

CABRI[®] II Plus



Créateur d'Outils Mathématiques

APPROFONDISSEMENT

BIENVENUE !

Bienvenue dans la partie **Approfondissement** du manuel d'utilisation de Cabri II Plus.

Cette section, divisée en trois chapitres, présente des problèmes mathématiques de niveau supérieur qui les rendent, grâce à l'utilisation de Cabri II Plus, ludiques à explorer et simples à résoudre. Ces problèmes viennent en complément du Tutoriel pour les utilisateurs désireux de poursuivre la découverte du logiciel.

Ces exercices sont conçus pour le niveau secondaire et universitaire. Ils sont indépendants les uns des autres, aussi, le lecteur est invité à s'inspirer des méthodes de constructions et faire les exercices correspondants. Les exercices marqués d'un astérisque ont un degré de difficulté plus important.

TABLE DES MATIÈRES

APPROFONDISSEMENT

CHAPITRE 1

TRIANGLES PODAIRES

P 4

CHAPITRE 2

FONCTIONS






P 9




CHAPITRE 3

PAVAGES

P 14

TRIANGLES PODAIRES

Soient trois points quelconques A , B et C , construits avec l'outil [Points]Point . On construit tout d'abord les trois droites (AB) , (BC) et (CA) , avec l'outil [Lignes]Droite . Soit maintenant un point quelconque du plan M et les projetés orthogonaux respectifs C' , A' et B' de M sur ces trois droites. Ces points sont obtenus en construisant les droites perpendiculaires à (AB) , (BC) et (CA) passant par M , à l'aide de l'outil [Constructions]Droite Perpendiculaire , puis en créant les points d'intersections de chacune de ces droites avec la perpendiculaire correspondante, à l'aide de l'outil [Points]Point . L'outil [Points]Point  permet de construire implicitement les intersections entre objets. Il suffit de déplacer le curseur près d'une intersection et le programme affiche **Point à cette intersection**, ou **Intersection de...** puis un menu en cas d'ambiguïté.

Les trois points A' , B' et C' définissent un triangle que l'on va tracer en utilisant l'outil [Lignes]Triangle . C'est un triangle podaire relatif à ABC . On peut colorier l'intérieur du triangle avec l'outil [Attributs]Remplir . On s'intéresse à l'aire de ce triangle en fonction de la position du point M . L'aire du triangle est obtenue avec l'outil [Mesure]Aire . Cet outil fournit une aire «géométrique» toujours positive, ne tenant pas compte de l'orientation du triangle. On obtient une mesure en cm^2 que l'on peut placer librement sur la feuille. Le menu contextuel obtenu par un clic-droit sur le nombre permet l'affichage de l'aire «algébrique», dont le signe dépend de l'orientation du triangle.

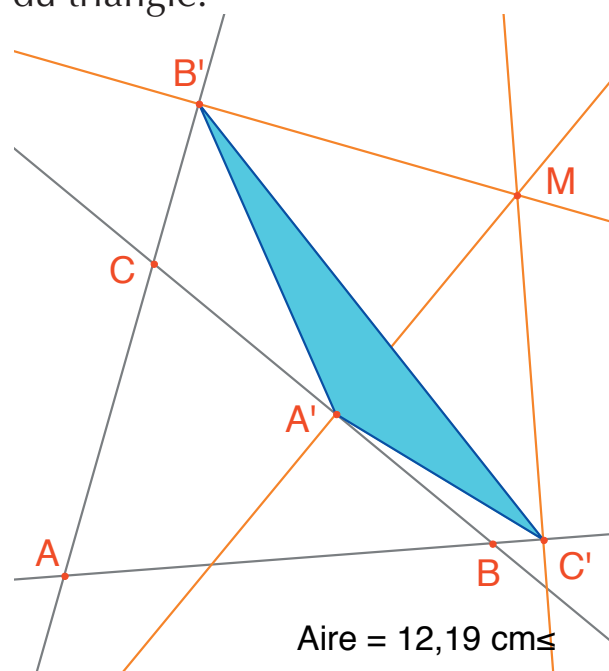





Figure 1.1 - Le triangle podaire correspondant à M , et son aire.

Nous allons étudier la variation de l'aire de $A'B'C'$ en fonction de la position de M . Pour ce faire, il existe plusieurs stratégies. On peut par exemple activer la trace du point M (outil [Texte et Symboles]Trace ) , puis le déplacer en tentant de garder l'aire de $A'B'C'$ constante. Les positions successives de M resteront affichées et on aura ainsi l'aspect général d'une courbe de niveau de la fonction qui renvoie l'aire de $A'B'C'$. Une autre stratégie consiste à utiliser les lieux de points sur une grille pour dessiner une représentation visuelle de l'aire de $A'B'C'$ pour un grand nombre de positions de M .

Ici, nous adopterons cette stratégie et allons tracer le cercle centré en M ayant une aire proportionnelle à celle de $A'B'C'$. Pour ce faire, il faut d'abord calculer le rayon du cercle, proportionnel à la racine carrée de l'aire du triangle. Activons l'outil [Mesure]Calculatrice  et entrons l'expression `sqrt(` puis sélectionnons le nombre représentant l'aire du triangle pour l'inclure dans l'expression, qui devient `sqrt(a`. Fermons ensuite la parenthèse et divisons par 10 pour éviter d'avoir des cercles trop grands. L'expression dans la calculatrice est maintenant `sqrt(a)/10`. On l'évalue en cliquant sur le bouton `=`, puis on effectue un glisser-déposer du résultat pour le placer sur la feuille.

