

# CABRI<sup>®</sup> II Plus



Software Matematici Innovativi

---

**MANUALE UTENTE**

# BENVENUTO!

Benvenuto nel mondo dinamico di Cabri II Plus!

Nato alla fine degli anni Ottanta all'IMAG, un laboratorio di ricerca associato al CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) e all'Università Joseph Fourier di Grenoble (Francia), Cabri Géomètre conta oggi più di 100 milioni di utenti, su computer e calcolatrici grafiche Texas Instruments, in tutto il mondo. Cabri II Plus è ora sviluppato e distribuito dalla società Cabrilog, fondata nel marzo del 2000 da Jean-Marie LABORDE, direttore di ricerca al CNRS e padre spirituale di Cabri II Plus.

La costruzione di figure geometriche con il computer apporta una nuova dimensione rispetto alle costruzioni classiche che utilizzano carta, matita, riga e compasso. Cabri II Plus possiede un gran numero di funzionalità, potenti e facili da usare. Le figure, dalle più semplici alle più complicate, possono essere manipolate liberamente. In ogni momento si può controllare la costruzione di una figura, formulare delle congetture, misurare, calcolare, cancellare, nascondere o far apparire degli oggetti, inserire dei colori, dei tratteggi, dei testi, o ricominciare.

Cabri II Plus è al vertice dei software per l'apprendimento e l'insegnamento della geometria. Rivolto sia agli insegnanti che agli studenti, può essere utilizzato dalla scuola primaria all'università.

Certe funzionalità del software sono specifiche delle versioni Windows/Macintosh: i tasti **Ctrl** e **Alt** di Windows corrispondono al comando   e all'opzione **Alt**  sul Mac OS. Il clic sul tasto destro del mouse sotto Windows corrisponde a **Ctrl**+clic sul Mac OS.

- **Interfaccia:** Le nuove icone sono più grandi e più leggibili. I menu contestuali rendono ancora più intuitiva l'utilizzazione di Cabri II Plus, permettendo di risolvere facilmente - con pochi clic del mouse - le situazioni di ambiguità nella selezione degli oggetti o nel cambiamento degli attributi di un qualsiasi oggetto.
- **Nomi:** È possibile dare un nome ad ogni oggetto e disporre il nome in una qualunque posizione nelle vicinanze dell'oggetto.
- **Espressioni:** È possibile definire e valutare dinamicamente espressioni contenenti una o più variabili.
- **Grafico istantaneo:** Si può tracciare e studiare facilmente il grafico di una o più funzioni.

- **Luoghi:** Si costruiscono facilmente luoghi di punti o di oggetti, luoghi di luoghi e le intersezioni con i luoghi. Possono essere visualizzate le equazioni di curve algebriche costruite con lo strumento Luogo.
- **Rette intelligenti:** Si può visualizzare solo la parte utile di una retta. La lunghezza di questa parte di retta può essere modificata liberamente.
- **Colori:** È possibile scegliere i colori degli oggetti e dei testi, oltre che i colori di riempimento, con l'aiuto della nuova tavolozza estesa dei colori oppure utilizzare colori variabili dinamicamente.
- **Immagini (Bitmap, JPEG, GIF):** Si può allegare un'immagine a certi oggetti di una figura (punti, segmenti, poligoni, sfondo). Le immagini sono aggiornate dinamicamente durante le animazioni e le manipolazioni della figura.
- **Testo:** Possono essere cambiati liberamente lo stile, il tipo e la dimensione dei caratteri di un qualunque oggetto di testo.
- **Finestra di descrizione della figura:** Si può aprire una finestra che descrive in forma testuale tutti i passi della costruzione di una figura.
- **Registrazione di una sessione di lavoro:** Durante l'utilizzazione del software si possono registrare delle sessioni di lavoro. Una sessione può essere aperta e riletta sullo schermo oppure stampata successivamente, per esaminare i progressi degli allievi e identificare chiaramente le difficoltà riscontrate durante la sperimentazione.
- **Importare/Esportare figure:** Alcune figure possono essere esportate (o viceversa importate) verso (da) una calcolatrice grafica che utilizza Cabri Junior (TI-83 Plus e TI-84 Plus).

Tutte queste funzionalità innovative possono apportare una nuova dimensione alla pratica del vostro insegnamento.

Questo documento è diviso in due parti.

La parte **[1] PER COMINCIARE** è destinata agli utenti che incontrano il software Cabri II Plus completamente per la prima volta. Questa parte permette di familiarizzarsi con l'interfaccia di Cabri II Plus e con le convenzioni di utilizzazione del mouse. Nondimeno, l'esperienza mostra che l'apprendimento di Cabri II Plus è molto rapido, e che in classe gli allievi «fanno» già della geometria nella loro prima mezz'ora di utilizzazione del software.

La parte **[2] SCOPERTA** è destinata ai nuovi utenti e propone delle attività a livello di scuola media e di liceo.

Con Cabri II Plus sono forniti altri documenti. Sono disponibili sotto forma di documenti in PDF nella cartella di installazione del software o sul CD-ROM di installazione.

Il primo documento, **MANUALE DI RIFERIMENTO.pdf** è una descrizione completa del software.

Il secondo documento, **APPROFONDIMENTO.pdf** presenta altre attività più approfondite, a livello di liceo e di primo ciclo universitario.

Le attività proposte in questi documenti sono largamente indipendenti le une dalle altre. Il lettore è invitato a fare le costruzioni in modo dettagliato e successivamente gli esercizi proposti.

Il nostro sito [www.cabri.com](http://www.cabri.com) vi darà accesso agli ultimi aggiornamenti e alle novità riguardanti i nostri prodotti, in particolare alle nuove versioni di questo documento. Il sito contiene anche dei collegamenti verso decine di pagine Internet e riferimenti anche a numerosi libri sulla geometria e su Cabri II Plus.

Tutta l'equipe di CABRILOG vi augura lunghe e appassionanti ore di costruzione, di esplorazione e di scoperta.

©2007 CABRILOG SAS

**Manuale Cabri II Plus:**

**Autore iniziale:** Eric Bainville

**Traduzione italiana:** Luigi Tomasi

**Ultimo aggiornamento:** giugno 2007

**Nuove versioni:** [www.cabri.com](http://www.cabri.com)

**Support:** [support@cabri.com](mailto:support@cabri.com)

**Progetto grafico e impaginazione:** Cabrilog, Grenoble (Francia)

# INDICE

## PER INIZIARE

### CAPITOLO

1

P 6

- 1.1 FILOSOFIA DI CABRI II PLUS
- 1.2 INTERFACCIA DI CABRI II PLUS
- 1.3 UTILIZZAZIONE DEL MOUSE
- 1.4 PRIMA COSTRUZIONE

P 6

P 6

P 9

P 10

## SCOPERTA

### CAPITOLO

2

RETTE DI EULERO DI UN TRIANGOLO

P 17

### CAPITOLO

3

LA RICERCA DEL PUNTO MISTERIOSO

P 24

### CAPITOLO

4

IL QUADRILATERO DI VARIGNON

P 27



## PER INIZIARE

## 1.1 FILOSOFIA DI CABRI II PLUS

La filosofia di Cabri II Plus è di permettere il massimo dell'interazione (mouse, tastiera,...) tra l'utente e il software e, in ogni caso, di fare quello che l'utente si attende che il software faccia, rispettando da una parte i comportamenti usuali dei programmi e del sistema operativo e dall'altra il comportamento matematico più plausibile.

Un **documento** di Cabri II Plus è composto da una **figura** costruita liberamente su un unico foglio virtuale di un metro quadrato (1m per 1m). Una figura è composta di oggetti geometrici (punti, rette, circonferenze...), ma anche da altri oggetti (numeri, testi, formule,...).

Un documento può anche contenere delle **macro-costruzioni**, che consentono, memorizzando delle costruzioni intermedie, di estendere le funzionalità del software.

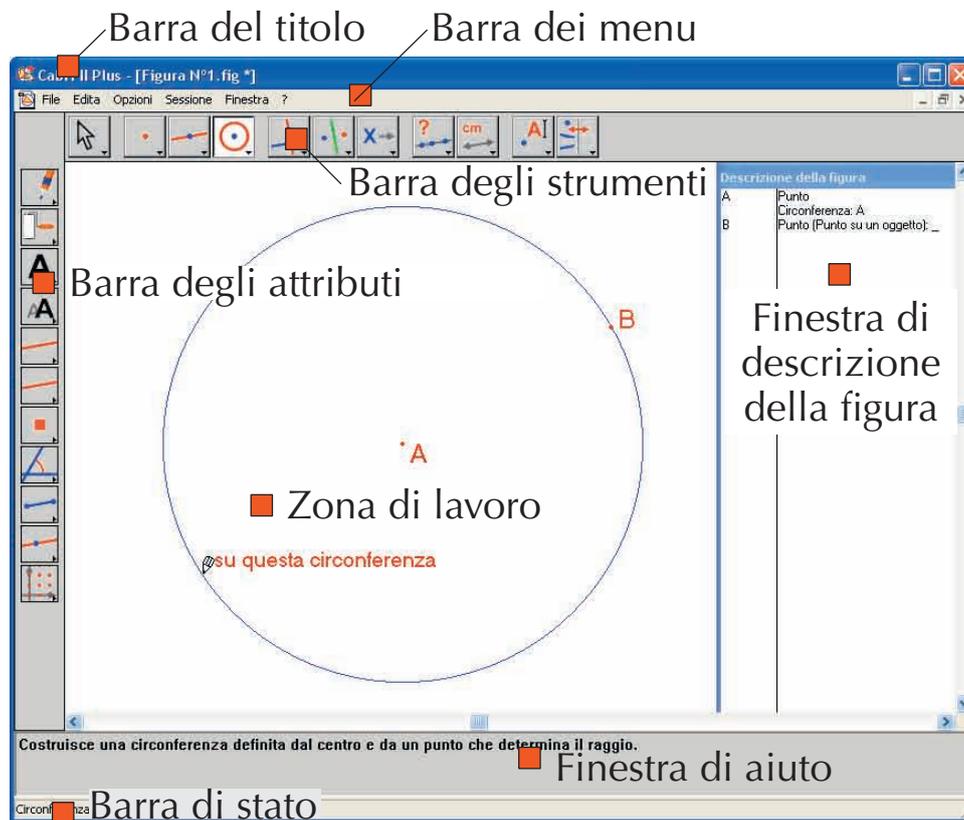
L'applicazione permette di aprire più documenti simultaneamente e supporta il Taglia-Copia/Incolla tra documenti aperti.

## 1.2 INTERFACCIA DI CABRI II PLUS

La **Figura 1.1** mostra la finestra principale dell'applicazione e le sue diverse zone. All'avvio di Cabri II Plus, la barra degli attributi, la finestra di aiuto e la finestra di descrizione della figura non sono visibili.

La **barra del titolo** indica il nome del file contenente la figura, o **Figura n° 1, 2, ...** se la figura non è stata ancora salvata con un nome.

La **barra dei menu** permette di accedere ai comandi dell'applicazione, che corrispondono ai comandi che si ritrovano usualmente anche in altri software.

