puis de cliquer dans un espace vide de la feuille en maintenant le bouton de la souris enfoncé. Les objets libres se mettent alors à clignoter.

L'outil [Lignes]Droite permet de construire les trois médianes. Pour construire la droite (AA'), on désignera successivement A puis A'. L'outil [Attributs]Couleur... permet de changer la couleur des objets. On choisit la couleur dans la palette, puis on sélectionne les objets à colorer. Après avoir activé l'outil [Points]Point , approchons le pointeur du point d'intersection des trois médianes. En ce point, Cabri II Plus cherche à créer le point d'intersection de deux droites. Comme il y a ambiguïté (nous avons là trois droites concourantes), un menu apparaît permettant de choisir lesquelles des deux droites utiliser pour la construction du point. Lors du déplacement du pointeur sur les entrées du menu, la droite correspondante apparaît alors en pointillés clignotants. Après avoir sélectionné deux droites, le point d'intersection est créé. Nommons-le G «à la volée».

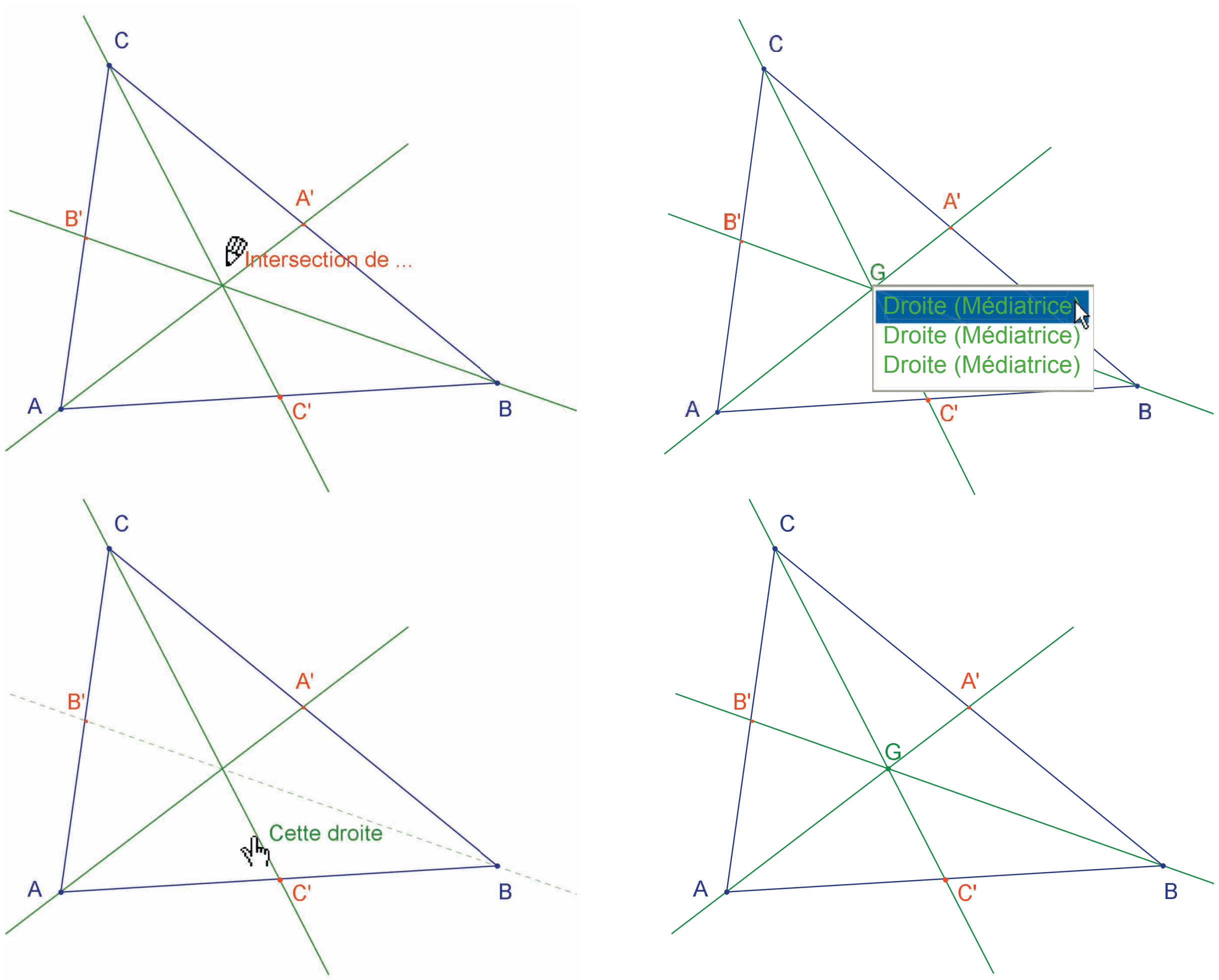
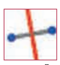


***Figure 2.3** – Construction du point d'intersection des médianes et résolution des ambiguïtés de sélection.*

Les hauteurs sont construites avec l'outil [Constructions]Droite perpendiculaire . Cet outil crée l'unique droite perpendiculaire à une direction donnée, passant par un point donné. Il nécessite la sélection d'un point et d'une droite, ou d'un segment, ou d'une demi-droite ou d'un côté de polygone. L'ordre de la sélection n'a pas d'importance. Pour construire la hauteur issue de A, on sélectionnera donc A, et le côté $[BC]$. On fait de même pour les hauteurs issues de B et de C. De la même façon que pour les médianes, on choisira une couleur pour les hauteurs, et on construira leur point d'intersection H.