Pour tracer un cercle centré en M et ayant le rayon calculé précédemment, on active l'outil [Constructions]Compas . On sélectionne le nombre précédemment placé sur la feuille, puis le point M . On obtient alors le cercle centré en M avec le rayon recherché. On peut déjà observer visuellement l'évolution de l'aire du triangle en fonction de la position de M .

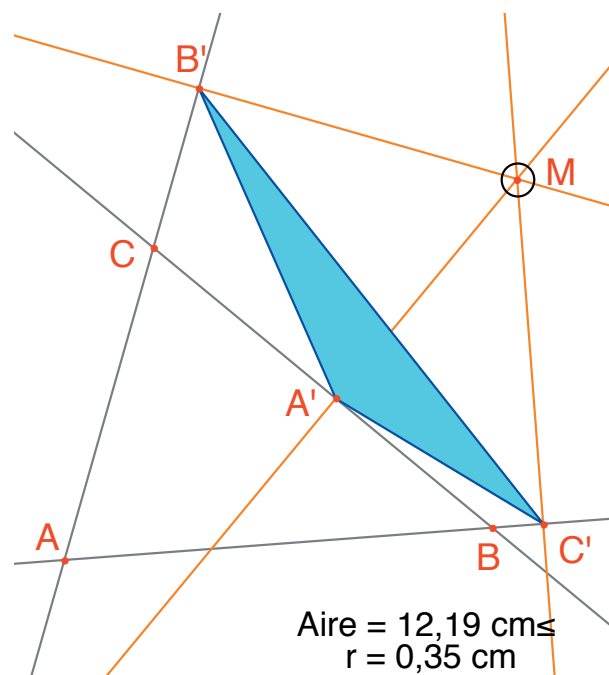




Figure 1.2 - On dessine un cercle centré en M d'aire proportionnelle à celle de $A'B'C'$.

Nous allons maintenant définir une grille, puis redéfinir M comme point sur cette grille, et enfin tracer tous les cercles représentant l'aire du triangle podaire pour M parcourant tous les points de la grille. Pour définir une grille, il faut un système d'axes. Nous allons prendre les axes par défaut présents dans toute figure. On les rend visibles en choisissant l'option [Attributs]Montrer les Axes . Ensuite, on active l'outil [Attributs]Grille  et on sélectionne les axes. Une grille de points apparaît.

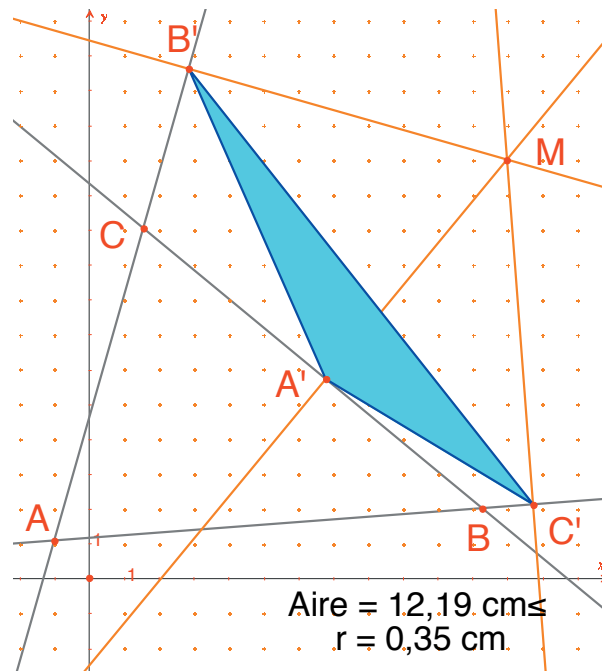




Figure 1.3 - On construit une grille à partir des axes par défaut de la figure, puis on redéfinit M comme point libre sur la grille.

Le point M est un point libre dans le plan; nous allons le redéfinir pour le contraindre à rester sur la grille. Activons l'outil [Constructions]Redéfinir un Objet , puis sélectionnons M , choisissons l'option Point sur un objet dans le menu qui apparaît alors, puis sélectionnons un point de la grille. Le point M est maintenant contraint à ne se déplacer que sur la grille.

L'outil [Constructions]Lieu  permet de construire l'ensemble des cercles obtenus en déplaçant M sur toute la grille. On sélectionne le cercle puis le point M , pour obtenir le lieu des cercles quand M varie sur la grille.

On démontre (voir par exemple la *Géométrie* de Marcel Berger, éditions CEDIC, item 10.4.5) que les courbes valeur de niveau de l'aire du triangle podaire sont des cercles dont le centre est le même que celui du cercle circonscrit à ABC . En particulier, l'aire du triangle $A'B'C'$ est nulle si M est sur le cercle circonscrit à ABC , ou encore, de façon équivalente, les points A' , B' et C' sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC .