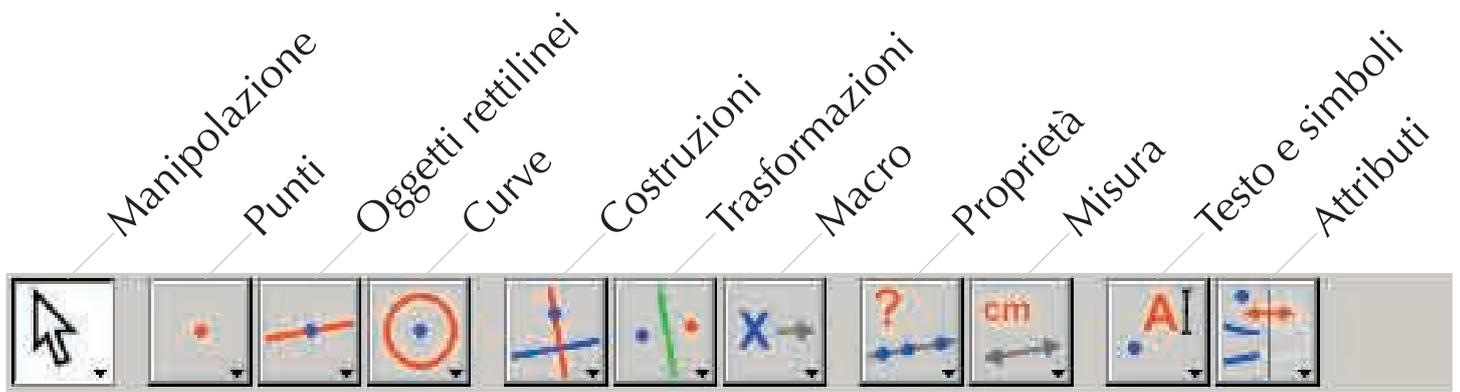


**Figura 1.1** – La finestra di Cabri II Plus e le sue diverse zone.

Nel seguito di questo documento designeremo la voce **Azione** del menu **Menu** con **[Menu]Azione**. Per esempio, **[File]Salva con nome...** indica la voce **Salva con nome...** del menu **File**.

La **barra degli strumenti** fornisce gli strumenti che consentono di creare e manipolare la figura. Essa è costituita da più caselle di strumenti e ciascuna indica uno strumento visibile, corrispondente a un'icona della barra. Lo strumento attivo è rappresentato da un tasto premuto, con uno sfondo bianco. Gli altri strumenti sono rappresentati da tasti non premuti, con uno sfondo grigio. Un clic veloce su un tasto attiva lo strumento corrispondente. Una pressione prolungata su un tasto della barra degli strumenti apre la casella degli strumenti corrispondente e permette di scegliere in essa un altro strumento. Quest'ultimo, tramite la sua icona, diviene il nuovo strumento visibile nella casella degli strumenti e lo strumento attivo.

La barra degli strumenti può essere ricomposta liberamente dall'utente ed eventualmente bloccata in una configurazione fissata per un'utilizzazione in classe (vedi il capitolo **[4] PREFERENZE E PERSONALIZZAZIONE** del **MANUALE DI RIFERIMENTO.pdf**).



**Figura 1.2** – La barra degli strumenti di default di Cabri II Plus, con i nomi delle diverse caselle degli strumenti.

Nel seguito di questo documento, designeremo lo strumento **Strumento** della casella **Casella** con **[Casella]Strumento**, con l'icona richiamata nel margine destro (certe etichette, troppo lunghe per stare nel margine, sono state abbreviate). Per esempio **[Oggetti Rettilinei]Semiretta**  rappresenta lo strumento **Semiretta** della casella degli strumenti **Oggetti rettilinei**.

Le icone della barra degli strumenti possono essere visualizzate in due formati, grande o piccolo. Per cambiare il formato, si clicca sul tasto destro del mouse dopo aver spostato il puntatore sulla barra degli strumenti, a destra dell'ultima casella degli strumenti e selezionare «icone piccole».

La **barra di stato** mostra costantemente, nella finestra in basso, qual è lo strumento attivo.

La **barra degli attributi** permette di modificare gli attributi degli oggetti: colori, stili, dimensioni,... Viene attivata con il comando **[Opzioni]Mostra la barra degli attributi**, e nascosta di nuovo con **[Opzioni]Nascondi la barra degli attributi**, oppure con il tasto **F9** per Windows e **⌘+F9** per Mac.

La **finestra di aiuto** fornisce un breve testo di aiuto riguardante lo strumento selezionato. Il messaggio di aiuto indica quali sono gli oggetti iniziali richiesti e ciò che sarà costruito dallo strumento. La finestra di aiuto viene attivata/nascosta con il tasto **F1** per Windows e **⌘+F1** per Mac.

La **finestra di descrizione** della figura contiene una descrizione della figura sotto forma di testo. In questa finestra è possibile trovare elencato l'insieme degli oggetti costruiti e il loro metodo di costruzione. Viene attivata con il comando **[Opzioni]Mostra la descrizione della figura** e nascosta di nuovo con **[Opzioni]Nascondi la descrizione della figura**, oppure con il tasto **F10** per Windows e **⌘+F10** per Mac.

La **zona di lavoro**, infine, rappresenta una porzione del foglio di lavoro. Le costruzioni geometriche vengono eseguite in questa zona di lavoro.

## 1.3 UTILIZZAZIONE DEL MOUSE

La maggior parte delle funzionalità di Cabri II Plus è realizzata utilizzando il mouse. Le azioni che si possono fare sul mouse sono: lo spostamento, la pressione su un tasto e il rilascio di un tasto. In mancanza di indicazione contraria, si agirà sul tasto sinistro del mouse.

- Una sequenza pressione-rilascio rapida è chiamata ***clic***.
- Una sequenza pressione-rilascio-pressione-rilascio rapida è chiamata ***doppio-clic***.
- Una sequenza pressione-spostamento-rilascio è chiamata ***trascinamento-rilascio***.

Quando ci si sposta con il mouse nella zona di lavoro, il software ci informa in tre modi di ciò che un clic o un trascinamento-rilascio produrranno:

- la forma del puntatore,
- il testo visualizzato vicino al puntatore,
- una rappresentazione parziale dell'oggetto in corso di costruzione.

A seconda dei casi, il testo e la rappresentazione parziale dell'oggetto possono anche non essere visualizzati.

### I diversi puntatori sono i seguenti:

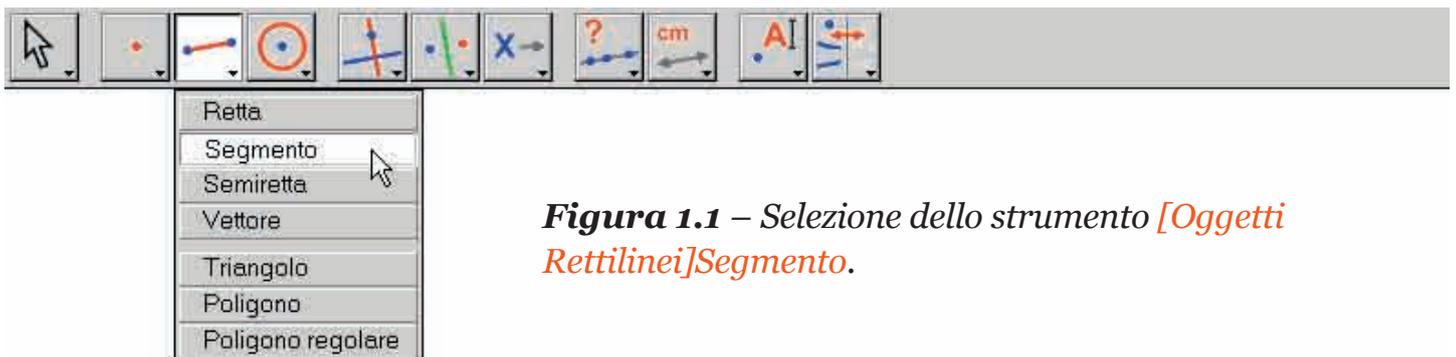
	Un oggetto esistente può essere selezionato.
	Un oggetto esistente può essere selezionato, o spostato, o utilizzato in una costruzione.
	Appare quando si clicca su un oggetto esistente per selezionarlo, o per utilizzarlo in una costruzione.
	Sotto questo puntatore è possibile selezionare oggetti diversi. Un clic provocherà la comparsa di un menu che permette di precisare gli oggetti da selezionare tra tutte le possibilità.
	Appare durante lo spostamento di un oggetto.
	Il puntatore è in una zona libera del foglio e si può definire una selezione rettangolare del foglio tramite trascinamento-rilascio.
	Segnala il modo di spostamento del foglio. Si può entrare in questo modo in ogni momento mantenendo premuto il tasto <b>Ctrl</b> sul Windows e <b>⌘</b> sul Mac OS. In questa modalità, un trascinamento-rilascio, sposterà il foglio nella finestra.
	Appare durante lo spostamento del foglio.

	Indica che un clic creerà un nuovo punto libero sul foglio di lavoro.
	Indica che un clic creerà un nuovo punto libero su un oggetto esistente, oppure un nuovo punto nell'intersezione di due oggetti esistenti.
	Indica che un clic colorerà l'interno di un oggetto sotto il puntatore con il colore di riempimento corrente.
	Indica che un clic cambierà l'attributo (per esempio il colore, lo stile, lo spessore, ...) dell'oggetto sotto il puntatore.

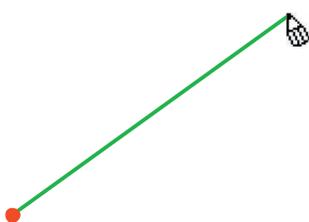
## 1.4 PRIMA COSTRUZIONE

Per illustrare questo capitolo **[1] PER INIZIARE** di prima conoscenza e di acquisizione di manualità con il software, ci proponiamo di costruire un quadrato a partire da una delle sue diagonali. All'avvio di Cabri Il Plus, viene creato un nuovo documento vuoto e si può immediatamente iniziare una costruzione.

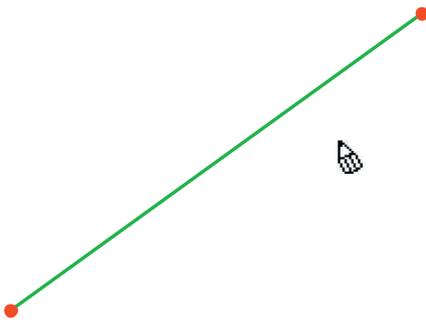
Costruiamo inizialmente il segmento che sarà una delle diagonali del quadrato. Si attiva lo strumento **[Oggetti Rettilinei]Segmento**  cliccando sull'icona della retta e mantenendo il tasto del mouse premuto per aprire la casella degli strumenti. Si sposta poi il puntatore sullo strumento **[Segmento]** e si rilascia il tasto del mouse per attivarlo.



**Figura 1.1** – Selezione dello strumento **[Oggetti Rettilinei]Segmento**.



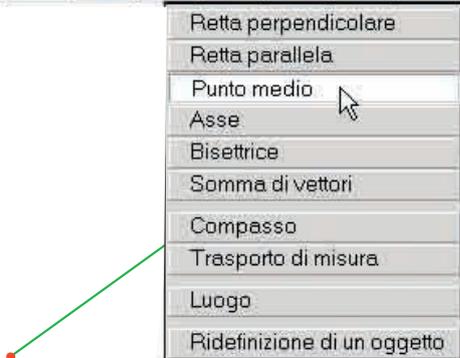
**Figura 1.2** – Costruzione del primo punto. Con il cursore viene creata un'immagine del segmento finale che si sposta con il puntatore fino a che non sarà costruito il secondo punto.