L'outil [Constructions]Médiatrice  permet de construire la médiatrice de deux points, d'un segment ou d'un côté de polygone. Il suffit de sélectionner le segment ou ses extrémités. On notera O le point d'intersection des trois médiatrices.

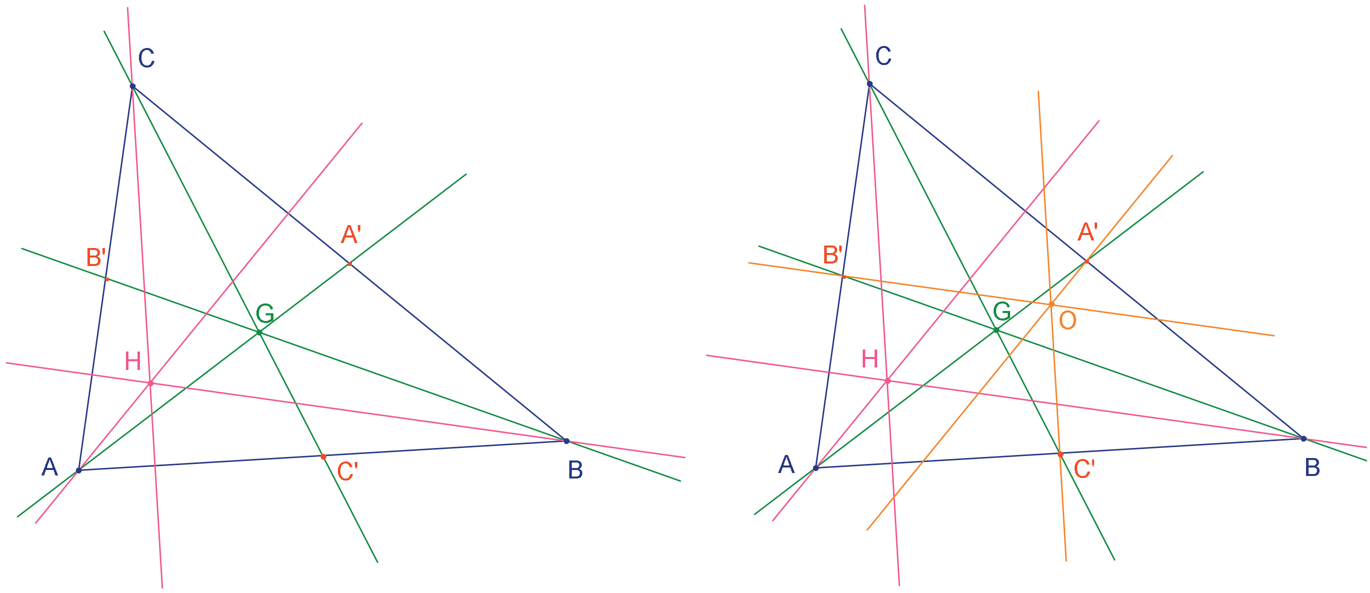


Figure 2.4 *– [À gauche] Les hauteurs sont construites à l'aide de l'outil [Constructions]Droite Perpendiculaire.*
[À droite] Finalement, les médiatrices sont construites à l'aide de l'outil [Constructions] Médiatrice.

L'outil [Propriétés]Alignés ? nous donne la possibilité de vérifier si les trois points *O*, *H*, et *G* sont alignés. On sélectionne successivement ces points, puis on désigne un emplacement sur la feuille pour déposer le résultat. Le résultat est un texte indiquant si les points sont ou non alignés.

Quand la figure est manipulée, ce texte est mis à jour en même temps que les autres éléments de la figure.

Avec l'outil [Lignes]Droite , on construit la droite d'*Euler* du triangle qui passe par les trois points *O*, *H*, et *G*, en sélectionnant par exemple *O* et *H*. L'outil [Attributs]Épaisseur... sera utilisé pour mettre en valeur cette droite.