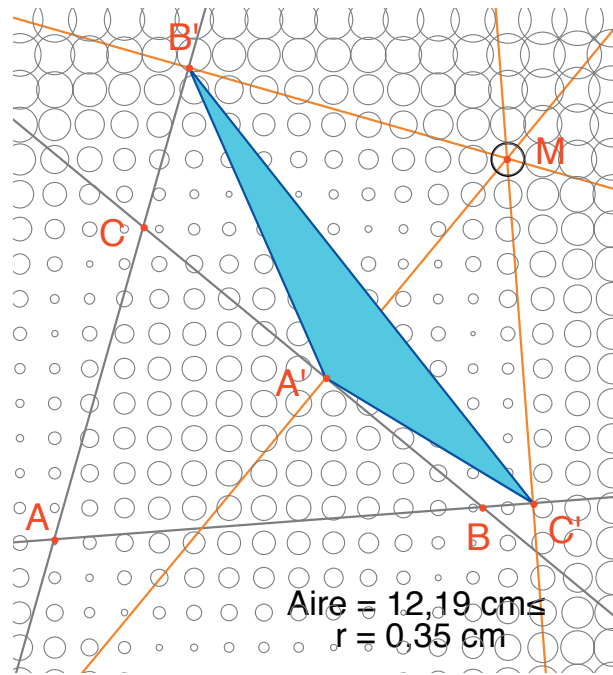




Figure 1.4 - Répartition de l'aire du triangle podaire en fonction de la position de M .

Exercice 1 - Pour M sur le cercle circonscrit au triangle ABC , les trois points A' , B' et C' sont donc alignés et la droite passant par A' , B' , C' s'appelle droite de *Simson*¹ ou droite de *Wallace*² associée au point M .

Ce résultat ayant été longtemps attribué à tort à *Simson*, a été en fait publié par *Wallace* en 1799. Construire l'enveloppe des droites de *Simson* (utiliser l'outil [\[Constructions\]Lieu](#) ). Par défaut, cet outil fournit, dans le cas des droites, non pas l'ensemble des droites, mais son enveloppe. Cette courbe, invariante par une rotation d'angle 120° , s'appelle une deltoïde, car elle a la forme de la lettre Δ : c'est la deltoïde de *Steiner*³. Elle est tangente aux trois droites (AB) , (BC) , (CA) . C'est une courbe algébrique de degré 4. Vous pouvez le vérifier en demandant son équation à l'aide de l'outil [\[Mesure\]Coordonnées ou Équation](#) .

Exercice 2 - Pour la deltoïde de l'exercice précédent, construire le centre, les trois points de tangence avec les trois droites, les trois sommets de la courbe, ainsi que le plus grand cercle inscrit dans la courbe.

¹ Robert Simson, 1687-1768

² William Wallace, 1768-1843

³ Jakob Steiner, 1796-1863

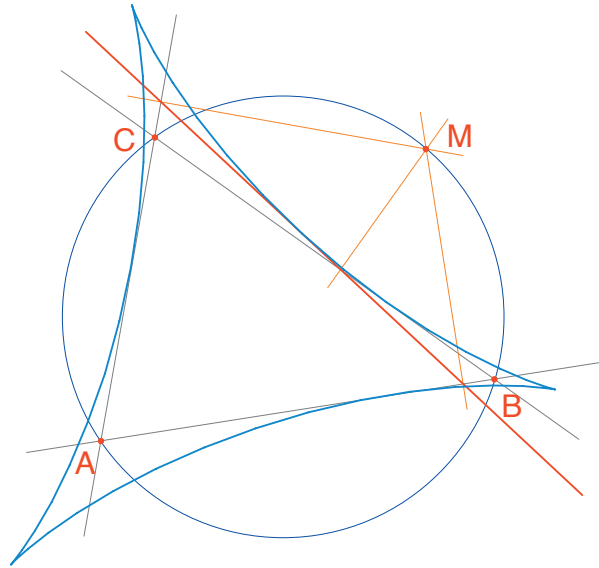







Figure 1.5 - L'enveloppe des droites de Simson d'un triangle ABC est appelée une deltoïde. Elle possède les mêmes symétries qu'un triangle équilatéral.

Grâce à son système d'axes et à l'outil expression, Cabri II Plus permet de construire facilement le graphe d'une fonction, et d'utiliser ce graphe pour l'étudier. Nous allons étudier dans ce chapitre une fonction polynomiale de degré 3.

$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

Tout d'abord, rendons visibles les axes de coordonnées, avec [Attributs]Montrer les Axes . Ensuite, créons l'expression correspondante sur la feuille. Une expression déposée sur la feuille peut ensuite être calculée pour différentes valeurs de ses variables. Ici, activons [Texte et Symboles]Expression  et entrons $x^3 - 2x + 1/2$. Les noms des variables admises dans les expressions sont les lettres a, b, c, \dots, z . Plaçons un point P sur l'axe des abscisses (avec l'outil [Points]Point ). On obtient ses coordonnées par [Mesure]Coordonnées ou Équation  en sélectionnant P . Le texte affichant les coordonnées est initialement attaché à P , et se déplacera avec le point. Avec l'outil [Manipulation]Pointer , on peut détacher les coordonnées du point P et les placer n'importe où sur la feuille. On peut également les rattacher à nouveau en les approchant du point.

