

# CABRI<sup>®</sup> II Plus



Software Matematici Innovativi

---

**APPROFONDIMENTO**

# BIENVENUE !

Benvenuto nella parte di **Approfondimento** del Manuale Utente di Cabri II Plus.

Questa sezione, divisa in tre capitoli, presenta dei problemi matematici di livello avanzato che grazie all'utilizzazione di Cabri II Plus diventano divertenti da esplorare e semplici da risolvere. Con questi problemi si conclude il **Manuale** per gli utenti desiderosi di proseguire nella scoperta del software.

Questi problemi sono stati pensati per studenti degli anni terminali di liceo o di livello universitario. I problemi sono indipendenti gli uni dagli altri. In questo modo il lettore è invitato a ispirarsi ai metodi di costruzione proposti e a fare gli esercizi corrispondenti. Gli esercizi segnati con un asterisco hanno un maggior grado di difficoltà.

# INDICE

## APPROFONDIMENTO

CAPITOLO

1

TRIANGOLI PEDALI

P 4

CAPITOLO

2

FUNZIONI

P 9

CAPITOLO

3

TASSELLAZIONI

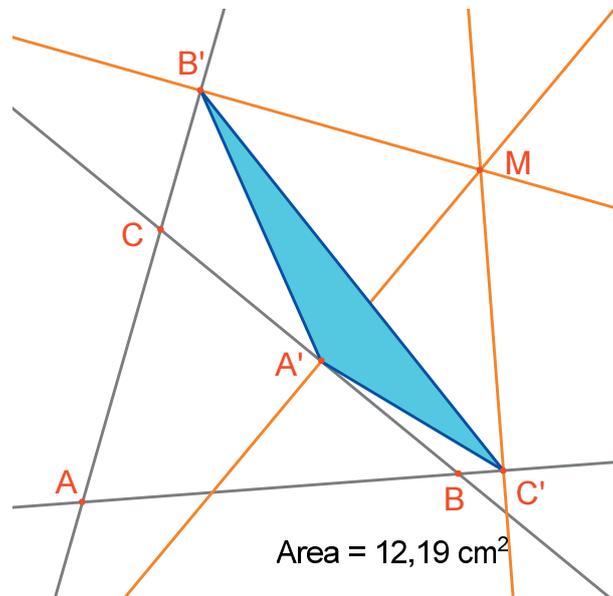
P 14



## TRIANGOLI PEDALI

Siano dati tre punti qualunque  $A$ ,  $B$  e  $C$ , costruiti con lo strumento [Punti]Punto . Si costruiscono dapprima le tre rette  $(AB)$ ,  $(BC)$  e  $(CA)$ , con lo strumento [Oggetti Rettilinei]Retta . Sia ora dato un punto qualunque  $M$  del piano e le proiezioni ortogonali  $C'$ ,  $A'$  e  $B'$  di  $M$  su queste tre rette. Questi punti sono ottenuti costruendo le rette perpendicolari a  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(CA)$  passanti per  $M$ , con l'aiuto dello strumento [Costruzioni]Retta Perpendicolare , poi con l'intersezione di queste rette con  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , utilizzando lo strumento [Punti]Punto . Lo strumento [Punti]Punto  permette di costruire implicitamente le intersezioni tra oggetti. Basta spostare il cursore vicino a una di queste intersezioni e il programma visualizza il messaggio [Punto in questa intersezione](#), o [Intersezione di...](#) e poi un menu in caso di ambiguità.

I tre punti  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  definiscono un triangolo che viene tracciato utilizzando lo strumento [Oggetti Rettilinei]Triangolo . Questo triangolo viene chiamato triangolo pedale relativo ad  $ABC$ . Si può colorare l'interno del triangolo pedale con lo strumento [Attributi]Riempimento . Ci interessa l'area di questo triangolo in funzione della posizione del punto  $M$ . L'area del triangolo è ottenuta con lo strumento [Misura]Area . È uno strumento che fornisce un'area «geometrica», sempre positiva o nulla, se non si tiene conto dell'orientamento del triangolo. Si ottiene una misura in  $\text{cm}^2$  che si può disporre liberamente sul foglio di lavoro. Il menu contestuale, che viene visualizzato cliccando con il tasto destro del mouse sul numero, permette di visualizzare - se si vuole - l'area «algebrica», il cui segno dipende dall'orientamento del triangolo.

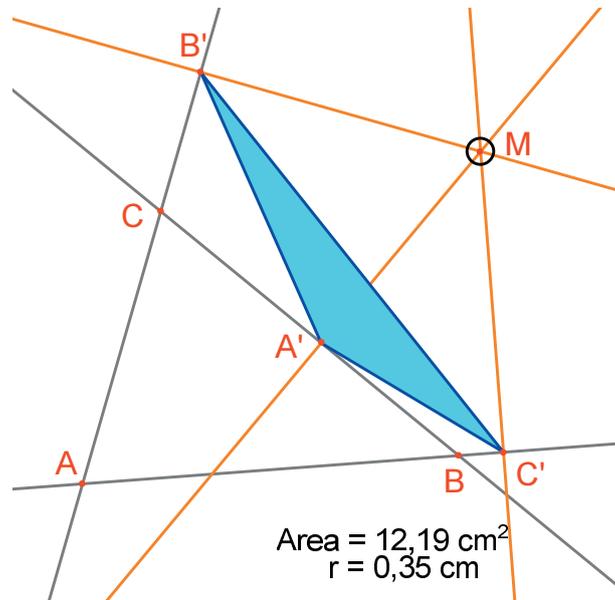


**Figura 1.1** - Il triangolo pedale corrispondente a  $M$  e la sua area.

Andiamo ora a studiare la variazione dell'area del triangolo  $A'B'C'$  in funzione della posizione di  $M$ . Per fare questo, esistono più possibilità. Si può, per esempio, attivare la traccia del punto  $M$  (strumento [Testo e Simboli]Traccia ) e poi spostarlo tentando di mantenere costante l'area di  $A'B'C'$ . Le posizioni successive di  $M$  resteranno visualizzate, e si avrà così un'immagine approssimata di una curva di livello della funzione che restituisce l'area di  $A'B'C'$ . Un'altra possibilità consiste nell'utilizzare i luoghi di punti su una griglia, per dare una rappresentazione visuale dell'area di  $A'B'C'$  per un grande numero di posizioni di  $M$ .