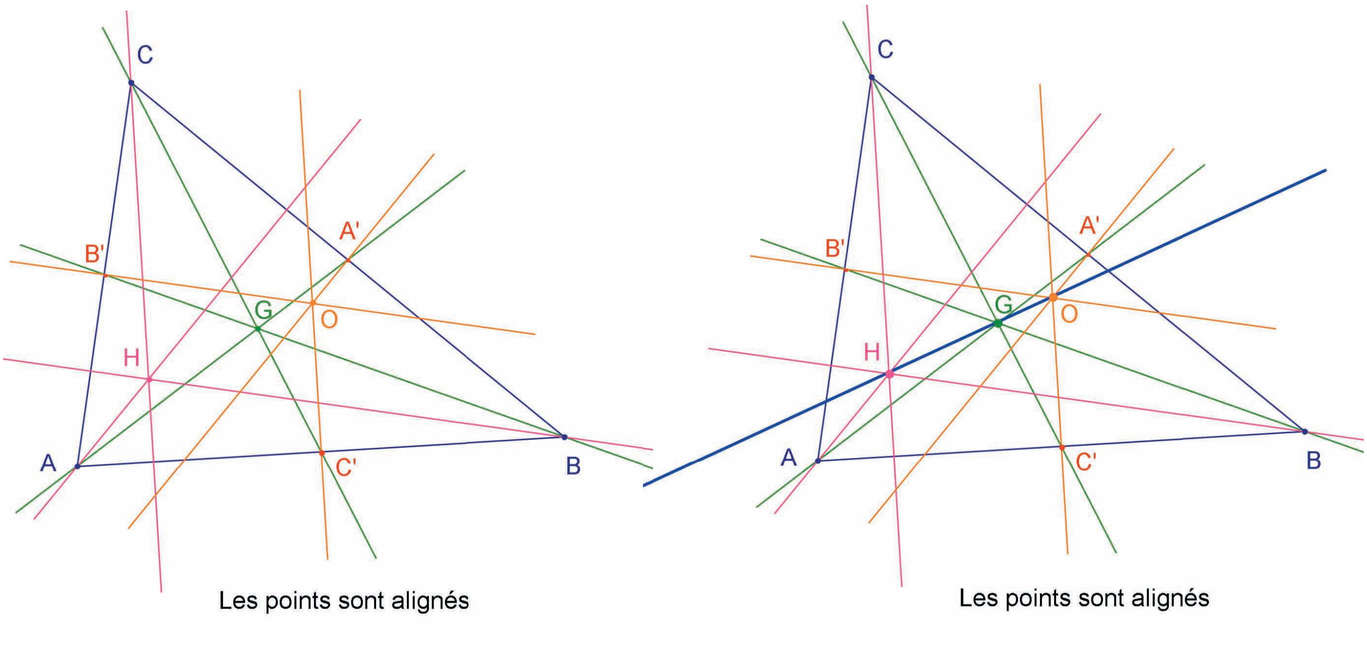


***Figure 2.5** – [À gauche] Vérification de l'alignement des trois points* O, H, *et* G. *L'outil [Propriétés]Alignés ? construit un texte Les points sont alignés ou Les points ne sont pas alignés selon l'état courant de la figure.*
[À droite] La droite d'Euler du triangle, mise en évidence par son épaisseur, modifiée avec l'outil [Attributs]Épaisseur….

On constate en manipulant la figure que le point *G* semble rester entre *O* et *H*, et même que sa position relative sur le segment [*OH*] ne change pas. Vérifions-le en mesurant les longueurs *GO* et *GH*. Activons l'outil [Mesure]Distance ou Longueur cm. Cet outil permet de mesurer la distance entre deux points, ou la longueur d'un segment, selon les objets sélectionnés. Sélectionnons donc *G* puis *O*; la distance *GO* apparaît, mesurée en cm. On fait de même pour *GH*. Une fois la mesure effectuée, on peut éditer le texte correspondant, par exemple en ajoutant les caractères «*GO=*» devant le nombre.