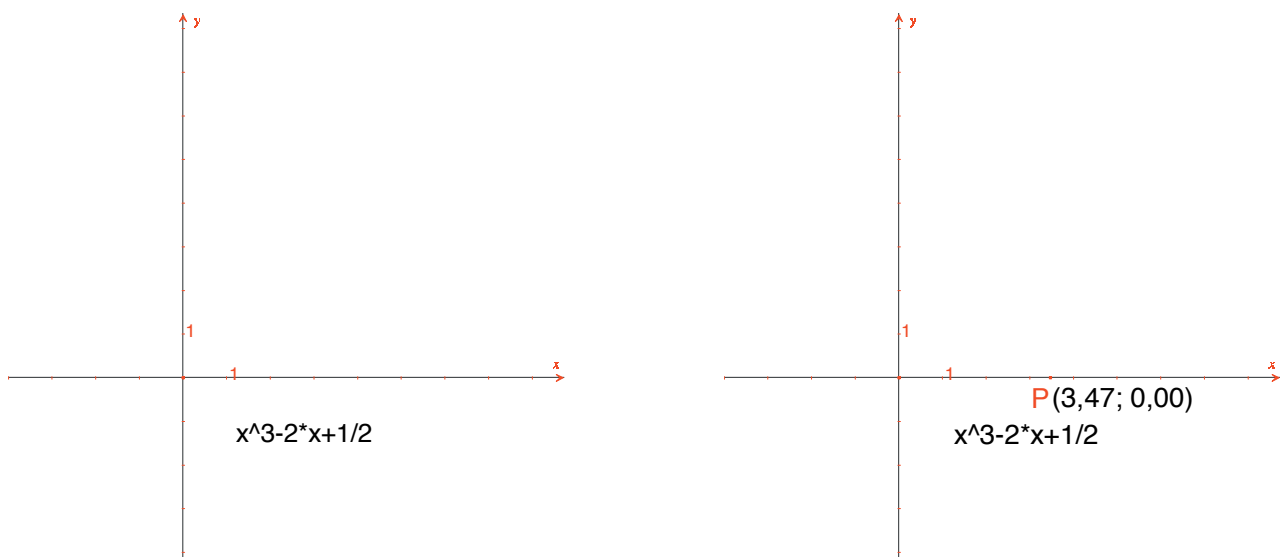


Figure 2.1 - [À Gauche]. On saisit l'expression correspondant à la fonction à étudier. [À Droite]. On place un point P sur l'axe des abscisses et on affiche ses coordonnées avec [Mesure]Coordonnées ou Équation.

Calculons ensuite la valeur de $f(x)$ où x représente l'abscisse de P . Pour cela, activons l'outil [Mesure]Appliquer une Expression et sélectionnons l'abscisse de P dans le texte représentant ses coordonnées.

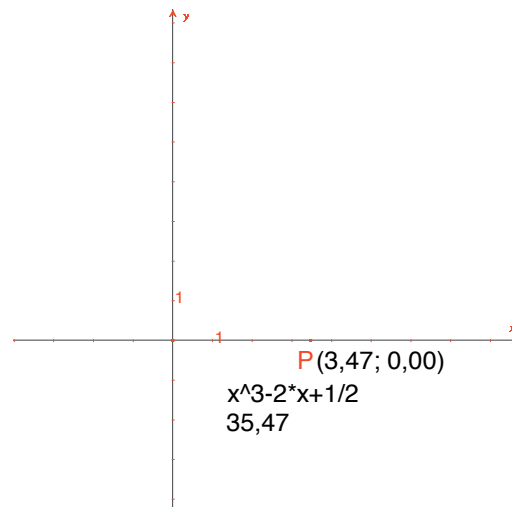


Figure 2.2 - L'outil [Mesure]Appliquer une Expression est utilisé pour calculer la valeur de $f(x)$ quand x est l'abscisse de P .

On reporte ensuite cette valeur sur l'axe des ordonnées, avec l'outil [Constructions]Report de Mesure , en sélectionnant la valeur à reporter, puis l'axe des ordonnées. Il suffit ensuite de construire des parallèles aux axes passant par ces deux points ([Constructions]Droite Parallèle) et on obtient à leur intersection le point M de coordonnées $(x, f(x))$. Sur la **figure 2.3**, nous avons déplacé P par rapport à sa position de la **figure 2.2** pour ramener le point de l'axe des ordonnées obtenu par report de mesure dans la portion visible de la feuille.

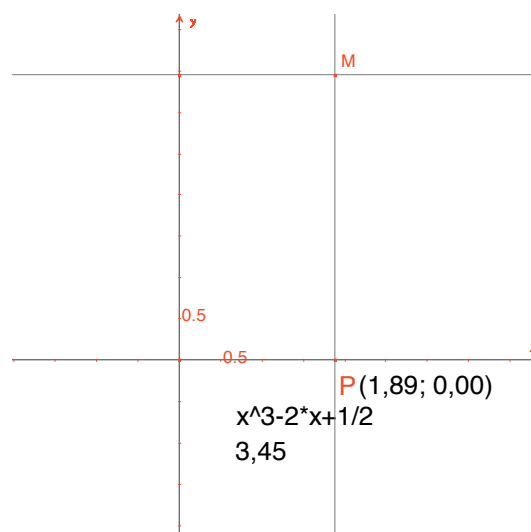



Figure 2.3 - Construction du point $M(x, f(x))$.