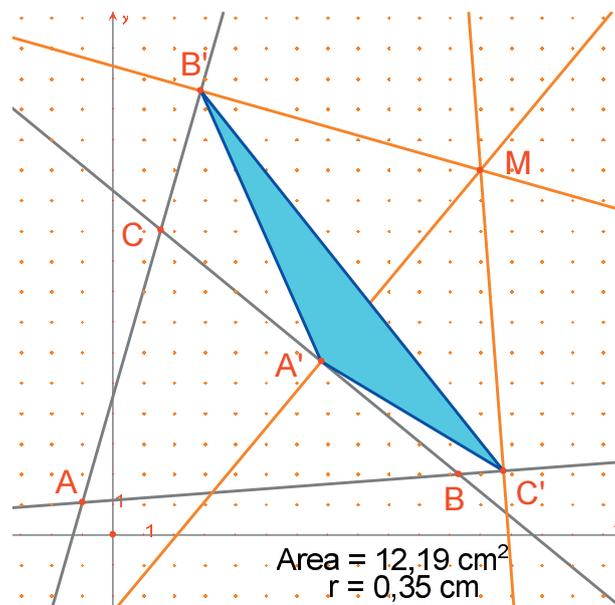
Qui scegliamo quest'ultima possibilità e andiamo a tracciare un cerchio di centro  $M$  avente l'area proporzionale a quella di  $A'B'C'$ . Per fare questo, occorre prima calcolare il raggio del cerchio in modo che sia proporzionale alla radice quadrata dell'area del triangolo. Attiviamo lo strumento [Misura]Calcolatrice , scriviamo l'espressione `sqrt` (e poi selezioniamo il numero che rappresenta l'area del triangolo per includerlo nell'espressione, che diventa `sqrt (a)`. Chiudiamo poi la parentesi e dividiamo per 10, per evitare di avere dei cerchi troppo grandi. L'espressione nella calcolatrice è ora `sqrt (a) /10`. La si valuta cliccando sul tasto `=`, poi si clicca sul risultato e si effettua un trascinamento-rilascio del numero ottenuto sul foglio di lavoro.

Per tracciare una circonferenza di centro  $M$  e avente il raggio calcolato in precedenza, si attiva lo strumento [Costruzioni]Compasso . Si seleziona il numero precedentemente posto sul foglio di lavoro, poi il punto  $M$ . Si ottiene allora la circonferenza di centro  $M$  e di raggio voluto. Si può già osservare, in modo visuale, come cambia l'area del triangolo in funzione della posizione del punto  $M$ .



**Figura 1.2** - Si disegna un cerchio di centro  $M$  con area proporzionale a quella di  $A'B'C'$ .

Ora andiamo a visualizzare una griglia di punti, poi a ridefinire  $M$  come punto appartenente a questa griglia e infine a tracciare tutti i cerchi che rappresentano l'area del triangolo pedale definito da  $M$ , con  $M$  che percorre tutti i punti della griglia. Per definire una griglia, serve un sistema di assi cartesiani. Prendiamo gli assi definiti per default presenti in ogni figura. Per visualizzarli si sceglie l'opzione [Attributi]Mostra gli Assi . Si attiva poi lo strumento [Attributi]Griglia , e si selezionano gli assi. Apparirà una griglia di punti.

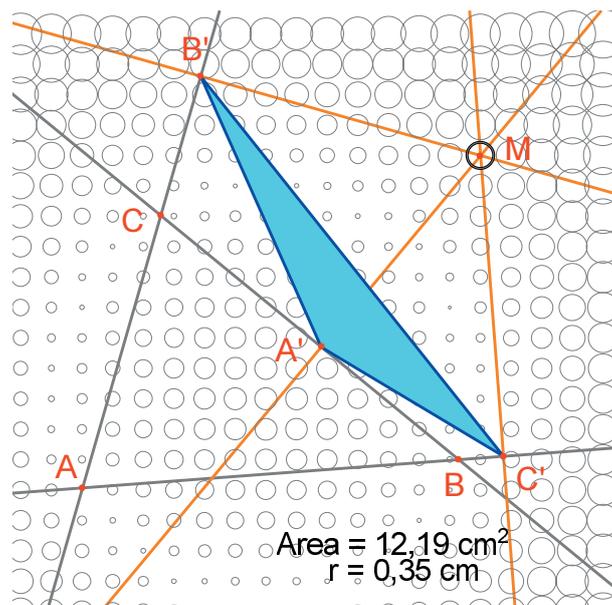


**Figura 1.3** - Si costruisce una griglia rispetto agli assi di default della figura e poi si ridefinisce  $M$  come punto appartenente alla griglia.

Il punto  $M$  è un punto libero nel piano; andiamo a ridefinirlo per vincolarlo a stare sulla griglia. Attiviamo lo strumento [Costruzioni]Ridefinizione di un Oggetto , e selezioniamo il punto  $M$ . Nel menu che allora appare, scegliamo l'opzione Punto su un oggetto e selezioniamo un punto della griglia. Il punto  $M$  è ora condizionato a rimanere sulla griglia.