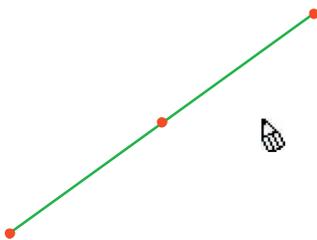


**Figura 1.3** – Il segmento viene costruito dopo la selezione del secondo punto. Lo strumento **[Oggetti Rettilinei]Segmento** resta attivo, permettendo la costruzione di un altro segmento.

Spostiamo ora il puntatore nella zona di lavoro, dove prende la forma di . Cliccando si crea il primo punto. Continuiamo poi a spostare il puntatore nella zona di lavoro. Un segmento tracciato tra il primo punto e il cursore materializza il segmento che sarà costruito. Cliccando si crea il secondo punto e si fissa il segmento. La nostra figura contiene ora due punti e un segmento.

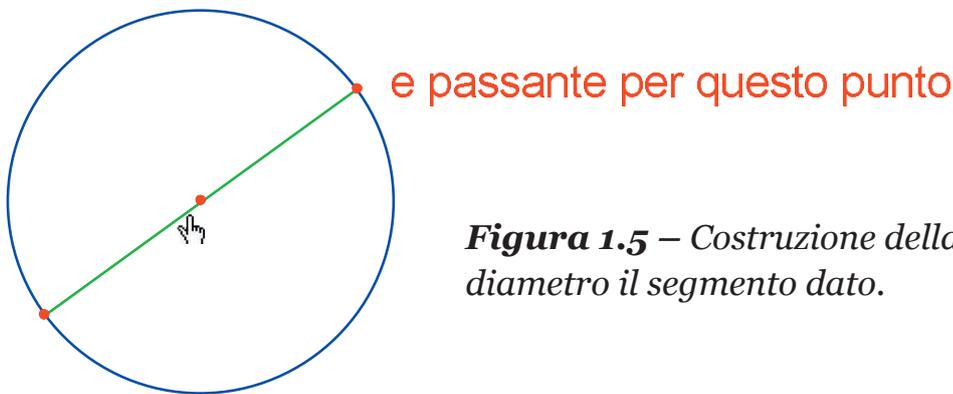
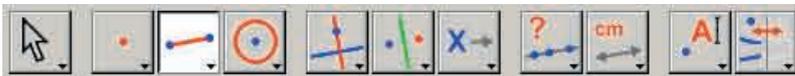
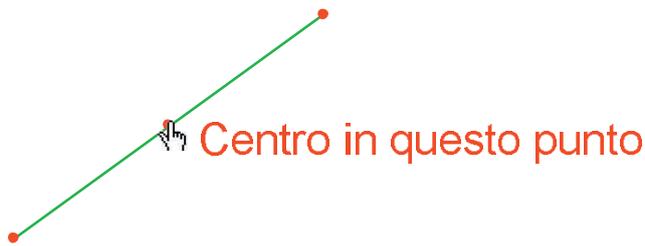
Per costruire il quadrato, potremmo utilizzare la circonferenza avente questo segmento come diametro. Il centro di questa circonferenza è il punto medio del segmento. Per costruire questo punto medio si attiva lo strumento **[Costruzioni]Punto Medio**  e poi si sposta il puntatore sul segmento. Vicino al cursore sarà allora visualizzato il messaggio **Punto medio di questo segmento** e il puntatore prende allora la forma di una  mano che indica. Cliccando si costruisce il punto medio del segmento.





*Figura 1.4 – Costruzione del punto medio del segmento.*

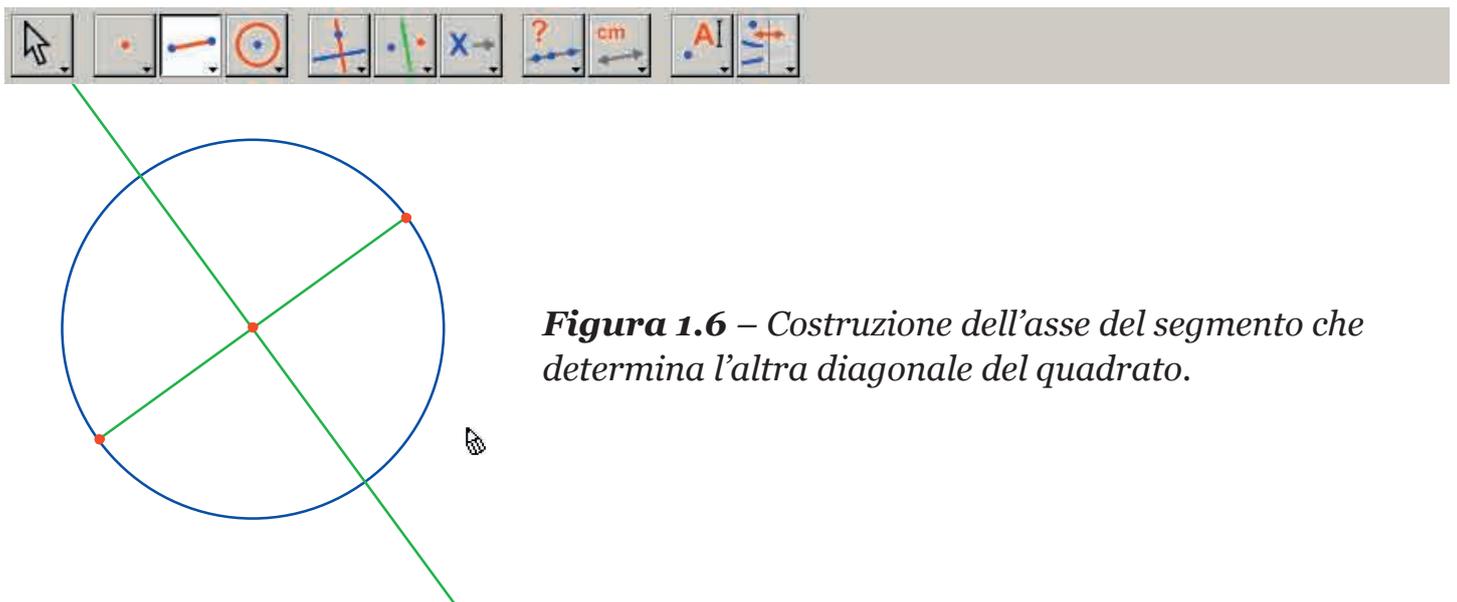
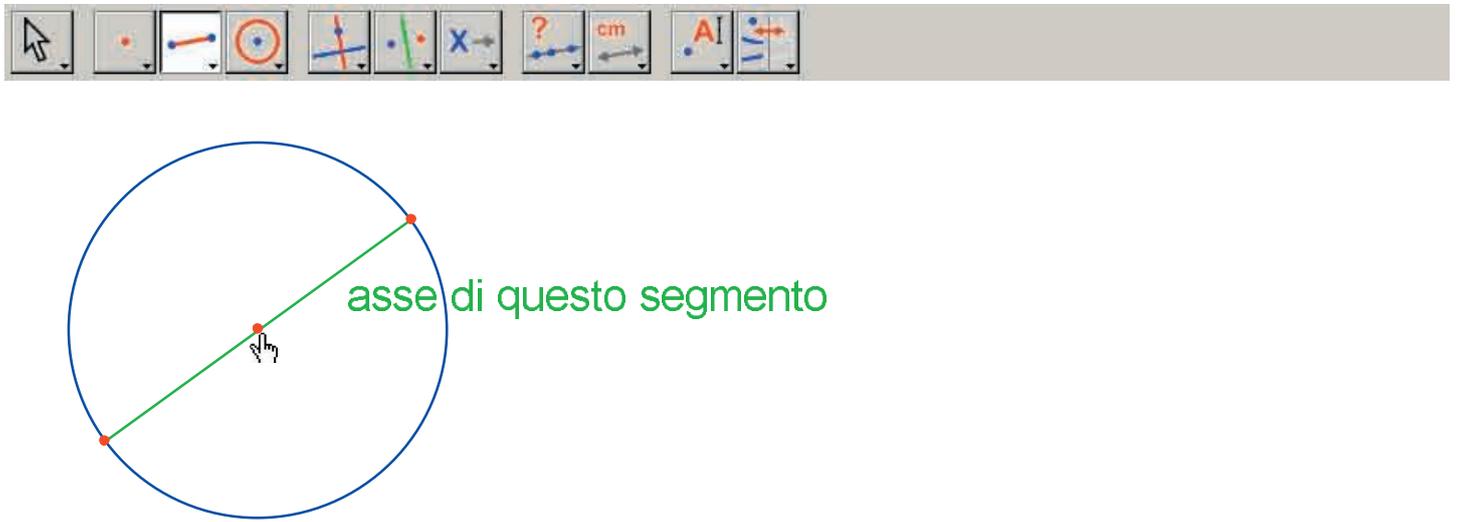
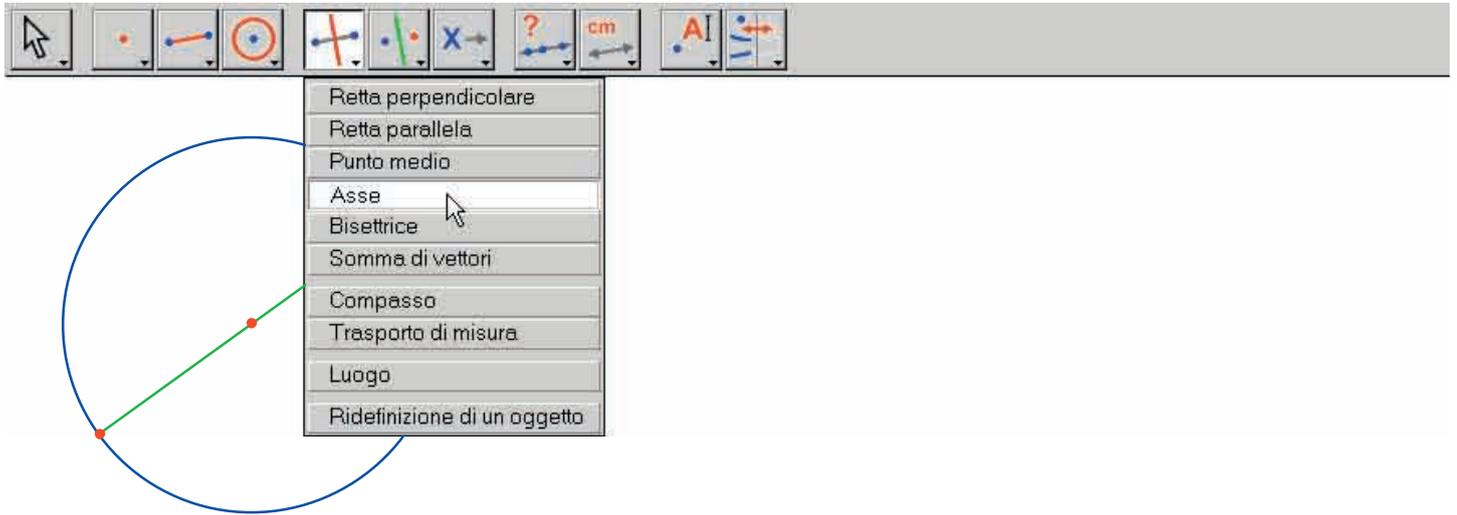
Si attiva di seguito lo strumento [Curve]Circonferenza , e si sposta il puntatore nelle vicinanze del punto medio costruito. Sarà allora visualizzato il messaggio **Questo centro**, e si dovrà cliccare per selezionare il punto medio del segmento come centro della circonferenza. Lo strumento Circonferenza richiede poi un punto della circonferenza. Durante lo spostamento, viene tracciata dinamicamente una circonferenza che ha per centro il punto medio del segmento, così come si era verificato precedentemente per il segmento. Quando il puntatore viene avvicinato a uno degli estremi del segmento, compare il messaggio **e passante per questo punto**. Si clicca e sarà costruita la circonferenza passante per questo punto.