Le graphe de la fonction est obtenu en affichant le lieu du point M quand P décrit l'axe des abscisses. On le construit avec l'outil [Constructions]Lieu  en sélectionnant M puis P . Afin de mieux cadrer la partie intéressante du graphe de la fonction, on peut déplacer l'origine du repère et les graduations, par glisser-déposer de l'origine du repère ou d'une graduation quelconque.

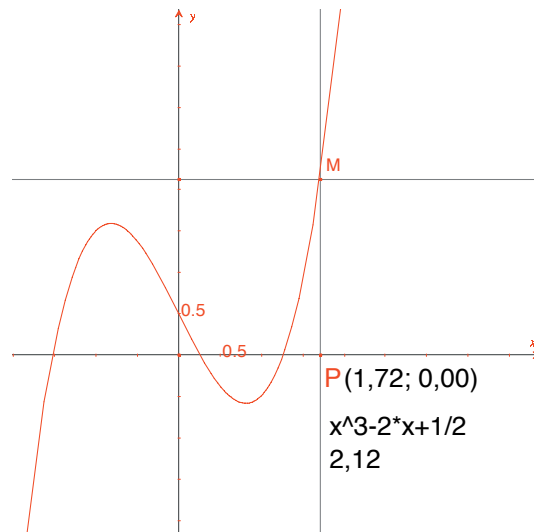






Figure 2.4 - L'outil [Constructions]Lieu permet finalement de construire le graphe de la fonction.

Nous allons construire une approximation de la tangente à la courbe en un point. Pour h petit, on sait que

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Du point de vue géométrique, cette approximation revient à prendre, comme direction de la tangente au point de la courbe d'abscisse x , celle de la droite reliant les points d'abscisse $x-h$ et $x+h$. Avec l'outil [Texte et Symboles]Nombre 2.1, on saisit une valeur pour h , par exemple ici 0,3, qui convient ici pour ces constructions. On pourra par la suite l'éditer pour la remplacer par une valeur plus petite donnant une meilleure approximation. On construit ensuite un point A sur l'axe des abscisses et le cercle de centre A et de rayon h . Ce cercle est obtenu avec l'outil [Constructions]Compas  en sélectionnant h puis A . Les deux intersections du cercle de centre A et de rayon h avec l'axe des abscisses ont pour abscisses $x-h$ et $x+h$, si x est l'abscisse de A . Traçons les trois droites parallèles à l'axe des ordonnées ([Constructions]Droite Parallèle ) et passant par les deux points d'intersection et le point A .

Les intersections de ces trois droites avec la courbe fournissent les points B^- , B , B^+ de la courbe d'abscisses respectives $x-h$, x , et $x+h$.

Comme la figure commence à devenir un peu complexe, cachons les éléments qui ne servent plus. On active l'outil [Attributs]Cacher/Montrer  et on sélectionne les éléments à cacher. Ici, on va cacher P , M , les deux droites de construction de M , les coordonnées de P et l'image de l'abscisse de P par la fonction. Les objets cachés ne sont visibles, en pointillés que quand l'outil [Attributs]Cacher/Montrer  est actif. Pour rendre visible un objet caché, il suffit de le sélectionner une nouvelle fois avec ce même outil.

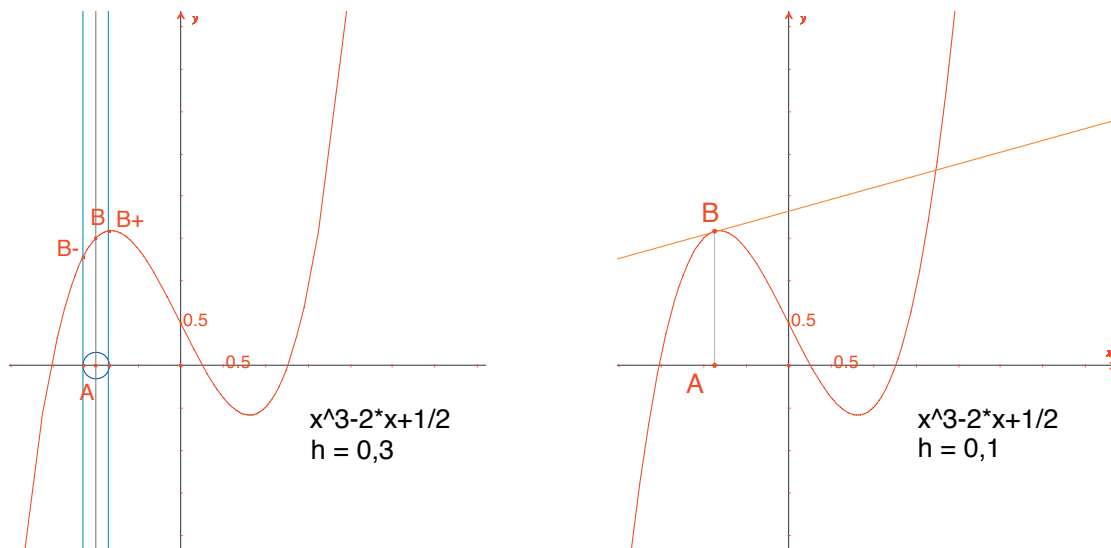




Figure 2.5 - [À Gauche]. En prenant l'intersection du cercle de centre A et de rayon h , on construit les trois points de la courbe d'abscisse $x-h$, x , et $x+h$.