Lo strumento [Costruzioni]Luogo  permette di costruire l'insieme dei cerchi ottenuti al variare di  $M$  sulla griglia. Si seleziona la circonferenza e poi il punto  $M$  e si otterrà il luogo delle circonferenze quando  $M$  varia sulla griglia.

Si può dimostrare (si veda per esempio il libro di *Marcel Berger, Géométrie, edizioni CEDIC, Paris 1977*, paragrafo 10.4.5) che le curve di livello dei valori dell'area del triangolo pedale sono le circonferenze concentriche alla circonferenza circoscritta ad  $ABC$ . In particolare, l'area del triangolo  $A'B'C'$  è nulla se  $M$  appartiene alla circonferenza circoscritta ad  $ABC$ , o ancora, equivalentemente, che i punti  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  sono allineati se e solamente se il punto  $M$  appartiene alla circonferenza circoscritta a  $ABC$ .



**Figura 1.4** - Distribuzione dell'area del triangolo pedale in funzione della posizione di  $M$ .

**Esercizio 1** - Se  $M$  appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ , i tre punti  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  sono dunque allineati, e la retta passante per  $A'B'C'$  viene detta retta di *Simson*<sup>1</sup> associata al punto  $M$  (o retta di *Wallace*<sup>2</sup>. Questo risultato è stato a lungo attribuito a torto a *Simson*; è stato invece pubblicato prima da *Wallace*, nel 1799).

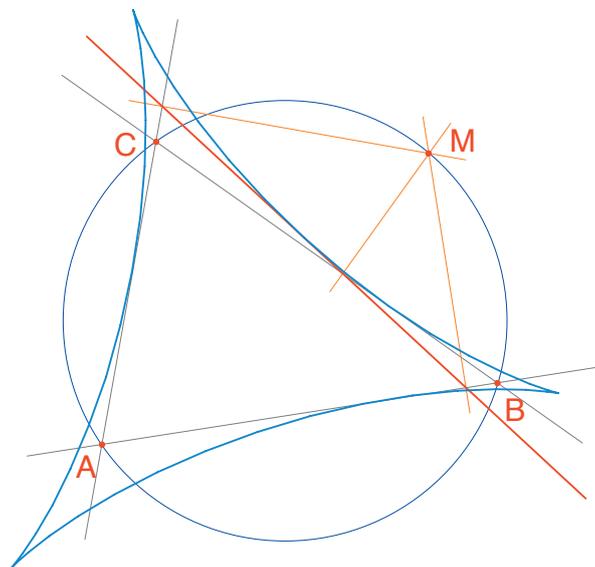
<sup>1</sup> Robert Simson, 1687-1768

<sup>2</sup> William Wallace, 1768-1843

<sup>3</sup> Jakob Steiner, 1796-1863

Costruire l'involuppo delle rette di Simson (utilizzare lo strumento [Costruzioni]Luogo ): per default, questo strumento fornisce, nel caso delle rette, non l'insieme delle rette, ma il suo involuppo. Questa curva, invariante per una rotazione di un angolo di  $120^\circ$ , si chiama una deltoide, perché ha la forma della lettera  $\Delta$ : è la deltoide di Steiner<sup>3</sup>. Si dimostra che è tangente alle tre rette  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(CA)$  e che è una curva algebrica di quarto grado. Si può controllare questo chiedendo la sua equazione con lo strumento [Measure]Coordinate o Equazioni .

**Esercizio 2** - Costruire il centro della curva deltoide dell'esercizio precedente, i tre punti di tangenza con le rette  $(AB)$ ,  $(BC)$  e  $(CA)$  le tre cuspidi della curva e la circonferenza massima inscritta nella curva.

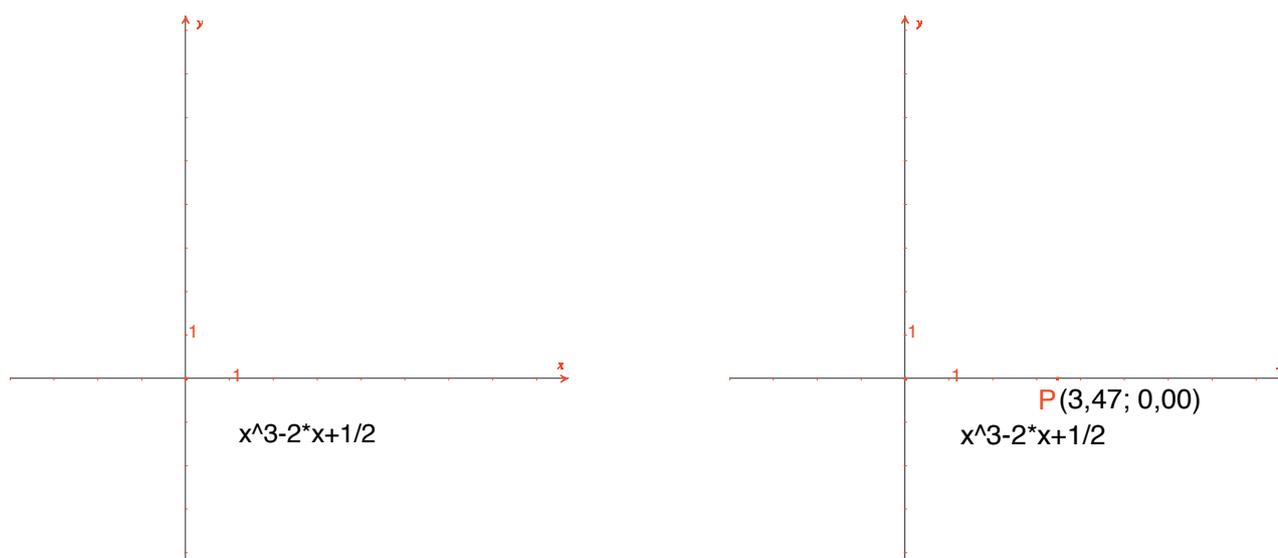


**Figura 1.5** - L'involuppo delle rette di Simson di un triangolo  $ABC$  è chiamata curva deltoide. Essa possiede le stesse simmetrie di un triangolo equilatero.