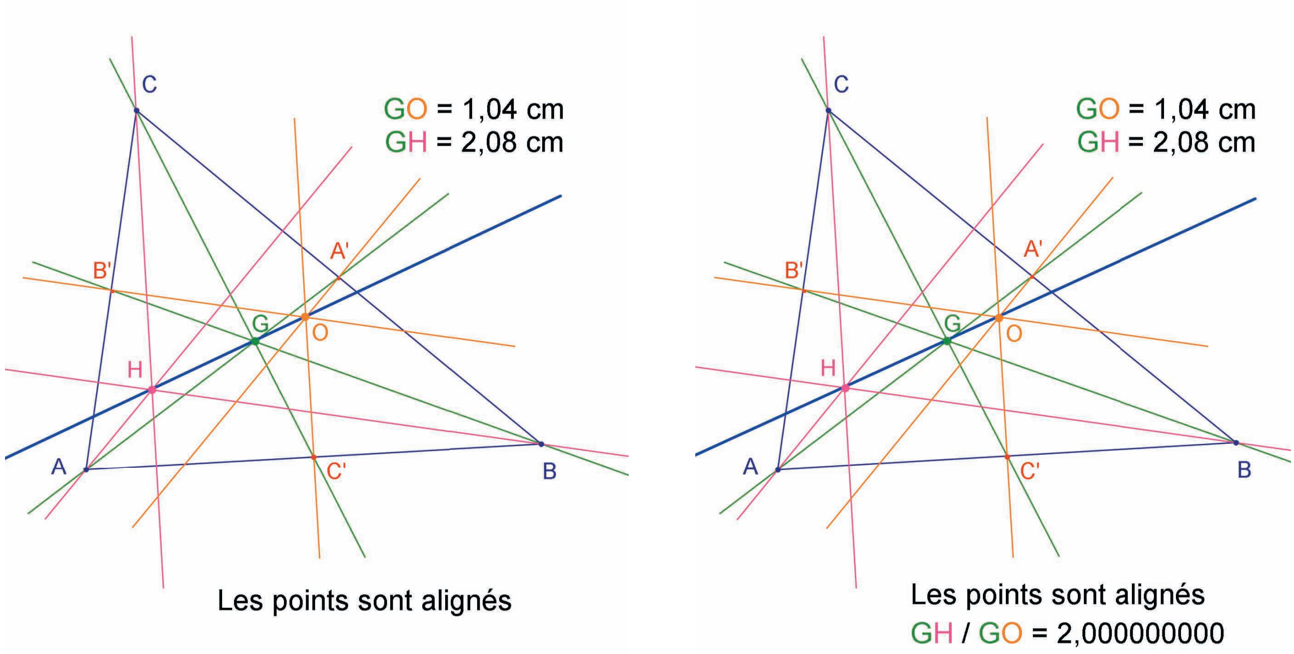
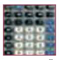
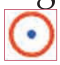


***Figure 2.6** – [À gauche] L'outil* [Mesure]Distance ou Longueur *permet d'obtenir les distances* GO *et* GH.
[À droite] À l'aide de la calculatrice – outil [Mesure]Calculatrice... *– on calcule le rapport* GH/GO *et on vérifie numériquement qu'il est égal à 2.*

En déplaçant la figure, on voit que *GH* semble rester le double de *GO*. Nous allons calculer le rapport *GH*/*GO* pour le vérifier. Activons l'outil [Mesure]Calculatrice... . On sélectionne alors la distance *GH*, puis l'opérateur / (la barre de division), et la distance *GO*. On clique sur le bouton = pour obtenir le résultat, que l'on peut glisser-déposer sur la feuille. Quand un nombre est sélectionné (outil [Manipulation]Pointer ), on peut augmenter et diminuer le nombre de décimales affichées à l'aide des touches + et -. On affiche ainsi le rapport avec une dizaine de chiffres après la virgule, pour constater qu'il reste égal à 2.

Exercice 1 - Compléter la figure en construisant le cercle circonscrit au triangle (centré en *O* et passant par *A*, *B* et *C*). On utilisera l'outil [Courbes]Cercle .

Exercice 2 - Construire ensuite le «cercle des neuf points» du triangle. Il s'agit du cercle centré au milieu de [*OH*] et passant par les milieux *A′*, *B′* et *C′* des côtés, les pieds des hauteurs, et les milieux des segments [*HA*], [*HB*], et [*HC*].

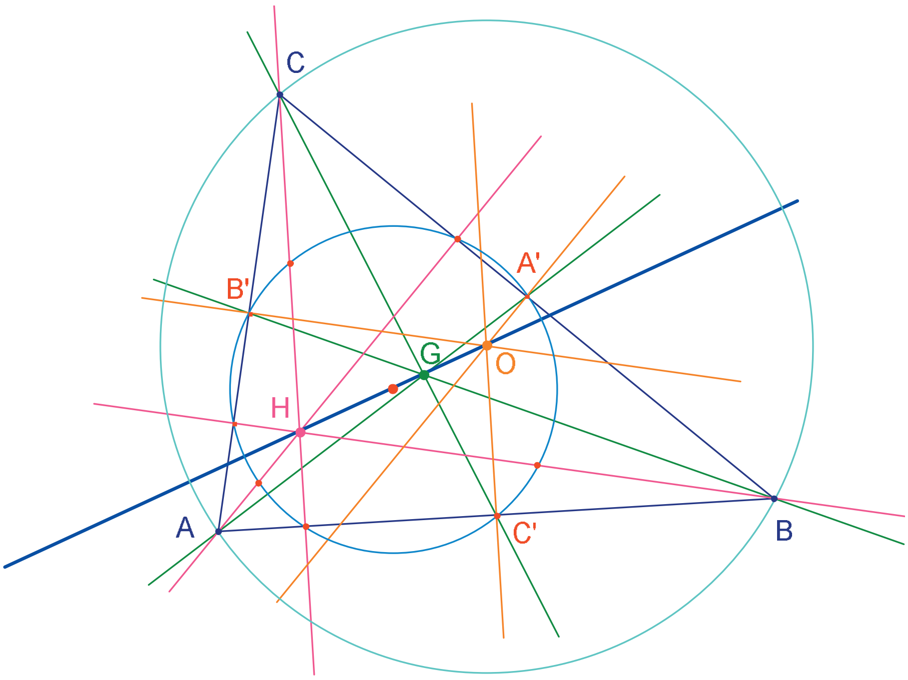


***Figure 2.7** – La figure finale, avec le cercle circonscrit au triangle et le «cercle des neuf points» du triangle.*

CHAPITRE 3

LA QUÊTE DU POINT MYSTERIEUX

Dans ce chapitre, nous présentons une activité mettant en œuvre les possibilités d'exploration offertes par Cabri II Plus. À partir de trois points *A*, *B*, *C* donnés, nous allons rechercher les points *M* vérifiant l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