[À Droite]. L'approximation de la tangente en B est alors la parallèle à la droite $(B^- B^+)$ passant par B .

On construit cette droite avec l'outil [Lignes]Droite  puis la parallèle [Constructions]Droite Parallèle . On cache ensuite la droite $(B^- B^+)$ et les autres éléments de construction pour ne laisser visible que h , A , B et la tangente en B . On voit que la valeur $h=0,3$ fournit déjà une très bonne approximation de la tangente. On peut néanmoins l'améliorer en diminuant h , par exemple en prenant $0,0001$.

Le déplacement du point A sur l'axe permet de déterminer visuellement les trois racines de l'équation $f(x) = 0$, les deux extrema locaux de f et le point d'inflexion de la courbe.

Pour information, les trois solutions de $f(x) = 0$ sont approximativement $r_1 = -1,52568$, $r_2 = 0,25865$, et $r_3 = 1,26703$. Les abscisses des extrema sont $e_1 = -\sqrt{6}/3 \approx -0,81649$ et $e_2 = \sqrt{6}/3 \approx 0,81649$. Le point d'inflexion a pour coordonnées $(0 ; 1/2)$.

Exercice 3 - En utilisant la pente de la tangente, tracer le graphe de la fonction dérivée.

Exercice 4 - La tangente recoupe l'axe en un point A' d'abscisse x' , qui est en général une meilleure approximation de la racine que x si A est déjà au voisinage d'une racine de $f(x) = 0$. Cette constatation est à la base de la méthode itérative de *Newton*¹ - *Raphson*² pour trouver une racine d'une équation. Construire A' , puis son itéré A'' par la même méthode, puis étudier la position de A'' en fonction de celle de A . En particulier, on peut trouver deux positions de A , autres que les trois racines, pour lesquelles A'' revient en A .

Pour information, ce sont les deux racines réelles d'un polynôme de degré 6, valant approximativement - 0,56293 et 0,73727. On voit aussi qu'un mauvais choix de A peut faire diverger la méthode, en amenant A' sur un des deux points où la dérivée est nulle.

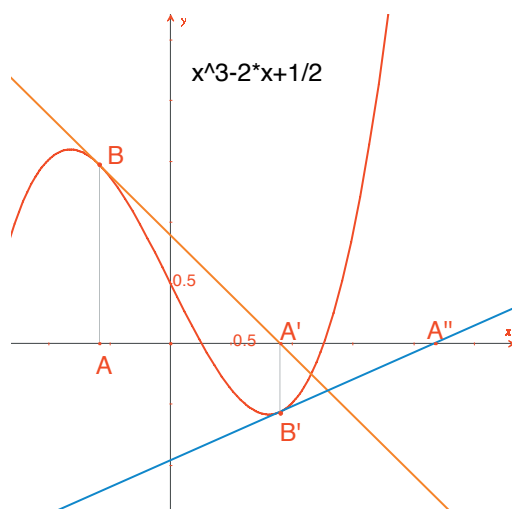


Figure 2.6 - Les deux premières itérations de la méthode de Newton-Raphson à partir du point A.

Note : le même graphe s'obtient directement à l'aide de l'outil [Mesure]Appliquer une Expression $\frac{3x+}{2y} =$. Sélectionner d'abord l'expression puis un des deux axes.

¹ Sir Isaac Newton, 1643-1727

² Joseph Raphson, 1648-1715



PAVAGES




Nous allons construire quelques pavages du plan par des polygones. Commençons par quelques définitions simplifiées, mais suffisantes pour la suite. Le lecteur intéressé se reportera à l'ouvrage de référence *Tilings and Patterns* de *Branko Grünbaum* et *G.C. Shephard, Freeman 1987*. Il existe également un grand nombre de sites Internet sur les pavages et les groupes de symétrie.

On dit qu'un ensemble de parties fermées du plan est un pavage du plan si les intérieurs des parties sont disjoints deux à deux, et la réunion de toutes les parties est le plan entier. Ces parties sont appelées les tuiles du pavage. L'intersection non réduite à un point de deux tuiles est appelée une arête du pavage et l'intersection réduite à un point de deux tuiles ou plus est appelée un sommet du pavage.

Pour un pavage P , on note $S(P)$ l'ensemble des isométries f du plan telles que l'image de toute tuile de P par f est une tuile de P . $S(P)$ est un groupe, appelé le groupe des symétries du pavage. Plusieurs cas sont à considérer pour ce groupe :

- $S(P)$ ne contient aucune translation. $S(P)$ est alors isomorphe à un groupe cyclique, éventuellement réduit à l'identité, engendré par une rotation d'angle $2\pi/n$, ou à un groupe diédral, groupe des symétries d'un polygone régulier à n côtés.
- $S(P)$ contient des translations de vecteurs tous colinéaires. $S(P)$ est alors isomorphe à l'un des 7 groupes de frises.
- $S(P)$ contient deux translations de vecteurs non colinéaires. Alors $S(P)$ est isomorphe à l'un des 17 groupes cristallographiques et le pavage est dit périodique.

Si toutes les tuiles du pavage peuvent être obtenues par isométrie à partir d'une seule tuile, on dit que le pavage est monohédral. Nous nous intéresserons ici seulement au cas de pavages monohédraux où les tuiles sont des polygones. Nous allons tout d'abord construire un pavage monohédral dont une tuile est un triangle quelconque.