Grazie al suo sistema di assi e allo strumento Espressione, Cabri II Plus permette di costruire facilmente il grafico di una funzione e di utilizzare questo grafico per studiarla. In questo capitolo studieremo una funzione polinomiale di 3° grado,

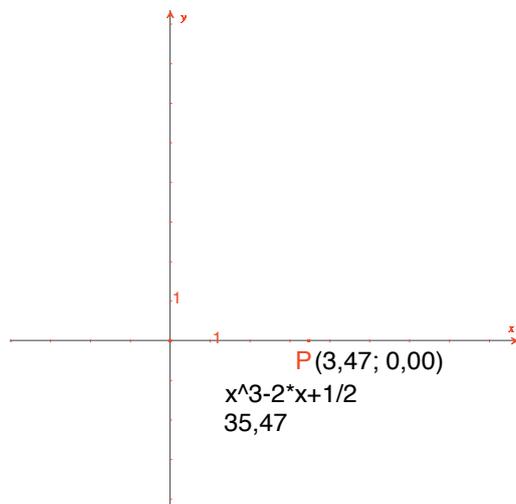
$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

Fin dall'inizio, rendiamo visibili gli assi coordinati, con [Attributi]Mostra gli Assi . In seguito, creiamo l'espressione corrispondente sul foglio. Un'espressione disposta sul foglio può in seguito essere calcolata per diversi valori delle sue variabili. Qui, attiviamo [Testo e Simboli] Espressione , e scriviamo  $x^3 - 2x + 1/2$ . I nomi delle variabili ammessi nelle espressioni sono le lettere  $a, b, c, \dots, z$ . Creiamo un punto  $P$  sull'asse delle ascisse con lo strumento [Punti]Punto . Le sue coordinate si ottengono con [Misura]Coordinate o Equazioni , selezionando  $P$ . Il testo che visualizza le coordinate è inizialmente fissato a  $P$  e si sposterà con il punto. Con lo strumento [Manipolazione]Puntatore , si possono «staccare» le coordinate dal punto  $P$  e disporle dove si vuole sul foglio. Si può anche fissarle nuovamente, avvicinandole al punto.



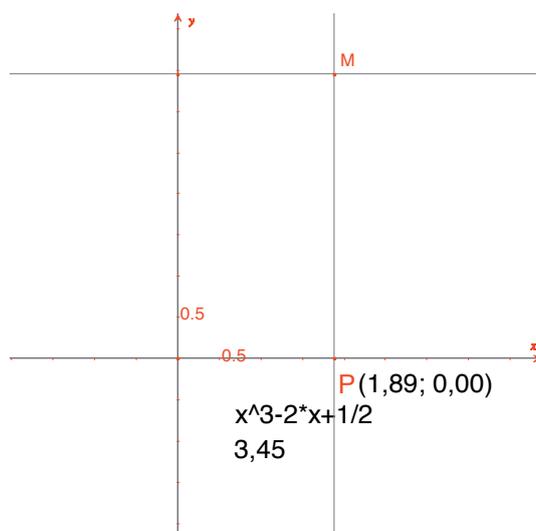
**Figura 2.1** - [A sinistra]. Si scrive l'espressione corrispondente alla funzione da studiare. [A destra]. Si crea un punto  $P$  sull'asse delle ascisse e si ottengono le sue coordinate con [Misura]Coordinate o Equazioni.

Si calcola in seguito il valore di  $f(x)$  dove  $x$  rappresenta l'ascissa di  $P$ . Per questo, si attiva lo strumento **[Misura]Applica un'Espressione**  e si seleziona l'ascissa di  $P$  nel testo che contiene le sue coordinate.



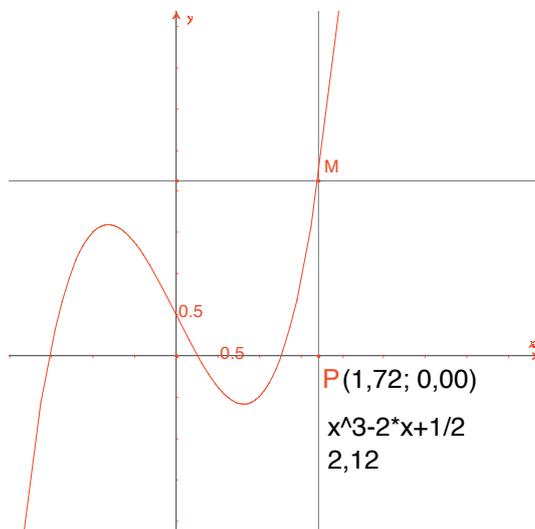
**Figura 2.2** - Lo strumento **[Misura]Applica un'Espressione** è utilizzato per calcolare il valore di  $f(x)$  quando  $x$  è l'ascissa di  $P$ .

Si riporta in seguito questo valore sull'asse delle ordinate, con lo strumento **[Costruzioni]Trasporto di Misura** , selezionando il valore da trasportare e poi l'asse delle ordinate. È sufficiente in seguito costruire le rette parallele agli assi passanti per questi due punti (**[Costruzioni]Retta Parallela** , e si otterrà alla loro intersezione il punto  $M$  di coordinate  $(x, f(x))$ . Nella **figura 2.3** abbiamo spostato il punto  $P$ , rispetto alla posizione nella **figura 2.2**, per portare nella parte visibile del foglio il punto dell'asse delle ordinate ottenuto con il trasporto di misura.