**Figura 1.5** – Costruzione della circonferenza avente per diametro il segmento dato.

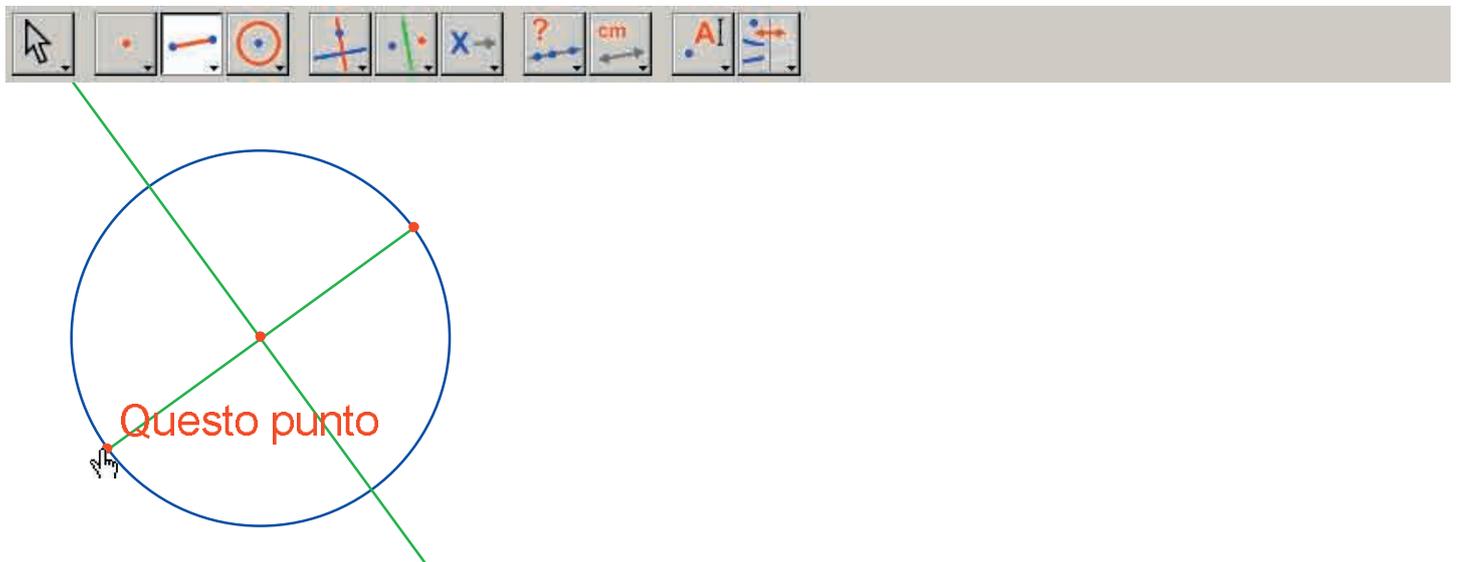
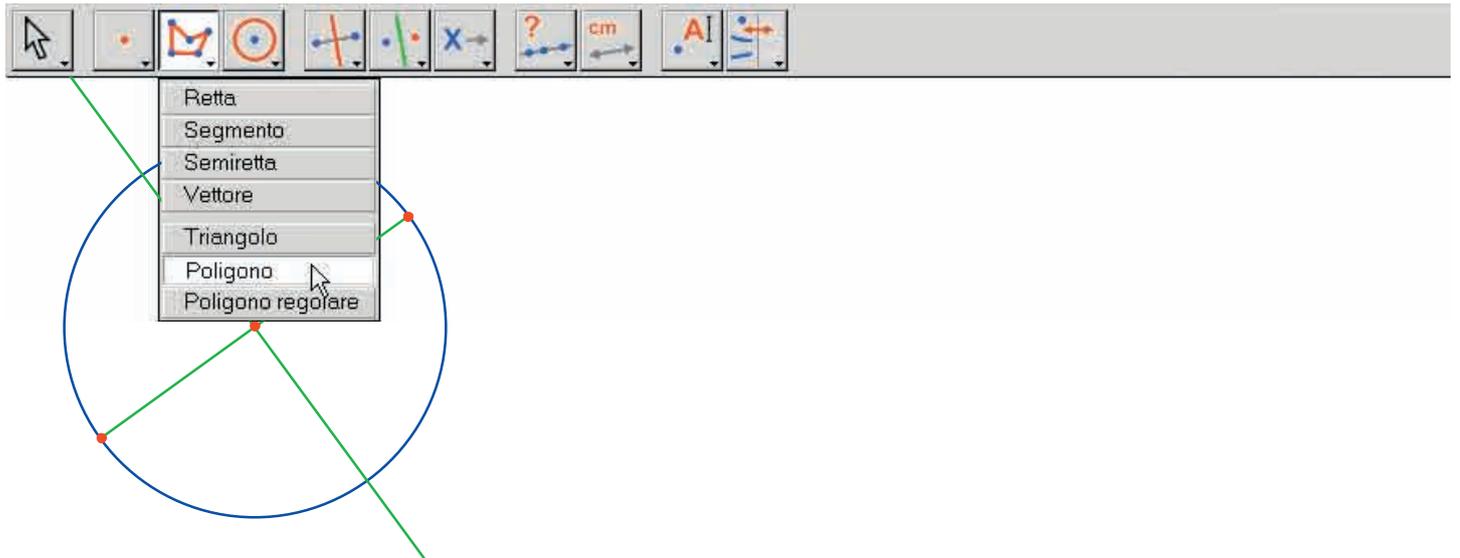
Si può ora attivare lo strumento [Manipolazione]Puntatore  per manipolare la figura. Spostando il puntatore sugli estremi del segmento, che sono i punti liberi della figura, il puntatore assume la forma di una mano che indica , e compare il messaggio Questo punto. Si può spostare il punto tramite un trascinamento-rilascio del mouse. In questo caso, tutti gli elementi della figura sono aggiornati: il segmento viene istantaneamente ridisegnato, il suo punto medio si sposta di conseguenza e la circonferenza segue queste variazioni.

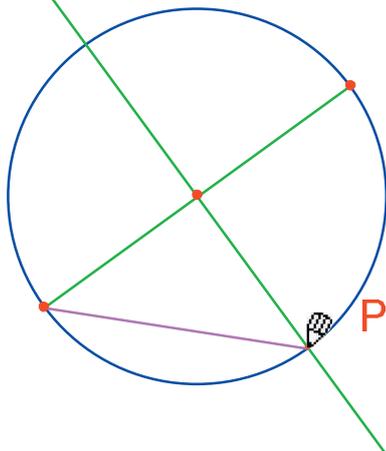
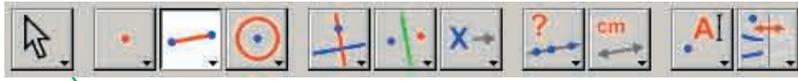
Per costruire il quadrato, non ci resta che trovare l'altra diagonale, che è il diametro della circonferenza perpendicolare al segmento di partenza. Costruiamo l'asse del segmento, vale a dire la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio. Si attiva lo strumento [Costruzioni]Asse , poi si seleziona il segmento per costruirne l'asse.



**Figura 1.6** – Costruzione dell'asse del segmento che determina l'altra diagonale del quadrato.

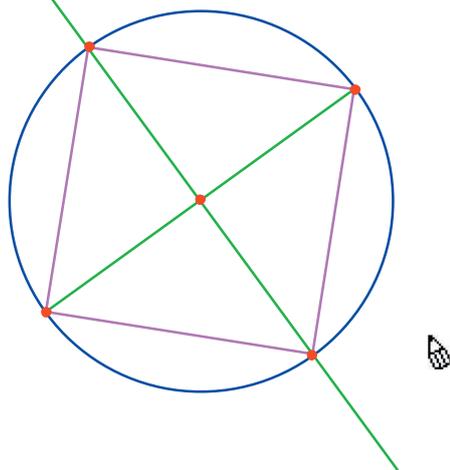
Per completare la costruzione del quadrato attiviamo lo strumento [Oggetti Rettilinei]Poligono . Questo strumento richiede la selezione di una sequenza di punti che definiscono un poligono qualunque. Il poligono viene completato quando si seleziona un'altra volta il punto iniziale, oppure se si fa un doppio-clic nel momento della selezione dell'ultimo punto. I due punti di intersezione della circonferenza con l'asse del segmento non sono ancora stati esplicitamente costruiti, ma Cabri II Plus permette di costruirli implicitamente nel momento della loro utilizzazione.





**Figura 1.7** – Costruzione del quadrato mediante la costruzione implicita delle intersezioni tra la circonferenza e l'asse.

Punto in questa intersezione



**Figura 1.8** – La tua prima costruzione con Cabri II Plus!



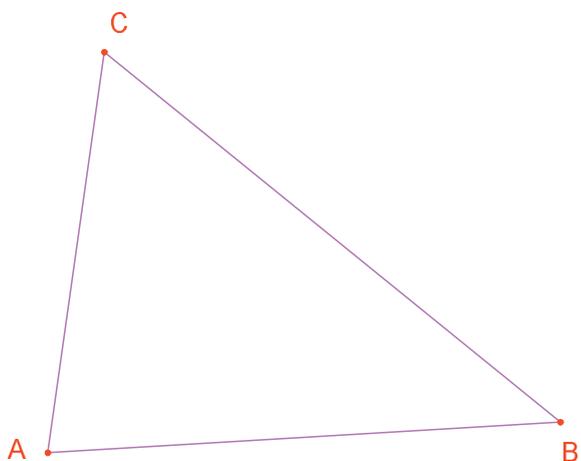
## RETTA DI EULERO DI UN TRIANGOLO

Costruiamo un triangolo qualunque  $ABC$ , poi le tre mediane di questo triangolo. Queste sono le rette che congiungono un vertice e il punto medio del lato opposto. Costruiremo successivamente le tre altezze del triangolo: sono le rette perpendicolari a un lato e passanti per il vertice opposto. Infine si costruiranno i tre assi dei lati del triangolo: sono le rette perpendicolari a un lato e passanti per i loro punti medi.

Come si sa, le tre altezze, le tre mediane e i tre assi si incontrano rispettivamente in tre punti (ortocentro, baricentro, circocentro) e i punti sono allineati su una retta, chiamata retta di *Eulero*<sup>1</sup> del triangolo.

Per costruire un triangolo, si sceglie lo strumento [Oggetti Rettilinei]Triangolo . La manipolazione della barra degli strumenti è descritta nella parte [1] PER INIZIARE di questo documento.