Construisons un triangle ABC quelconque à l'aide de l'outil [Lignes]Triangle , puis le milieu I d'un des côtés, par exemple $[BC]$, avec l'outil [Constructions]Milieu . Soit D le symétrique de A par rapport à I , obtenu avec l'outil [Transformations]Symétrie Centrale  en sélectionnant d'abord l'objet à transformer A , puis le centre de symétrie I .

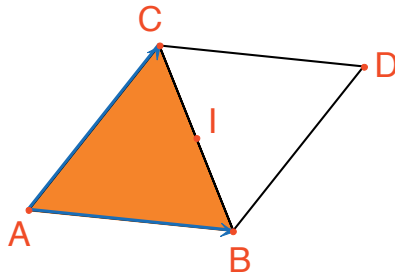




Figure 3.1 - On construit le symétrique d'un triangle ABC par rapport au milieu d'un de ses côtés (ici $[BC]$). On obtient alors un parallélogramme $ABDC$.

Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme et on peut l'utiliser pour paver le plan. On construit les deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} avec l'outil [Lignes]Vecteur , puis on les utilise pour dupliquer les triangles ABC et BCD par translation, avec l'outil [Transformations]Translation .

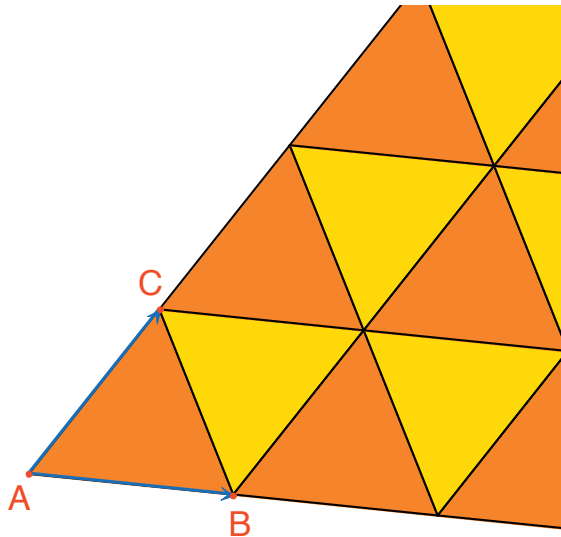


Figure 3.2 - Construction des images des deux triangles par les translations de vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

La même approche permet de paver le plan avec un quadrilatère quelconque, convexe ou non, mais non croisé. On prend le symétrique du quadrilatère par rapport au milieu d'un côté et on obtient un hexagone aux côtés parallèles deux à deux, qui pave le plan par translation.

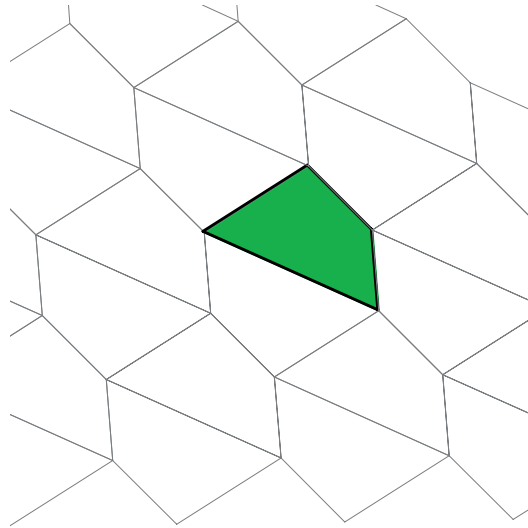


Figure 3.3 - Le même type de construction permet de paver le plan avec un quadrilatère quelconque, éventuellement non convexe du moment qu'il reste non croisé.

Le cas des autres polygones convexes est bien plus complexe. À partir de 7 côtés, on peut démontrer qu'aucun polygone convexe ne peut paver le plan. Il y a 3 types d'hexagones convexes pavant le plan et au moins 14 types de pentagones convexes pavant le plan, chaque type étant défini par un ensemble de contraintes sur les angles et les longueurs des côtés. Dans le cas des pentagones, on ne sait pas à l'heure actuelle si les 14 types connus fournissent toutes les solutions du problème. Le dernier type connu a été découvert en 1985. La question des polygones non convexes n'est pas non plus résolue à notre connaissance.

Exercice 5 - Construire un pentagone convexe $ABCDE$ vérifiant les contraintes suivantes : l'angle en A est $\hat{A} = 60^\circ$, l'angle en C est $\hat{C} = 120^\circ$, $AB = AE$, $CB = CD$. Ces contraintes ne déterminent pas un pentagone unique, mais une famille de pentagones. Le nombre de points libres de la construction sera donc d'au moins trois.