**Figura 2.3** - Costruzione del punto  $M(x, f(x))$ .

Il grafico della funzione è ottenuto visualizzando il luogo del punto  $M$  al variare di  $P$  sull'asse delle ascisse. Lo si costruisce con lo strumento [Costruzioni]Luogo , selezionando prima il punto  $M$  e poi  $P$ . Per inquadrare meglio la parte interessante del grafico della funzione, si può spostare l'origine del sistema di riferimento e le unità di misura sugli assi, tramite un trascinamento-rilascio dell'origine del sistema di riferimento o di una qualunque graduazione sugli assi.



**Figura 2.4** - Lo strumento [Costruzioni]Luogo permette infine di costruire il grafico della funzione.

Costruiamo ora un'approssimazione della retta tangente alla curva in un punto. Per  $h$  piccolo, si sa che

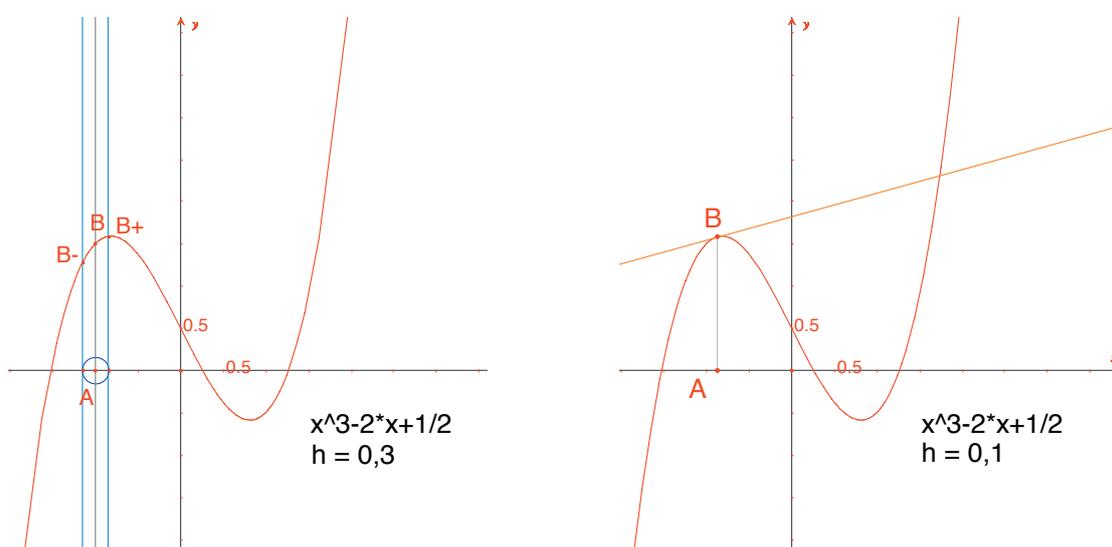
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Dal punto di vista geometrico, questa approssimazione equivale a prendere come direzione della tangente nel punto della curva di ascissa  $x$  quella della retta passante per i punti della curva di ascissa  $x - h$  e  $x + h$ .

Con lo strumento [Testo e Simboli]Numeri **2.1** , si introduce un valore di  $h$ , qui per esempio di 0,3, che conviene qui per queste costruzioni. Si potrà nel seguito modificarlo per sostituirlo con un valore più piccolo, che fornisca una migliore approssimazione. Si costruisce poi un punto  $A$  sull'asse delle ascisse e la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $h$ . Questa circonferenza è ottenuta con lo strumento [Costruzioni]Compasso , selezionando  $h$  e poi  $A$ . Le due intersezioni della circonferenza di centro  $A$  e di raggio  $h$  con l'asse delle ascisse hanno per ascisse  $x - h$  e  $x + h$ , se  $x$  è l'ascissa di  $A$ . Tracciamo le tre rette parallele all'asse delle ordinate ([Costruzioni]Retta Parallela ) e passanti rispettivamente per i due punti di intersezione e il punto  $A$ .

Le intersezioni di queste tre rette con la curva forniscono i punti  $B^-$ ,  $B$ ,  $B^+$  della curva di rispettive ascisse,  $x - h$ ,  $x$  e  $x + h$ .

Poiché la figura comincia a diventare un po' complessa, nascondiamo gli oggetti che non servono più. Si attiva lo strumento [\[Attributi\]Mostra/Nascondi](#) , e si selezionano gli oggetti da nascondere. Nascondiamo  $P$ ,  $M$ , le due rette servite per la costruzione di  $M$ , le coordinate di  $P$  e l'immagine dell'ascissa di  $P$  tramite la funzione. Gli oggetti nascosti non sono visibili nella figura e vengono visualizzati in forma tratteggiata solo quando lo strumento [\[Attributi\]Mostra/Nascondi](#)  è attivo. Per rendere visibile un oggetto nascosto è sufficiente selezionarlo nuovamente con lo stesso strumento.



**Figura 2.5** - Prendendo l'intersezione della circonferenza di centro  $A$  e di raggio  $h$ , si costruiscono i tre punti della curva di ascissa  $x - h$ ,  $x$  e  $x + h$ . L'approssimazione della retta tangente in  $B$ , dopo aver nascosto gli elementi della costruzione.

L'approssimazione della tangente in  $B$  è allora la parallela alla retta  $(B^- B^+)$  passante per  $B$ . Si costruisce questa retta con lo strumento [\[Oggetti Rettilinei\]Retta](#)  e poi la parallela con [\[Costruzioni\]Retta Parallela](#) . Si nasconde in seguito la retta  $(B^- B^+)$  e gli altri elementi della costruzione, per lasciare visibili solo  $h$ ,  $A$ ,  $B$  e la tangente in  $B$ . Si vede che il valore  $h = 0,3$  fornisce già un'approssimazione molto buona della retta tangente. Si può tuttavia migliorare l'approssimazione diminuendo  $h$ , per esempio prendendo  $h = 0,0001$ .