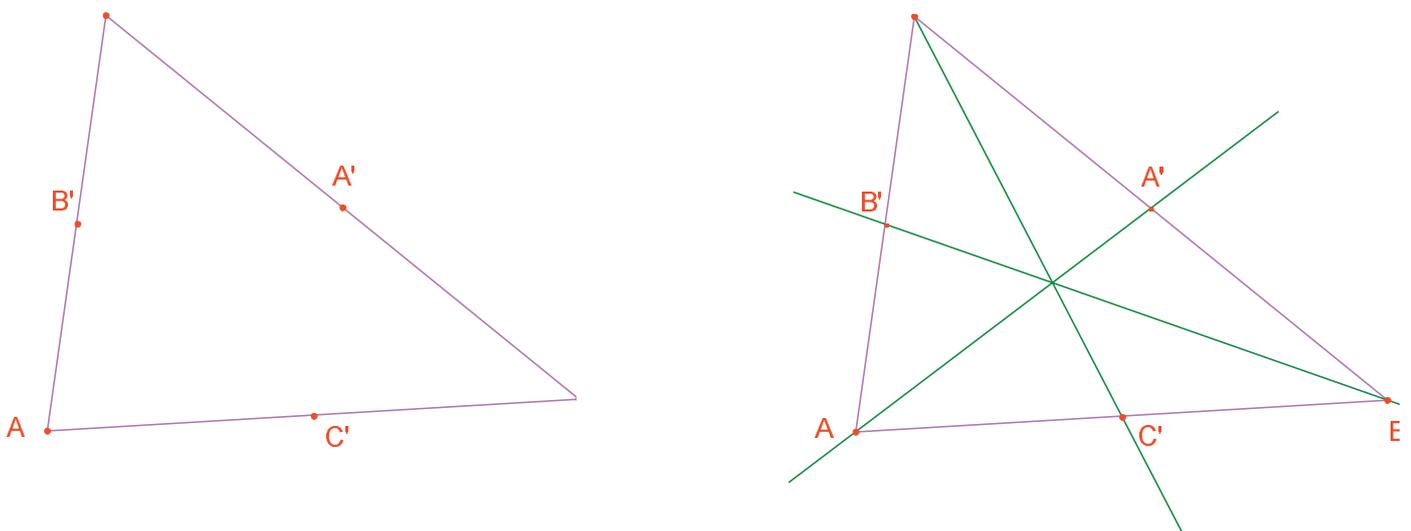
Attivato lo strumento [Oggetti Rettilinei]Triangolo , è sufficiente creare tre nuovi punti nella finestra cliccando nelle zone vuote del foglio di lavoro. Si può assegnare il nome ai punti immediatamente dopo la loro creazione «al volo» semplicemente scrivendo il loro nome sulla tastiera. Una volta costruito il triangolo, i nomi possono essere spostati nelle vicinanze dei punti, ad esempio per metterli all'esterno del triangolo.



**Figura 2.1** – Triangolo costruito con lo strumento [Oggetti Rettilinei]Triangolo. Il nome dei punti è stato dato "al volo", scrivendo il loro nome subito dopo la loro creazione.

<sup>1</sup>Léonard Euler, 1707-1783

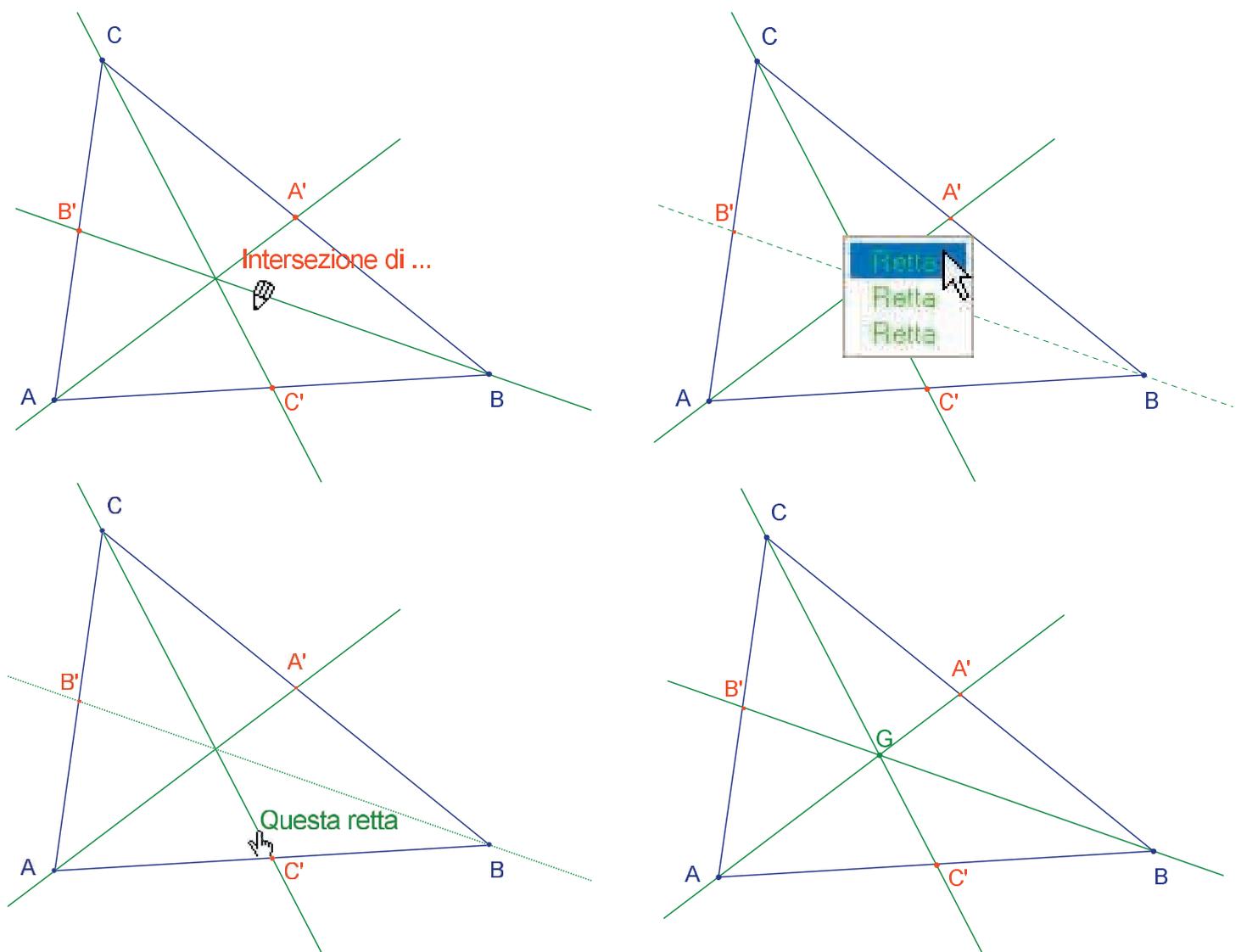
Per spostare il nome di un oggetto, si utilizza lo strumento [Manipolazione] **Puntatore** . trascinando il nome (si clicca e si sposta il cursore tenendo premuto il tasto sinistro del mouse). Per cambiare il nome di un oggetto, si attiva lo strumento [Testo e Simboli] **Nomi** , poi si seleziona il nome: appare un rettangolo di edizione che permette di modificare il nome dell'oggetto. I punti medi sono costruiti grazie allo strumento [Costruzioni] **Punto Medio** . Per costruire il punto medio di  $AB$ , si selezionano successivamente  $A$  e  $B$ . Il punto medio di un segmento o di un lato di un poligono può anche essere costruito cliccando direttamente sul segmento. Il nome al nuovo punto può essere dato «al volo», chiamandolo  $C'$ . Si procede nello stesso modo per gli altri due lati, costruendo il punto medio  $A'$  del segmento  $BC$  e il punto medio  $B'$  del segmento  $CA$ .



**Figura 2.2** – [A sinistra]. I punti medi sono stati costruiti con lo strumento [Costruzioni] **Punto Medio**, che accetta come oggetti iniziali sia gli estremi, sia un segmento, sia ancora il lato di un poligono.  
[A destra]. Le mediane sono costruite con l'aiuto dello strumento [Oggetti Rettilinei] **Retta** e il loro colore si può modificare con lo strumento [Attributi] **Colore**.

Lo strumento [Manipolazione] **Puntatore**  permette di spostare come si vuole gli oggetti liberi della figura, qui i tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Si vede che tutta la costruzione viene automaticamente aggiornata nel momento dello spostamento di uno di questi punti. Si può così esplorare la costruzione in numerose sue configurazioni. Per scoprire quali sono gli oggetti liberi di una figura, è sufficiente attivare lo strumento [Manipolazione] **Puntatore**  e poi cliccare su una zona vuota del foglio, tenendo premuto il tasto sinistro del mouse: gli oggetti liberi della figura si mettono allora a lampeggiare.

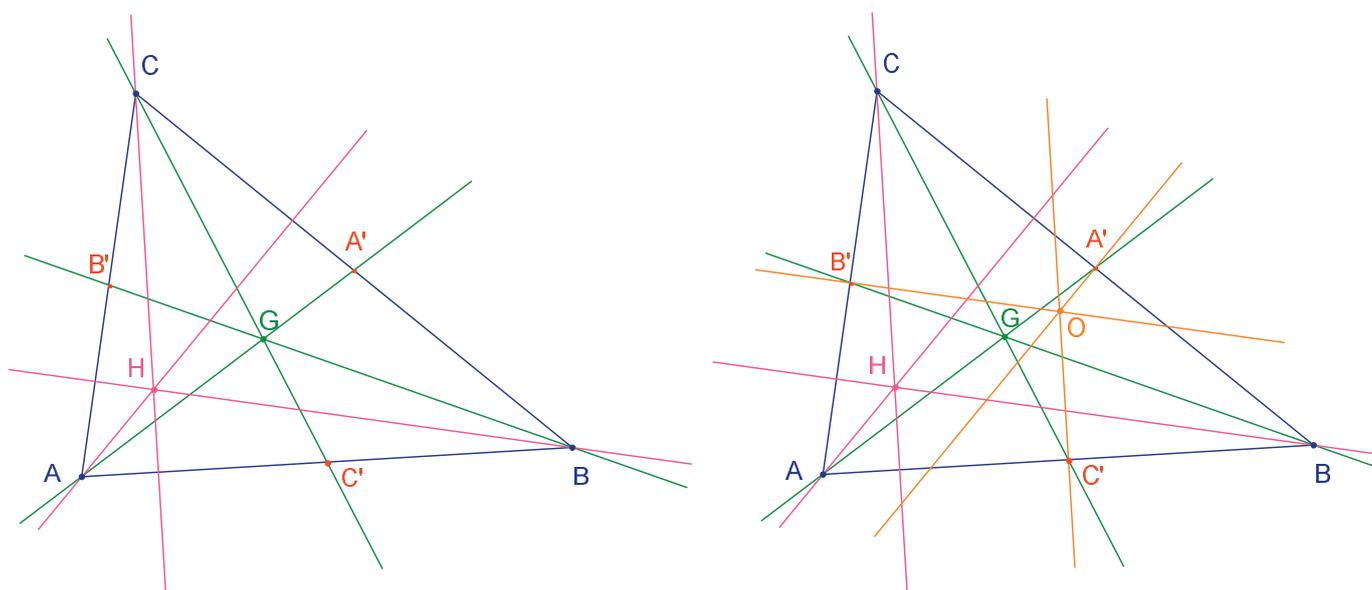
Lo strumento [Oggetti Rettilinei]Retta  consente di costruire le tre mediane. Per costruire la retta  $AA'$ , si indicheranno successivamente  $A$  e  $A'$ . Lo strumento [Attributi]Colore...  permette di cambiare il colore degli oggetti. Si sceglie il colore nella tavolozza e poi si selezionano gli oggetti da colorare. Dopo aver selezionato lo strumento [Punti]Punto , avviciniamo il puntatore al punto di intersezione delle tre mediane. In questa posizione Cabri II Plus cerca di creare il punto di intersezione di due delle tre rette. Poiché è presente un'ambiguità (ci sono qui tre rette concorrenti in un punto), appare un menu che permette di scegliere le due rette da utilizzare per la costruzione del punto. Quando il puntatore del mouse viene spostato sulle voci del menu, nella figura viene messa in evidenza, tramite un lampeggiamento, la retta corrispondente. Dopo aver selezionato due rette, viene creato il punto di intersezione. Chiamiamolo  $G$  «al volo».