Construisons quatre points quelconques avec l'outil [Points]Point, en les nommant *A*, *B*, *C*, *M* «à la volée», c'est-à-dire en tapant leur nom au clavier juste après leur création. Cabri II Plus permet de créer des vecteurs. Chaque vecteur est, classiquement, représenté par un segment fléché. Construisons maintenant un représentant du vecteur $\overrightarrow{MA}$ avec l'outil [Lignes]Vecteur, en sélectionnant d'abord *M* puis *A*. Ce représentant a son origine en *M*. On fait de même pour $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$.

Construisons alors un représentant de la somme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ en activant l'outil [Constructions]Somme de deux Vecteurs puis en sélectionnant les deux vecteurs puis l'origine du représentant de la somme; ici nous choisirons *M*. Appelons *N* l'extrémité de ce représentant.

On construit enfin un représentant de la somme des trois vecteurs avec *M* comme origine de la même façon, en sommant $\overrightarrow{MN}$ (égal à $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$) et $\overrightarrow{MC}$. Appelons *P* l'extrémité de ce représentant.

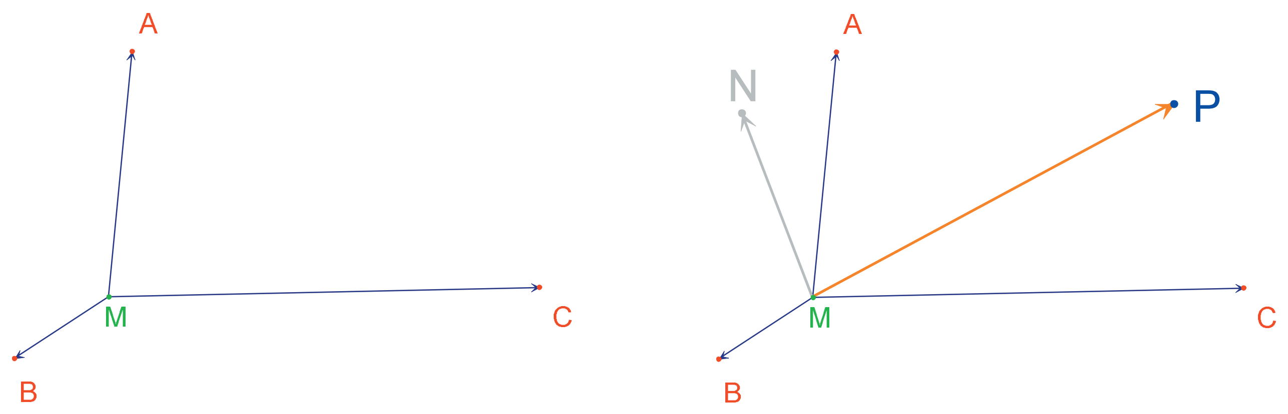


Figure 3.1 *– [À gauche] À partir de trois points quelconques* A, B, *et* C *et d'un point* M, *on construit les vecteurs* $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, *et* $\overrightarrow{MC}$.
[À droite] À l'aide de l'outil [Constructions]Somme de deux Vecteurs, on construit $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, *et* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Nous pouvons maintenant rechercher les solutions du problème par manipulation. Pour ce faire, on active l'outil [Manipulation]Pointer et on déplace le point *M*. La somme des trois vecteurs est mise à jour à chaque instant lors du déplacement.

En fonction de la position de *M* par rapport aux points *A*, *B*, et *C*, on observe la norme et l'orientation du vecteur $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. On peut alors faire les conjectures suivantes (entre autres) :

• Une unique position de *M* permet d'annuler la somme des trois vecteurs : le problème a une unique solution. Cette solution est à l'intérieur du triangle *ABC*.

• Le quadrilatère *MANB* est un parallélogramme.

• Le quadrilatère *MCPN* est un parallélogramme.

• Pour que la somme soit nulle, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MC}$ doivent être colinéaires, de mêmes normes et de sens contraires, c'est à dire opposés.

• (*MP*) passe toujours par un même point, et ce point est la solution du problème.

• L'extrémité *P* du représentant de la somme est un point dépendant de *M*. On définit donc ainsi une transformation, qui associe *P* à *M*. La solution du problème est un point invariant de cette transformation.

Suivant les constatations faites, la recherche s'orientera dans l'une ou l'autre direction.