Lo spostamento del punto  $A$  sull'asse  $x$  permette di determinare in modo visuale le tre radici dell'equazione  $f(x) = 0$ , i due estremi locali di  $f$  e il punto di flesso della curva.

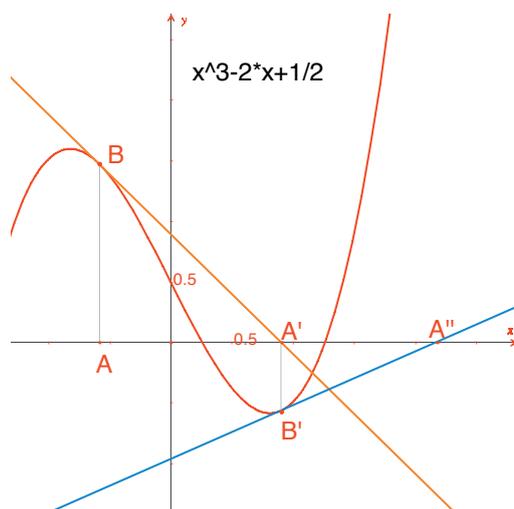
Per informazione, le tre soluzioni di  $f(x) = 0$  sono approssimativamente  $r_1 = -1,52568$ ,  $r_2 = 0,25865$ , e  $r_3 = 1,26703$ .

Le ascisse degli estremi relativi sono  $e_1 = -\sqrt{6}/3 \approx -0,81649$  e  $e_2 = \sqrt{6}/3 \approx 0,81649$ . Il punto di flesso è in  $(0 ; 1/2)$ .

**Esercizio 3** - Utilizzando la pendenza della retta tangente, tracciare il grafico approssimato della funzione derivata prima.

**Esercizio 4** - La tangente interseca l'asse delle ascisse in un punto  $A'$  di ascissa  $x'$ , che è in generale una migliore approssimazione della radice  $x$  se  $A$  è già nelle vicinanze di una radice di  $f(x) = 0$ . Questa constatazione è alla base del metodo iterativo delle tangenti di *Newton*<sup>1</sup> - *Raphson*<sup>2</sup> per trovare una radice approssimata di una equazione. Costruire  $A'$ , poi il suo iterato  $A''$  con lo stesso metodo e studiare in seguito la posizione di  $A''$  in funzione di quella di  $A$ . In particolare, si possono trovare due posizioni di  $A$ , oltre che le tre radici, per le quali  $A''$  ritorna in  $A$ .

Per informazione, queste sono le due radici reali di un polinomio di grado 6, che valgono approssimativamente  $-0,56293$  e  $0,73727$ . Si vede così che una cattiva scelta di  $A$  può fare divergere il calcolo, portando  $A$  su uno dei due punti in cui la derivata è nulla.



**Figura 2.6** - Le prime due iterazioni del metodo di Newton -Raphson a partire dal punto A.

**Nota:** Lo stesso grafico può essere ottenuto direttamente tramite lo strumento [\[Misura\]Applica un'Espressione](#). Selezionare prima l'espressione e poi uno dei due assi.

<sup>1</sup> Sir Isaac Newton, 1643-1727

<sup>2</sup> Joseph Raphson, 1648-1715



## TASSELLAZIONI

In questo capitolo costruiremo alcune tassellazioni del piano con dei poligoni. Cominciamo con qualche definizione semplificata, ma sufficiente per il seguito. Il lettore interessato potrà consultare il testo di riferimento di *Branko Grünbaum e Geoffrey C. Shephard, Tilings and Patterns, Freeman, New York 1987*. Sulle tassellazioni e sui gruppi di simmetria esiste anche un gran numero di siti Internet.

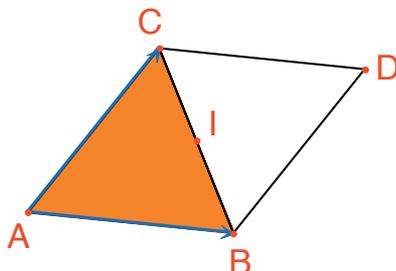
Si dice che un insieme di parti chiuse del piano è una tassellazione del piano (o pavimentazione) se gli interni delle parti sono disgiunti a due a due e l'unione di tutte le parti è l'intero piano. Queste parti sono chiamate mattonelle (o facce) della tassellazione. L'intersezione non ridotta a un punto di due mattonelle è chiamata spigolo della tassellazione, e l'intersezione ridotta a un punto di due o più mattonelle è chiamata vertice della tassellazione.

Per una tassellazione  $P$ , si indica con  $S(P)$  l'insieme delle isometrie  $f$  del piano tali che l'immagine di ogni mattonella di  $P$  tramite  $f$  è una mattonella di  $P$ .  $S(P)$  è un gruppo, chiamato il gruppo delle simmetrie della tassellazione. Per questo gruppo si possono considerare diversi casi:

- $S(P)$  non contiene alcuna traslazione.  $S(P)$  è allora isomorfo a un gruppo ciclico, eventualmente ridotto all'identità, generato da una rotazione di angolo  $2\pi/n$ , o a un gruppo diedrale, gruppo delle simmetrie di un poligono regolare con  $n$  lati.
- $S(P)$  contiene delle traslazioni di vettori tutti collineari.  $S(P)$  è allora isomorfo a uno dei 7 gruppi dei fregi.
- $S(P)$  contiene due traslazioni i cui vettori non sono collineari. Allora  $S(P)$  è isomorfo a uno dei 17 gruppi cristallografici e la tassellazione è detta periodica.