**Figura 2.3** – Costruzione del punto di intersezione delle mediane e risoluzione delle ambiguità di selezione.

Per costruire le altezze si usa lo strumento [Costruzioni]Retta Perpendicolare . Questo strumento crea l'unica retta perpendicolare a una direzione data, passante per un punto dato. Occorre dunque la selezione di un punto e di una retta o di un segmento, o una semiretta o di un lato di un poligono. L'ordine della selezione non ha importanza. Per costruire l'altezza per  $A$ , si selezionano il punto  $A$  e il lato  $BC$ . La stessa cosa si farà per le altezze per  $B$  e per  $C$ . Come per le mediane si sceglierà un colore per le altezze e si costruirà il loro punto di intersezione  $H$ .

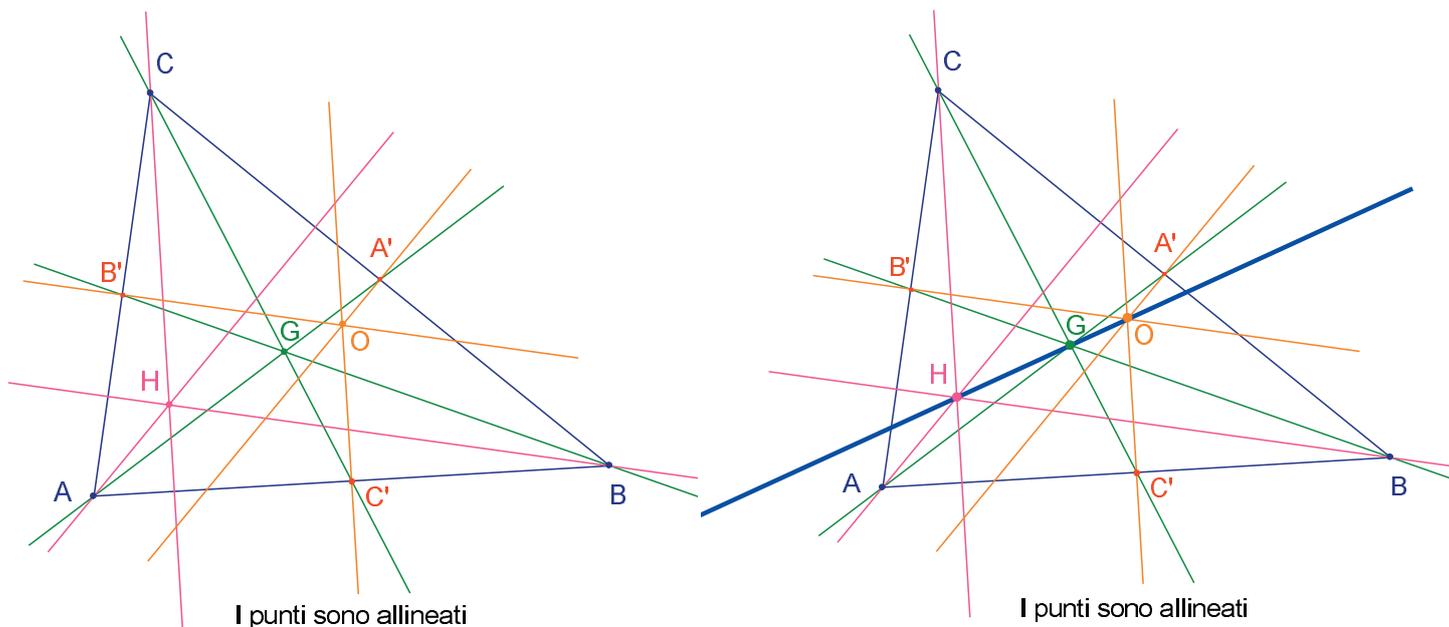
Lo strumento [Costruzioni]Asse  consente di costruire l'asse di due punti, di un segmento o di un lato di un poligono. Basta selezionare il segmento oppure i suoi estremi. Indichiamo con  $O$  il punto di incontro dei tre assi.



**Figura 2.4** – [A sinistra]. Le altezze sono costruite con lo strumento [Costruzioni]Retta Perpendicolare. [A destra]. Finalmente gli assi sono costruiti con l'aiuto dello strumento [Costruzioni]Asse.

Lo strumento [Proprietà]Allineato?  ci dà la possibilità di verificare se i tre punti  $O$ ,  $H$  e  $G$  sono allineati. Si selezionano successivamente questi punti, poi si indica una zona del foglio dove visualizzare il risultato. Il risultato è un testo, che indica se i punti sono o no allineati. Se la figura viene modificata, anche questo testo viene istantaneamente aggiornato assieme a tutti gli altri elementi della figura.

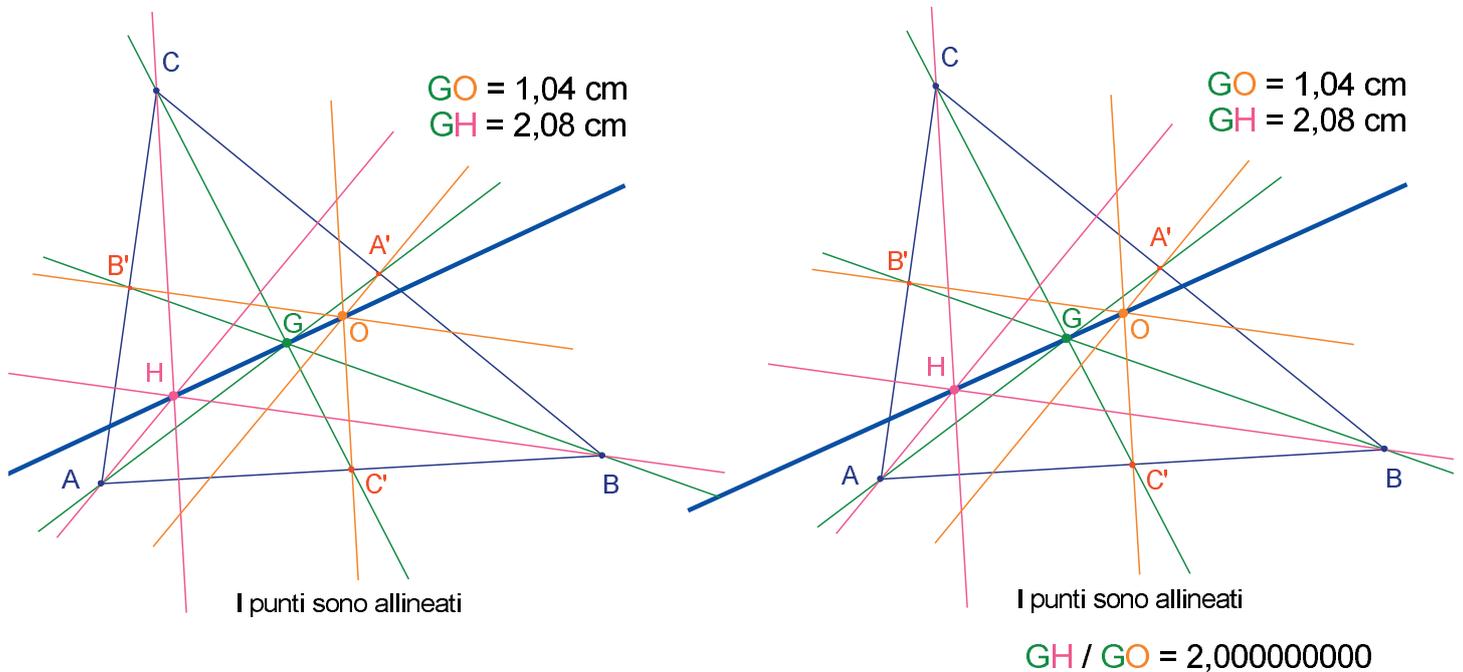
Con lo strumento [Oggetti Rettilinei]Retta , si costruisce la retta di Eulero del triangolo che passa per i tre punti  $O$ ,  $H$  e  $G$ , selezionando per esempio  $O$  e  $H$ . Lo strumento [Attributi]Spessore... , sarà utilizzato per evidenziare questa retta.



**Figura 2.5** – [A sinistra]. Verifica numerica dell'allineamento dei tre punti  $O$ ,  $H$  e  $G$ . Lo strumento **[Proprietà]Allineato?** costruisce il testo **I punti sono allineati** oppure...**non sono allineati**.

[A destra]. La retta di Eulero del triangolo messa in evidenza dal suo spessore, modificato con lo strumento **[Attributi]Spessore**.

Manipolando la figura si constata che il punto  $G$  sembra sempre restare tra  $O$  e  $H$  e anche che la sua posizione relativa sul segmento  $[OH]$  non cambia. Verifichiamolo, misurando le lunghezze  $GO$  e  $GH$ . Attiviamo lo strumento **[Misura]Distanza o Lunghezza** . Questo strumento permette di misurare la distanza tra due punti o la lunghezza di un segmento, in relazione agli oggetti selezionati. Selezioniamo dunque  $G$  e poi  $O$ ; la distanza  $GO$  viene visualizzata, misurata in cm. Si fa lo stesso per  $GH$ . Una volta fatta la misura, si può editare il testo corrispondente, per esempio aggiungendo i caratteri **GO=** davanti al numero.



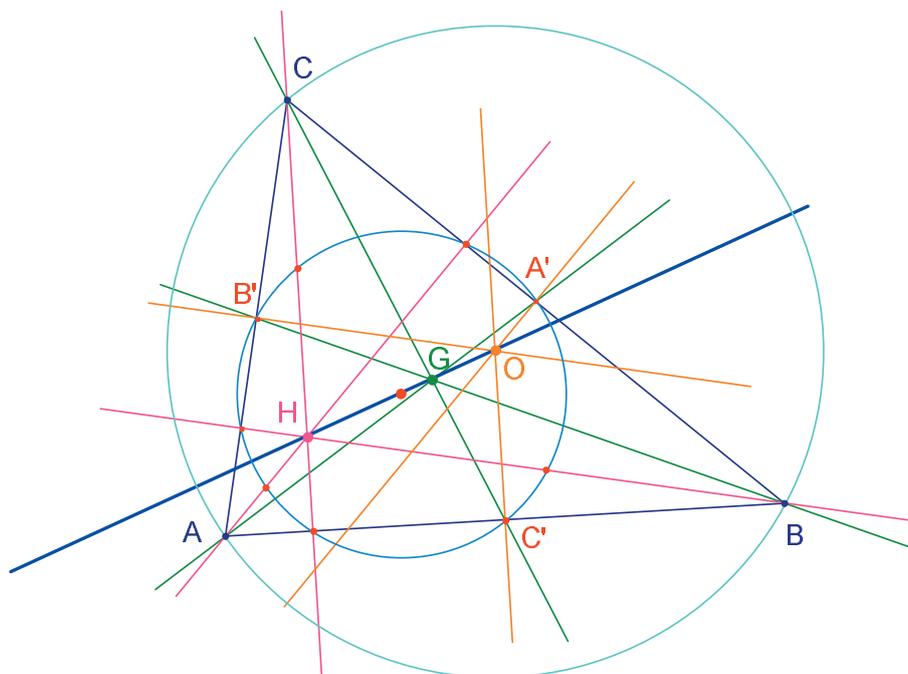
**Figura 2.6** – [A sinistra]. Lo strumento [Misura]Distanza o Lunghezza permette di ottenere le distanze GO e GH.