Supposons par exemple avoir observé que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MC}$ doivent être opposés. On se pose alors un autre problème : pour quelles positions de *M* ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ? Déplaçons *M* de telle sorte que les deux vecteurs soient colinéaires. On observe que *M* parcourt une droite, et que cette droite passe par *C* et également par le milieu de [*AB*]. Cette droite est donc la médiane en *C* du triangle. *A*, *B* et *C* jouant des rôles symétriques, le point est aussi sur les deux autres médianes et donc finalement à l'intersection des trois médianes.

Pour une activité en classe, il resterait encore aux élèves à proposer une construction du point solution, et à démontrer cette conjecture élaborée par exploration.

Le pouvoir de conviction d'une construction dynamique est beaucoup plus élevé que celui d'une figure statique réalisée sur une feuille de papier. En effet, il suffit de la manipuler pour vérifier la conjecture dans un grand nombre de cas. Une conjecture qui reste valide après manipulation sera correcte dans la très grande majorité des cas.

Pour une meilleure utilisation en classe, il sera intéressant d'aborder ces points avec les élèves (entre autres) :

- Une construction dynamique visuellement correcte est-elle correcte ?

- Une construction dynamique correcte constitue-t-elle une réponse au problème ?

- A quel moment un raisonnement peut être qualifié de démonstration ?

- Que manque-t-il à une construction dynamique correcte pour en faire une démonstration ?

- La démonstration doit-elle être basée sur le processus d'élaboration de la figure ?

Exercice 3 - Étendre le problème à quatre points, en recherchant les points *M* tels que :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 0$$

Exercice 4 - Énumérer l'ensemble des «chemins d'exploration» et des démonstrations pour le problème initial (trois points) accessibles à un élève de Seconde.

Exercice 5 - Étudier et construire le point M minimisant la somme ($MA+MB+MC$) des distances à trois points A, B, C donnés. Il s'agit du point de *Fermat*[1] du triangle ABC.

[1]*Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

LE QUADRILATÈRE DE VARIGNON

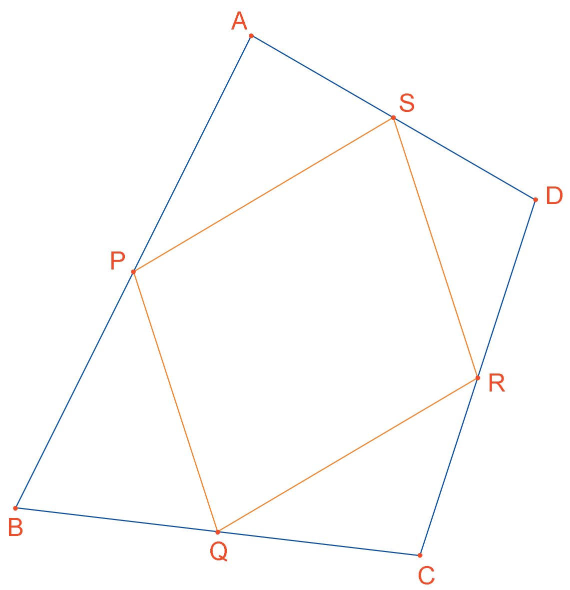
Dans ce chapitre, nous présentons quelques constructions autour du théorème de *Varignon*[1].

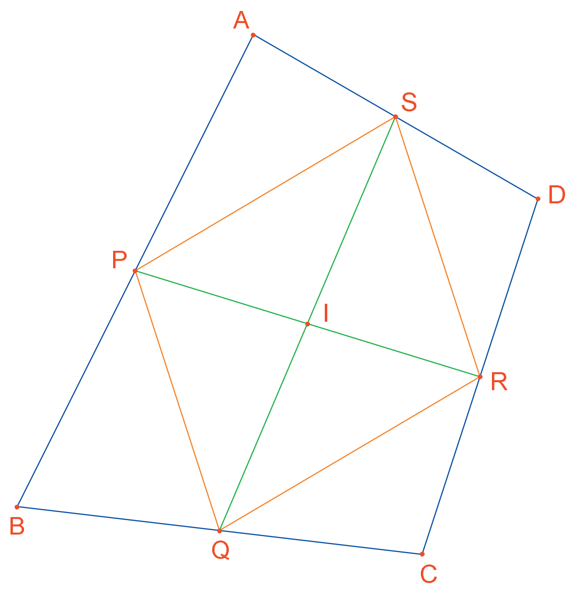
Construisons un quadrilatère quelconque *ABCD*. On active l'outil [Lignes]Polygone, puis on sélectionne quatre points, nommés *A*, *B*, *C* et *D* «à la volée». Pour terminer le polygone, on resélectionne *A* après avoir construit *D*.