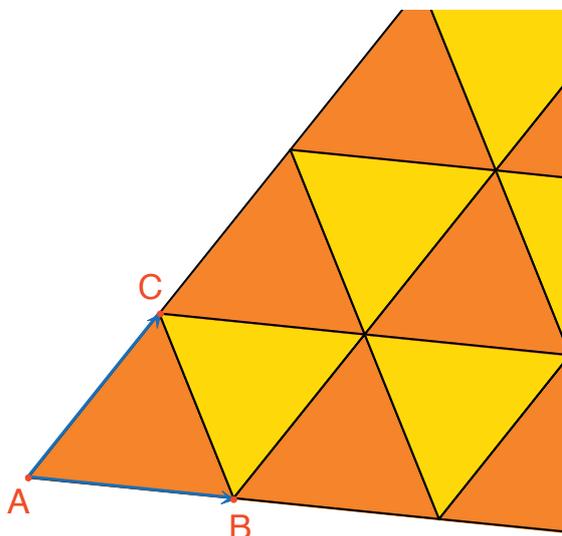
Se tutte le mattonelle della tassellazione possono essere ottenute tramite un'isometria a partire da una sola mattonella, si dice che la tassellazione è monoedrale. Qui ci interessiamo soltanto al caso delle tassellazioni monoedrali in cui le mattonelle sono dei poligoni.

Ci proponiamo innanzitutto di costruire una tassellazione monoedrale in cui una mattonella è un triangolo qualunque. Costruiamo un triangolo  $ABC$  qualunque con l'aiuto dello strumento [Oggetti Rettilinei]Triangolo , poi il punto medio  $I$  di uno dei lati, per esempio  $[BC]$ , con lo strumento [Costruzioni]Punto Medio . Sia  $D$  il simmetrico di  $A$  rispetto al punto  $I$ , ottenuto con lo strumento [Trasformazioni] Simmetria Centrale , selezionando dapprima l'oggetto da trasformare  $A$ , poi il centro di simmetria  $I$ .



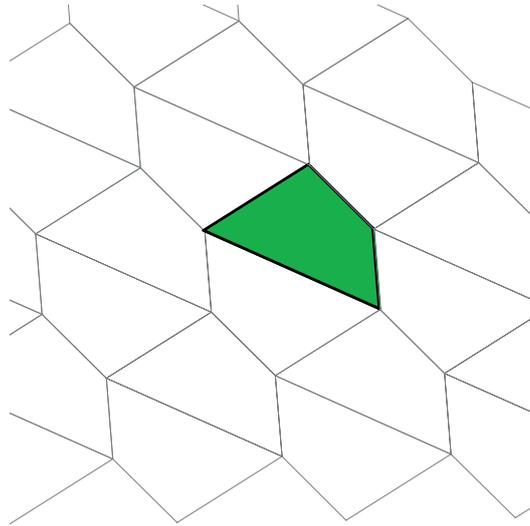
**Figura 3.1** - Si costruisce il simmetrico di un triangolo  $ABC$  rispetto al punto medio di uno dei suoi lati (qui,  $[BC]$ ). Si ottiene allora un parallelogramma  $ABDC$ .

Il quadrilatero  $ABDC$  è un parallelogramma e si può utilizzare per tassellare il piano. Si costruiscono i due vettori  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ , con lo strumento [Oggetti Rettilinei]Vettore , e poi vengono utilizzati per duplicare i triangoli  $ABC$  e  $BCD$  tramite una traslazione, con lo strumento [Trasformazioni]Traslazione .



**Figura 3.2** - Costruzione delle immagini dei due triangoli con le traslazioni di vettori  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .

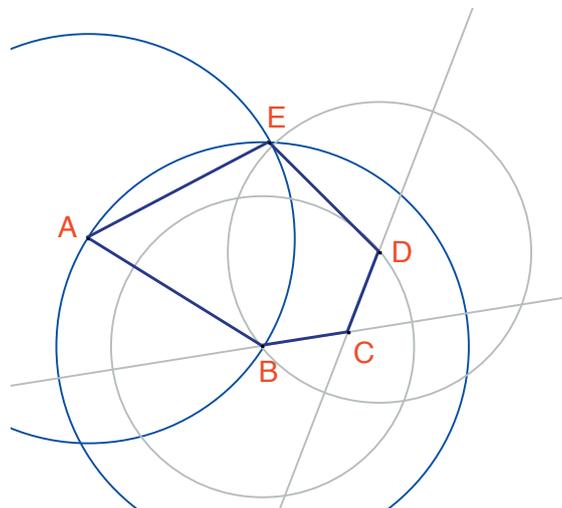
Lo stesso approccio permette di pavimentare il piano con un quadrilatero qualunque, convesso o no, ma non intrecciato. Si prende il simmetrico del quadrilatero rispetto al punto medio di un lato, e si otterrà un esagono con i lati paralleli due a due, che tassella il piano per traslazione.



**Figura 3.3** - Lo stesso tipo di costruzione permette di pavimentare il piano con un quadrilatero qualunque, eventualmente non convesso, purché non intrecciato.

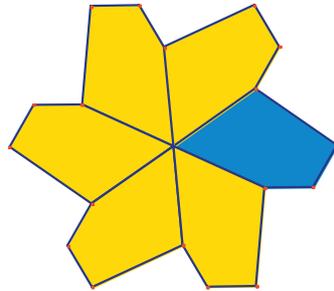
Il caso degli altri poligoni convessi è molto più complicato. A partire da 7 lati, si può dimostrare che nessun poligono convesso può pavimentare il piano. Ci sono 3 tipi di esagoni convessi che tassellano il piano, e almeno 14 tipi di pentagoni convessi che tassellano il piano, ogni tipo essendo definito da un insieme di condizioni sugli angoli e le lunghezze dei lati. Nel caso dei pentagoni, non si sa al momento attuale se i 14 tipi conosciuti forniscono tutte le soluzioni al problema. L'ultimo tipo conosciuto è stato scoperto nel 1985. Anche per i poligoni non convessi la questione, a nostra conoscenza, non è stata ancora risolta.