[A destra]. Con l'aiuto della calcolatrice – strumento [Misura]Calcolatrice – si calcola il rapporto GH/GO e si verifica numericamente che esso è uguale a 2.

Spostando la figura, si vede che GH sembra rimanere doppio di GO. Per verificarlo, possiamo calcolare il rapporto GH/GO. Attiviamo lo strumento [Misura]Calcolatrice... . Si seleziona allora la distanza GH, poi l'operatore / (la barra della divisione) e la distanza GO. Si clicca sul tasto = per ottenere il risultato, che si può trascinare e disporre sul foglio. Quando un numero è selezionato (strumento [Manipolazione]Puntatore ) , si possono aumentare e diminuire le cifre decimali visualizzate con l'aiuto dei tasti + e -. Si potrà così visualizzare il rapporto GH/GO con una decina di cifre, dopo la virgola, per constatare che esso rimane uguale a 2.

**Esercizio 1** - Completare la figura costruendo la circonferenza circoscritta al triangolo (centro in O e passante per A, B e C). Si utilizzerà lo strumento [Curve]Circonferenza .

**Esercizio 2** - Costruire in seguito la «circonferenza dei nove punti» del triangolo. Si tratta della circonferenza di centro il punto medio di OH, passante per i punti medi A', B', C' dei lati, per i piedi delle altezze e per i punti medi dei segmenti [HA], [HB] e [HC].



**Figura 2.7** – La figura finale, con la circonferenza circoscritta al triangolo e la "circonferenza dei nove punti" del triangolo.

## LA RICERCA DEL PUNTO MISTERIOSO

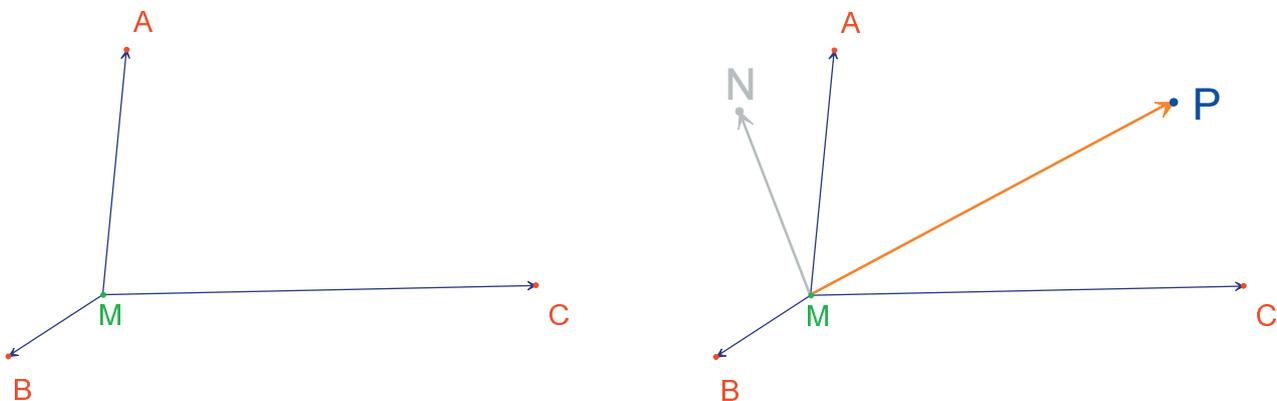
In questo capitolo presentiamo un'attività che applica le possibilità di esplorazione offerte da Cabri II Plus. A partire da tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dati, vogliamo ricercare i punti  $M$  che verificano l'uguaglianza vettoriale.

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$$

Costruiamo quattro punti qualunque con lo strumento [Punti]Punto , e li chiamiamo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  «al volo», ossia scrivendo il loro nome sulla tastiera subito dopo la loro creazione. Cabri II Plus permette di creare dei vettori. Ogni vettore è classicamente rappresentato da un segmento orientato. Costruiamo ora il segmento orientato che rappresenta il vettore  $\vec{MA}$  con lo strumento [Oggetti Rettilinei]Vettore , selezionando dapprima  $M$  e poi  $A$ . Questo segmento orientato ha la sua origine in  $M$ . Si fa lo stesso per  $\vec{MB}$  e per  $\vec{MC}$ .

Si costruisce poi un segmento orientato che rappresenta la somma  $\vec{MA} + \vec{MB}$  selezionando lo strumento [Costruzioni]Somma di Vettori , poi i due vettori e infine l'origine del vettore somma; qui sceglieremo  $M$ . Chiamiamo  $N$  l'estremo di questo segmento orientato.

Si costruisce infine un rappresentante della somma di tre vettori, con  $M$  come origine nello stesso modo, sommando  $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB}$  e  $\vec{MC}$ . Chiamiamo  $P$  l'estremo di questo segmento orientato che rappresenta il vettore somma.



**Figura 3.1** – [A sinistra]. A partire da tre punti qualunque  $A$ ,  $B$  e  $C$  e da un punto  $M$ , si costruiscono i segmenti orientati che rappresentano i vettori,  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ , e  $\vec{MC}$ . [A destra]. Con l'aiuto dello strumento [Costruzioni]Somma di Vettori, si costruisce  $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB}$ , e  $\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ .

Possiamo dapprima ricercare le soluzioni del problema agendo sulla figura. Per fare questo, si seleziona lo strumento [Manipolazione]Puntatore  e si sposta il punto  $M$ . Durante lo spostamento la somma dei tre vettori viene aggiornata istantaneamente. In funzione della posizione di  $M$  rispetto ai punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ , si osserva la lunghezza e il verso del vettore  $\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ . Possiamo allora fare le osservazioni e congetture seguenti (tra le altre):

- Un'unica posizione del punto  $M$  permette di annullare la somma dei tre vettori: il problema ha quindi un'unica soluzione. Questa soluzione è all'interno del triangolo  $ABC$ .
- Il quadrilatero  $MANB$  è un parallelogramma.
- Il quadrilatero  $MCPN$  è un parallelogramma.
- Affinché la somma sia nulla, i vettori  $\vec{MN}$  e  $\vec{MC}$  devono essere collineari, avere lo stesso modulo e verso opposto, cioè devono essere opposti.
- $\vec{MP}$  passa sempre per uno stesso punto e questo punto è la soluzione del problema.
- L'estremo  $P$  del segmento orientato che rappresenta la somma è un punto dipendente da  $M$ . Quindi si definisce in questo modo una trasformazione, che associa  $P$  a  $M$ . La soluzione del problema è un punto invariante di questa trasformazione.

Seguendo le constatazioni fatte, la ricerca si orienterà in una o nell'altra direzione. Supponiamo per esempio di aver osservato che i vettori  $\vec{MN}$  e  $\vec{MC}$  devono essere opposti. Si pone allora un altro problema: per quali posizioni di  $M$  questi due vettori sono collineari? Spostiamo  $M$  in modo che i due vettori siano collineari. Si osserverà che  $M$  percorre una retta e che questa retta passa per  $C$  e anche per il punto medio di  $[AB]$ . Questa retta è dunque la mediana per  $C$  del triangolo  $ABC$ . Il punto cercato è quindi l'intersezione delle tre mediane (baricentro), perché  $A$ ,  $B$  e  $C$  giocano lo stesso ruolo: il punto giace dunque anche sulle altre mediane.

È possibile proporre una costruzione del punto ottenuto precedentemente come soluzione e dimostrare questa congettura scoperta tramite l'esplorazione della figura. Il potere di convinzione di una costruzione dinamica è molto più elevato di quello di una figura statica realizzata su un foglio di carta. In effetti, in un gran numero di casi, è sufficiente una manipolazione della figura per verificare la congettura. Nella grande maggioranza dei casi una congettura che resta valida dopo la manipolazione della figura sarà corretta.

Per una migliore utilizzazione in classe di questo problema, sarà interessante affrontare i seguenti punti (tra gli altri):

- Una costruzione dinamica corretta in senso visuale è corretta?
- Una costruzione dinamica corretta costituisce una risposta al problema?
- In quale momento un ragionamento può essere considerato una dimostrazione?
- Cosa manca a una costruzione dinamica corretta per farne una dimostrazione?
- La dimostrazione deve essere basata sui processi di elaborazione della figura?

**Esercizio 3** - Estendere il problema a quattro punti, cercando il punto  $M$  tale che:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 0$$

**Esercizio 4** - Enumerare l'insieme dei «percorsi di esplorazione» e di dimostrazione sul problema iniziale (tre punti) che sia accessibile ad un allievo di terza liceo.

**Esercizio 5** - Studiare e costruire il punto  $M$  che rende minima la somma delle distanze da tre punti  $A, B, C$  dati. Si ottiene il punto di *Fermat*<sup>1</sup> del triangolo  $ABC$ .

<sup>1</sup>Pierre Simon de Fermat, 1601-1665

## IL QUADRILATERO DI VARIGNON

In questo capitolo presentiamo qualche costruzione riguardante il teorema di *Varignon*<sup>1</sup>.

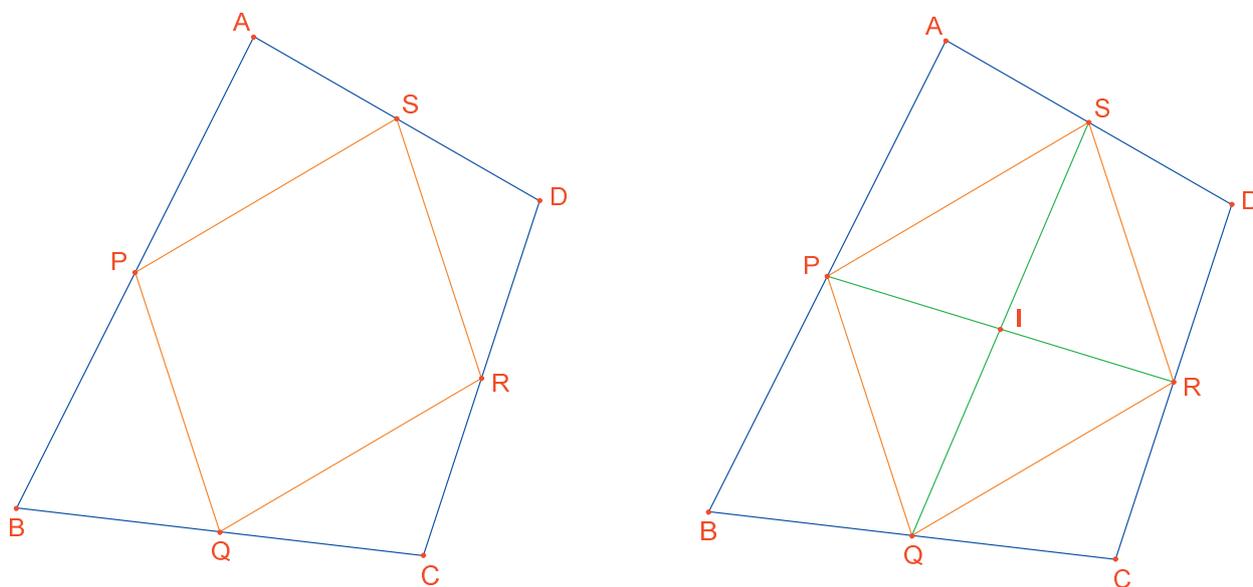
Costruiamo un quadrilatero qualunque  $ABCD$ . Si attiva lo strumento [Oggetti rettilinei]Poligono , poi si selezionano quattro punti, denominati  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  «al volo». Per terminare il disegno del poligono, si rifeleziona il punto  $A$  dopo aver costruito il punto  $D$ .