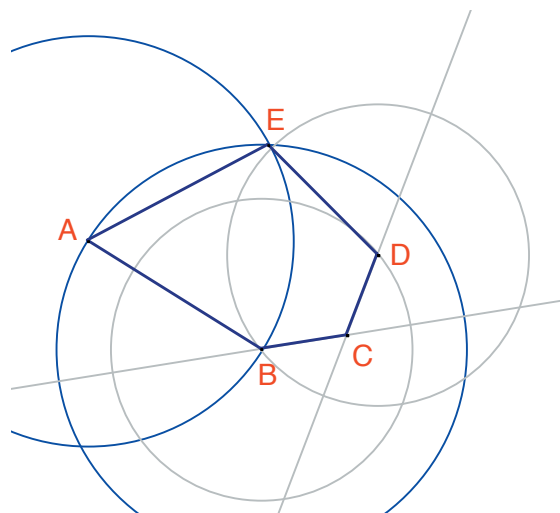




Figure 3.4 - Construction d'un pentagone vérifiant les contraintes $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$, $AB = AE$ et $CB = BD$. Les points A , B et C sont libres dans le plan.

Par des rotations successives de centre A et d'angle 60° (outil [Transformations] Rotation  attendant l'objet à transformer, un angle, et un centre) construire une «fleur» de 6 pentagones. L'angle est un nombre saisi sur la feuille avec l'outil [Texte et Symboles] Nombre  2.1).

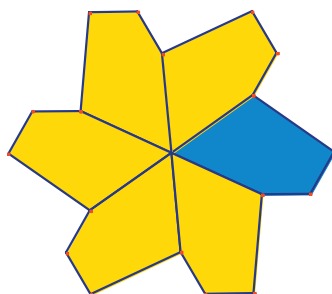


Figure 3.5 - Le pentagone de base est reproduit par rotation de centre A et d'angle 60° , pour former une «fleur» à six pétales.

Les fleurs peuvent alors être assemblées par translation pour paver le plan. Le pavage obtenu est le type 5 de la classification donnée dans *Tilings and Patterns*. Il a été publié par *K. Reinhardt* en 1918. Ce pavage est non seulement monohédral, c'est à dire que toutes les tuiles sont identiques à isométrie près, mais en plus isohédral : toutes les tuiles jouent le même rôle dans le pavage. Plus précisément, si une isométrie transforme une tuile en une autre tuile du pavage, alors elle fait partie du groupe de symétries du pavage.

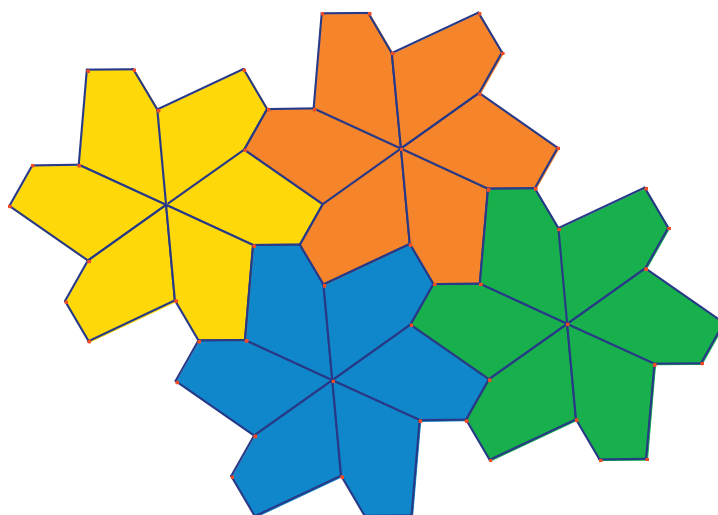


Figure 3.6 - Les fleurs sont assemblées par translation pour couvrir le plan.

Exercice 6 - Construire un pentagone $ABCDE$ vérifiant les contraintes :
 $\hat{E} = 90^\circ$, $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$, $2\hat{B} - \hat{D} = 180^\circ$, $\hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$, $EA = ED = AB + CD$.

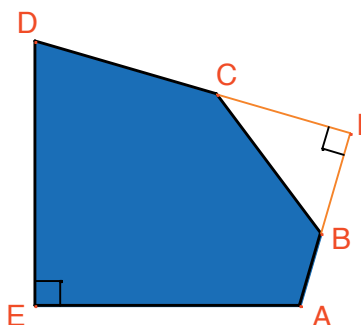


Figure 3.7 - Pentagone du type 10 selon la classification de Tilings and Patterns. Ce pentagone sert de base à un pavage monohédral du plan. Les points E et A sont libres dans le plan et le point I est libre sur un arc de cercle.

Le pavage est réalisé en faisant d'abord trois copies de la tuile par rotations successives de 90° autour de E, pour obtenir un carré tronqué. Ensuite ces carrés sont accolés en bandes par translation dans une direction. Les bandes de carrés sont séparées par des bandes de pentagones, comme dans la figure ci-dessous.

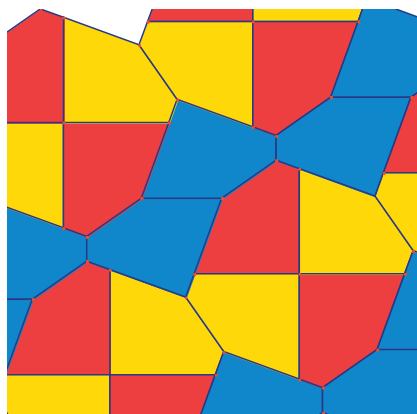


Figure 3.8 - Pavage monohédral par des pentagones convexes. Ce pavage est dû à Richard E. James III, suite à la publication d'un article de Martin Gardner dans Scientific American en 1975. On peut trouver cet article complété dans Time travel and other mathematical bewilderments, Martin Gardner, Freeman 1987.