**Esercizio 5** - Costruire un pentagono convesso  $ABCDE$  che verifichi le condizioni seguenti: l'angolo in  $A$  è  $\hat{A} = 60^\circ$ , l'angolo in  $C$  è  $\hat{C} = 120^\circ$ ,  $AB = AE$ ,  $CB = CD$ . Queste condizioni non determinano un pentagono unico, ma una famiglia di pentagoni. Il numero di punti liberi della costruzione sarà dunque almeno tre.



**Figura 3.4** - Costruzione di un pentagono che verifica le condizioni  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 120^\circ$ ,  $AB = AE$  e  $CB = CD$ . I punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono liberi nel piano.

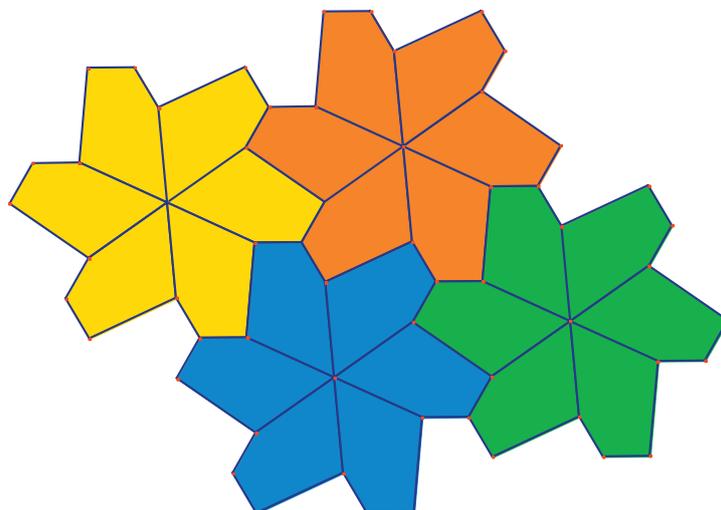
Con delle rotazioni successive di centro  $A$  e di angolo  $60^\circ$  (strumento [Traformazioni]Rotazione , che richiede inizialmente l'oggetto da trasformare, un angolo e il centro) costruire un «fiore» di 6 pentagoni. L'angolo è un numero scelto sul foglio con lo strumento [Testo e Simboli]Numeri .



**Figura 3.5** - Il pentagono di base è riprodotto con rotazioni di centro  $A$  e angolo di  $60^\circ$ , per formare un «fiore» a sei petali. I «fiori» sono assemblati tramite traslazione per ricoprire il piano.

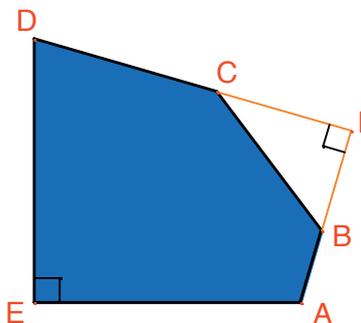
I «fiori» ottenuti possono allora essere assemblati tramite traslazione per pavimentare il piano. La tassellazione ottenuta è il «tipo 5» della classificazione data in *Tilings and Patterns*. Questa tassellazione è stata pubblicata da *K. Reinhardt* nel 1918.

Questa tassellazione è non solo monoedrale, ossia con tutte le mattonelle identiche a meno di isometrie, ma in più è anche isoedrale, ovvero tutte le mattonelle giocano lo stesso ruolo nella tassellazione. Più precisamente, se una isometria trasforma una mattonella in un'altra mattonella della tassellazione, allora questa isometria fa parte del gruppo delle simmetrie della tassellazione.



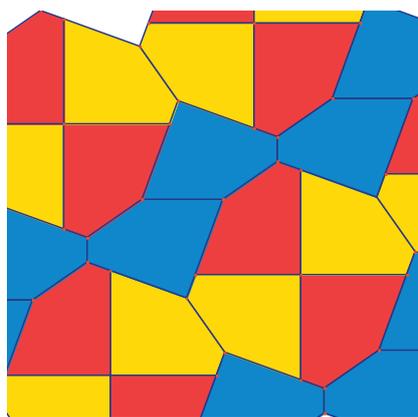
**Figura 3.6** - I «fiori» sono assemblati tramite traslazione per ricoprire il piano.

**Esercizio 6** - Costruire un pentagono ABCDE che verifica le condizioni  $\hat{E} = 90^\circ$ ,  $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ ,  $2\hat{B} - \hat{D} = 180^\circ$ ,  $\hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ ,  $EA = ED = AB + CD$ .



**Figura 3.7** - Pentagono di «tipo 10» secondo la classificazione del libro *Tilings and Patterns*. Questo pentagono serve come base per una tassellazione monoedrale del piano. I punti E e A sono liberi e il punto I è libero su un arco di circonferenza.

La tassellazione è realizzata facendo all'inizio tre copie della mattonella tramite rotazioni successive di  $90^\circ$  attorno al punto E, per ottenere un quadrato troncato. Poi questi quadrati troncati sono accostati in «strisce» tramite traslazione in una direzione. Le «strisce» di quadrati sono separate da «strisce» di pentagoni, come nella figura riportata di seguito.



**Figura 3.8** - Pavimentazione monoedrale con dei pentagoni convessi. Questa tassellazione è dovuta a Richard E. James II, trovata in seguito alla pubblicazione di un articolo di Martin Gardner nello *Scientific American* nel 1975. Si può trovare questo articolo, completato, in *Martin Gardner, Time travel and other mathematical bewilderments*, Freeman, 1987.