Si costruiscono poi i punti medi  $P$  di  $[AB]$ ,  $Q$  di  $[BC]$ ,  $R$  di  $[CD]$  e  $S$  di  $[DA]$  con lo strumento [Costruzioni]Punto Medio . Questo strumento richiede la selezione di  $A$  e poi di  $B$  per costruire il punto medio di  $[AB]$ . Si può anche selezionare direttamente il segmento  $[AB]$  se esso esiste già, tanto che sia un segmento oppure il lato di un poligono, come si ha in questo caso.

Si costruisce infine il quadrilatero  $PQRS$  con lo strumento [Oggetti Rettilinei]Poligono .

Manipolando la costruzione con lo strumento [Manipolazione]Puntatore , si osserva che  $PQRS$  sembra essere sempre un parallelogramma. Proviamo a interrogare Cabri Il Plus sul parallelismo di  $[PQ]$  e  $[RS]$ , così come di  $[PS]$  e  $[QR]$ , utilizzando lo strumento [Proprietà]Parallelo? . Si selezionano i lati  $[PQ]$  e poi  $[RS]$ ; verrà visualizzato un messaggio, confermando che i due lati sono paralleli.

<sup>1</sup>Pierre Varignon, 1654-1722



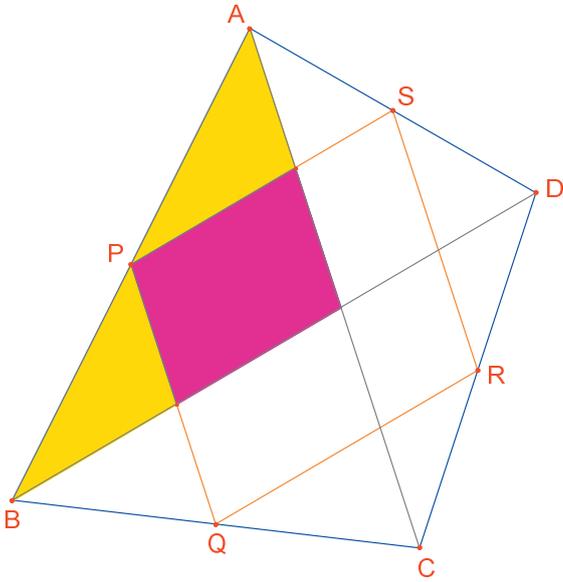
**Figura 4.1** – [A sinistra]. A partire da un quadrilatero qualunque  $ABCD$ , si costruisce il quadrilatero  $PQRS$  i cui vertici sono i punti medi dei lati di  $ABCD$ .  
[A destra]. Costruzione delle diagonali di  $PQRS$ , in cui si vede che esse si incontrano nel loro punto medio.

Costruiamo dunque le due diagonali  $[PR]$  e  $[QS]$  con l'aiuto dello strumento [Oggetti Rettilinei]Segmento , e il loro punto di intersezione  $I$  con lo strumento [Punti]Punto . Esistono più modi di dimostrare che  $I$  è il punto medio del segmento  $[PR]$  e anche di  $[QS]$ , e dunque che  $PQRS$  è un parallelogramma. Per esempio con un calcolo baricentrico:  $P$  è il baricentro di  $\{(A,1),(B,1)\}$  e  $R$  di  $\{(C,1),(D,1)\}$ , e dunque il punto medio di  $[PR]$  è il baricentro di  $\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$ , e questo vale anche per il punto medio di  $[QS]$ . Dunque i due punti medi coincidono in un punto che è il punto di intersezione  $I$ .

Il **teorema di Varignon** è il seguente:

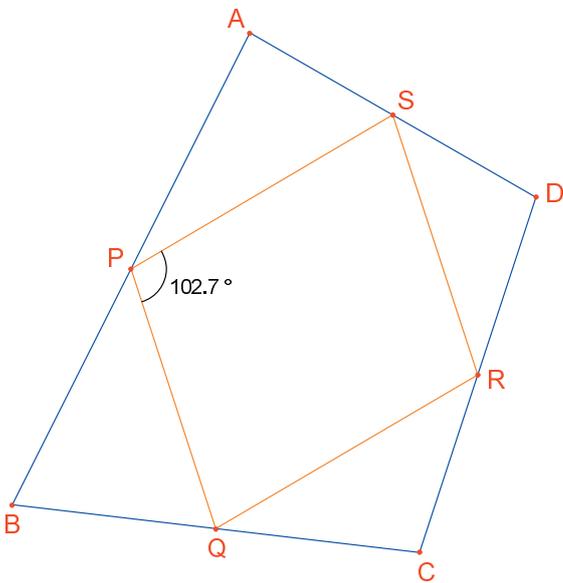
Il quadrilatero  $PQRS$ , costruito a partire dai punti medi di un quadrilatero  $ABCD$  qualunque, è un parallelogramma e la sua area è la metà di quella di  $ABCD$ .

**Esercizio 6** - Abbiamo stabilito qui sopra la prima parte del teorema. Dimostrare la seconda parte relativa all'area di  $PQRS$ . Per fare questo ci si potrà aiutare con la **figura**.



**Figura 4.2** – Costruzione che permette di stabilire la seconda parte del teorema di Varignon.

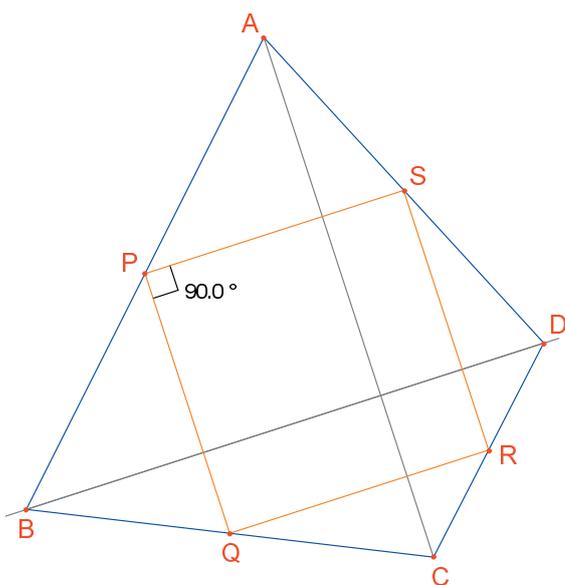
Lasciamo ora i punti  $A, B, C$  fissi, e spostiamo  $D$  in modo da rendere  $PQRS$  un rettangolo. Poiché sappiamo già che  $PQRS$  è un parallelogramma, è sufficiente che uno dei suoi angoli sia retto per potere affermare che è un rettangolo. Misuriamo dunque l'angolo in  $P$ , con l'aiuto dello strumento [\[Misura\] Misura dell'Angolo](#) . Questo strumento richiede la selezione di tre punti che definiscono un angolo, di cui il secondo punto è il vertice. Per esempio qui si selezioneranno i punti  $S, P$  (il vertice dell'angolo) e  $Q$ .



**Figura 4.3** – Si misura l'angolo in  $P$  del parallelogramma  $PQRS$ .

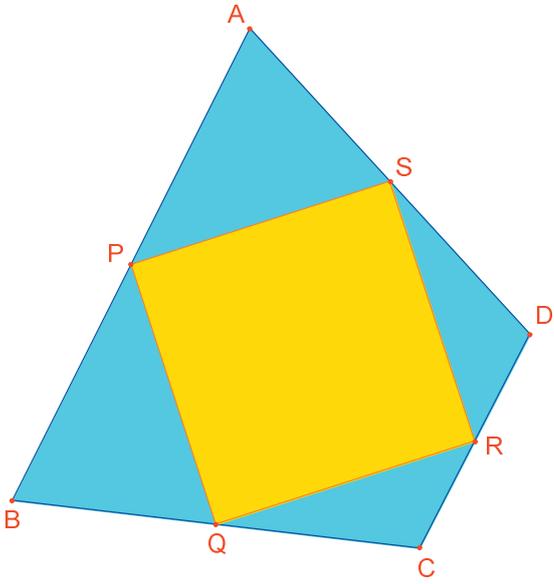
Lo strumento [Misura]Misura dell'Angolo  può anche dare la misura di un angolo precedentemente segnato con lo strumento [Testo e Simboli]Segna un Angolo . Questo strumento richiede tre punti che definiscono un angolo, nello stesso ordine usato con lo strumento [Misura]Misura dell'Angolo . Spostando  $D$  in modo che il quadrilatero  $PQRS$  sia un rettangolo, le soluzioni trovate sembrano sensibilmente allineate. Infatti, se si costruiscono le diagonali  $[AC]$  e  $[BD]$  del quadrilatero iniziale, si vede che i lati di  $PQRS$  sono paralleli a queste diagonali. Ne segue che  $PQRS$  sarà un rettangolo se, e solamente se,  $[AC]$  e  $[BD]$  sono perpendicolari. Ci proponiamo ora di ridefinire il punto  $D$  affinché  $PQRS$  sia sempre un rettangolo. Tracciamo la retta  $(AC)$  con lo strumento [Oggetti Rettilinei]Retta , selezionando  $A$ ,  $C$  e poi la perpendicolare a questa retta passante per  $B$ , con lo strumento [Costruzioni]Retta Perpendicolare , selezionando  $B$  e la retta  $(AC)$ .

Il punto  $D$  è attualmente un punto libero nel piano. Andiamo a modificare la sua definizione e a renderlo un punto appartenente alla retta perpendicolare ad  $[AC]$  e passante per  $B$ . Si attiva lo strumento [Costruzioni]Ridefinizione di un Oggetto , poi si seleziona  $D$ . Apparirà un menu che indica le diverse opzioni per la ridefinizione di  $D$ . Si sceglie [Punti]Punto su un Oggetto , poi si seleziona un punto sulla perpendicolare. Il punto  $D$  si sposta allora nella posizione indicata ed è ora costretto a rimanere sulla perpendicolare ad  $[AC]$  passante per  $B$ . La ridefinizione di un oggetto è un mezzo di esplorazione molto potente, che permette di togliere o aggiungere dei gradi di libertà agli elementi di una figura senza doverla ricreare interamente.



**Figura 4.4** – Il punto  $D$  è ora ridefinito in modo che  $PQRS$  sia sempre un rettangolo. Questo punto conserva ancora un grado di libertà; è mobile su una retta.

**Esercizio 7** - Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché  $PQRS$  sia un quadrato. Ridefinire nuovamente il punto  $D$  in modo che la costruzione fornisca solo dei quadrati.



**Figura 4.5** – Qui, il punto D non ha più alcun grado di libertà e quindi PQRS è sempre un quadrato