On construit ensuite les milieux *P* de [*AB*], *Q* de [*BC*], *R* de [*CD*], et *S* de [*DA*] avec l'outil [Constructions]Milieu. Cet outil attend la sélection de *A* puis *B* pour construire le milieu de [*AB*]. On peut également sélectionner directement le segment [*AB*] s'il existe déjà, que ce soit en tant que segment, ou en tant que côté d'un polygone comme c'est le cas ici.

On construit enfin le quadrilatère *PQRS* avec l'outil [Lignes]Polygone.

En manipulant la construction, avec l'outil [Manipulation]Pointer, on observe que *PQRS* semble toujours être un parallélogramme. Nous allons interroger Cabri II Plus sur le parallélisme de [*PQ*] et [*RS*], ainsi que de [*PS*] et [*QR*], en utilisant l'outil [Propriétés]Parallèle ?. On sélectionne les côtés [*PQ*] puis [*RS*], et un texte s'affiche, confirmant que les deux côtés sont parallèles. On vérifie de même que [*PS*] et [*QR*] sont parallèles.





[1]*Pierre Varignon, 1654-1722*

Figure 4.1 *– [À gauche] À partir d'un quadrilatère quelconque ABCD, on construit le quadrilatère PQRS dont les sommets sont les milieux des côtés de ABCD.*
[À droite] Construction des diagonales de PQRS, dont on montre qu'elles se coupent en leur milieu.

Construisons donc les deux diagonales [*PR*] et [*QS*] à l'aide de l'outil [Lignes] Segment, et leur point d'intersection *I* avec l'outil [Points]Point. Il existe plusieurs façons de démontrer que *I* est milieu de [*PR*] et également de [*QS*], et donc que *PQRS* est un parallélogramme. Par exemple avec un calcul barycentrique : *P* est le barycentre de {(*A*,1), (*B*,1)} et *R* de {(*C*,1), (*D*,1)}, et donc le milieu de [*PR*] est le barycentre de {(*A*,1), (*B*,1), (*C*,1), (*D*,1)}, et il en va de même pour le milieu de [*QS*]. Donc les deux milieux sont confondus en un point : le point d'intersection *I*.

Le ***théorème de Varignon*** est le suivant : le quadrilatère *PQRS* construit à partir des milieux d'un quadrilatère *ABCD* quelconque est un parallélogramme, et son aire est la moitié de celle de *ABCD*.

Exercice 6 - Nous avons établi ci-dessus la première partie du théorème. Démontrer la seconde partie relative à l'aire de *PQRS*. On pourra s'aider de la ***figure 4.2***.

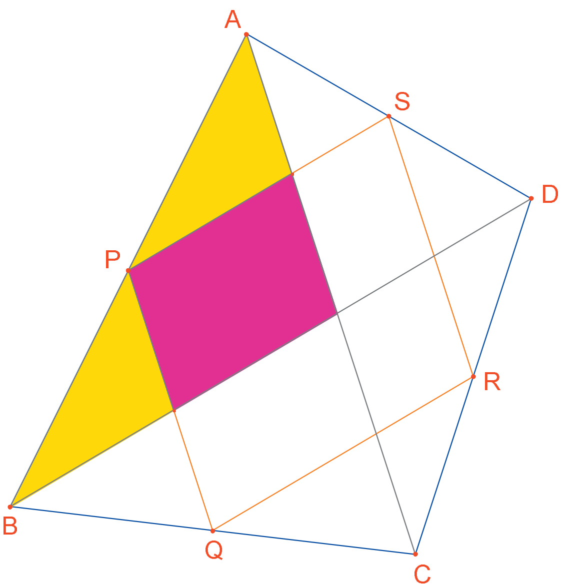


Figure 4.2 *– Construction permettant d'établir la seconde partie du théorème*

Laissons maintenant *A*, *B*, et *C* fixes, et déplaçons *D* de façon à rendre *PQRS* rectangle. Comme nous savons déjà que c'est un parallélogramme, il suffit qu'un de ses angles soit droit pour pouvoir affirmer que c'est un rectangle. Mesurons donc l'angle en *P*, à l'aide de l'outil [Mesure]Mesure d'Angle. Cet outil attend la sélection de trois points définissant un angle, le sommet étant le second point. Par exemple ici on sélectionnera les points *S*, *P* (le sommet de l'angle) et *Q*.

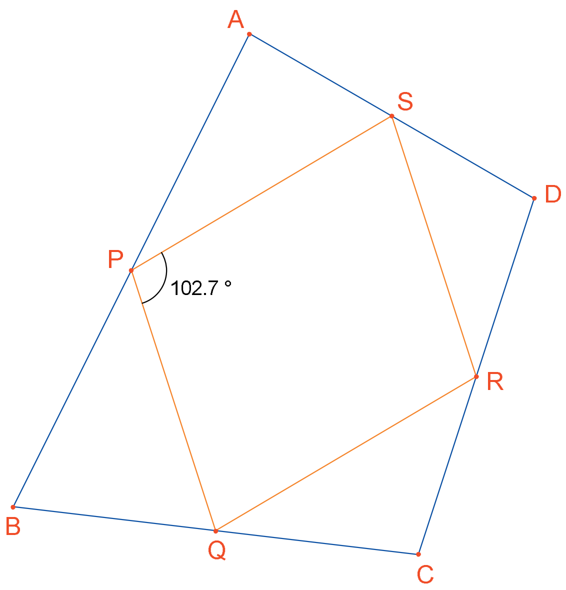


Figure 4.3 *– On mesure l'angle en* P *du parallélogramme* PQRS.

L'outil [Mesure]Mesure d'Angle peut également fournir la mesure d'un angle préalablement marqué avec l'outil [Texte et Symboles]Marquer un Angle . Cet outil attend trois points définissant l'angle, dans le même ordre que pour l'outil [Mesure]Mesure d'Angle .

En déplaçant *D* de manière à ce que *PQRS* soit un rectangle, les solutions trouvées semblent sensiblement alignées. En fait, si on construit les diagonales [*AC*] et [*BD*] du quadrilatère initial, on voit que les côtés de *PQRS* sont parallèles à ces diagonales, et donc que *PQRS* n'est un rectangle que, si et seulement si, [*AC*] et [*BD*] sont perpendiculaires. Nous allons maintenant redéfinir *D* pour que *PQRS* soit toujours un rectangle. Traçons la droite (*AC*) avec l'outil [Lignes]Droite en sélectionnant *A* et *C*, puis la perpendiculaire à cette droite passant par *B*, avec l'outil [Constructions]Droite Perpendiculaire en sélectionnant *B* et la droite (*AC*).

D est actuellement un point libre dans le plan. Nous allons modifier sa définition, et en faire un point libre sur la perpendiculaire à [*AC*] qui passe par *B*. On active l'outil [Constructions]Redéfinir un Objet , puis on sélectionne *D*. Un menu apparaît indiquant les différentes options de redéfinition pour *D*. On choisit Point sur un objet, puis on sélectionne un point sur la perpendiculaire. *D* se déplace alors en ce point, et est désormais contraint à rester sur la droite. La redéfinition est un moyen d'exploration très puissant, qui permet d'enlever ou d'ajouter des degrés de liberté aux éléments d'une figure sans avoir à la recréer entièrement.

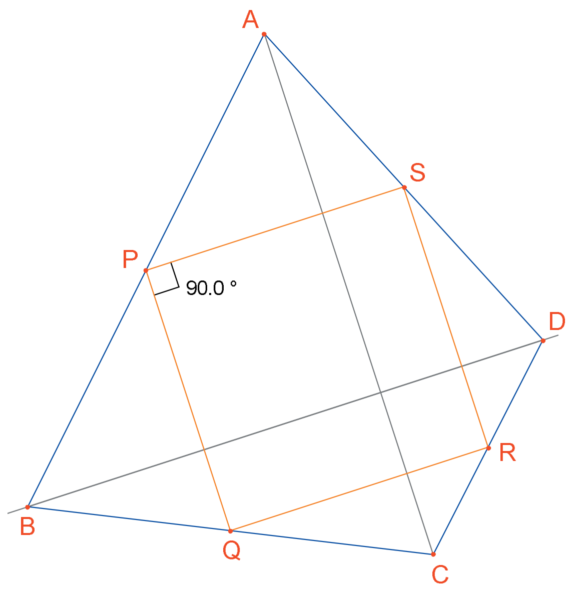


Figure 4.4 – *Le point* D *est maintenant redéfini de telle sorte que* PQRS *soit toujours un rectangle. Ce point conserve encore un degré de liberté; il est mobile sur une droite.*

Exercice 7 - Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que *PQRS* soit un carré. Redéfinir une nouvelle fois *D* pour que la construction ne fournisse que des carrés.

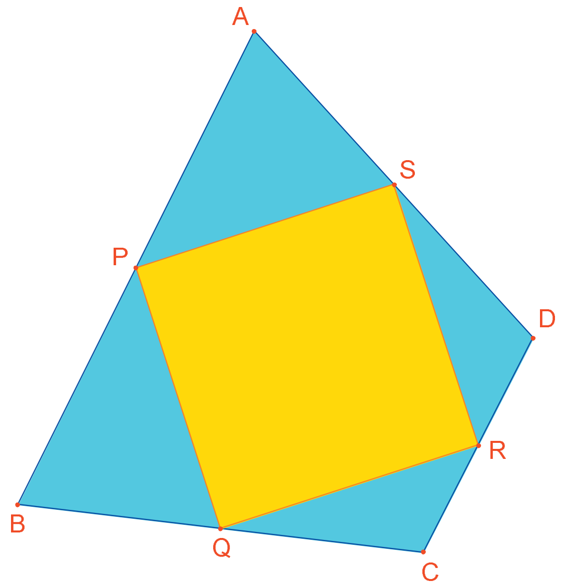


Figure 4.5 – *Ici, le point* D *n'a plus aucun degré de liberté, et* PQRS *est maintenant toujours un carré.*