CABRI GEOMETRY™ II Plus

革新的数学ツール

ユーザーマニュアル

WELCOME !

カブリ・ジオメトリ™ のインタラクティブな世界へようこそ！

カブリ・ジオメトリ™ はじめにIMAGで、CNRS (National Center for Scientific Reasearch)とフランスのグルノーブルにあるジョゼフ・フーリエ大学の共同研究所で設計されました。1985年に、カブリ・ジオメトリの父といえるジョン・マリー・ラボルド氏が、易しく幾何を教え学べるようにするために、プロジェクトを立ち上げました。

今日では、1500万人以上のユーザーが、パソコン上やテキサス・インスツルメンツのグラフ電卓上で、カブリ・ジオメトリを楽しんでいます。

コンピュータによる幾何図形の作図は、ペン、紙、定規とコンパスを使った従来の作図に対して、まったく新しい領域を切り開きました。カブリ・ジオメトリⅡPlus (カブリ・ジオメトリ™) はより多くの高度な機能をもっているにもかかわらず、使いやすさを失っていません。平面図形や立体図形が簡単なものから複雑なものまで、描くことができてそれを使うことができます。どの段階でも、図形を自由に操作することができて、作図をテスト、推量、図形の計量、計算、消去、変更や、やり直しができます。カブリ・ジオメトリⅡPlusは幾何を学ぶための夢のソフトといえるでしょう。先生たちにとっても、小学生から大学生までのすべてのレベルの生徒にとってもそういえるでしょう。

プログラムのいくつかの特徴は、Macintosh/Windows 特有のものになっています。WindowsにおけるCtrlキーとAltキーは、Macintoshにおける ⌘ コマンドと、Alt ⌥ キーに対応しています。Windowsの右クリックは、MacのCtrl+クリックに対応しています。

・ インターフェース： 新しいアイコンは、大きく見やすいものとなりました。 選択のあいまいさを解決するためのポップアップメニューは、より直感的で分かりやすくなりました。属性の変更が数回のクリックでできるようになりました。

・ ラベル： すべての対象図形に名前をつけることができ、対象図形のまわりならば、どこへでも配置できます。

・ 式： ひとつ、または複数の変数を使って式を定めます。変数の数

値にしたがって、式の値が変化します。

・ パラメータとともに変化するグラフ: ひとつ、または複数の関数のグラフを簡単に描き調べることができます。パラメータを含む関数では、直接パラメータを変化させることによって、関数の変化の様子を調べることができます。

・ 軌跡: 点や対象図形の軌跡を表示させます。軌跡として表示させたものの軌跡や、軌跡との交点の軌跡なども表示させられます。また、[方程式、座標]ツールを使って、代数曲線の式を表示させることも出来ます。

・ スマートライン: 直線の必要な部分のみを表示させます。自由に長さを変えることができます。

・ 色: 新たに拡張されたパレットから対象図形とテキストの色、また塗りつぶす色を選びます。

・ 絵 (Bitmap,JPEG,GIF): 図形(点、線分、三角形、四角形)の中に絵をはりつけることができます。アニメーションや図形の変形操作によって、絵の形は変形します。

・ テキスト: スタイル、フォントテキストの色は自由に変えることができます。

・ ヒストリーウインドウ: すべての作図の段階を順に表示するウインドウが開きます。(Windowsのみ)

・ セッションの記録: このソフトウエアが使用されている間の使用状況(セッション)を記録します。これは、あとでディスプレイに表示すること、印刷することができて、生徒の進歩の様子をモニターすることができます。(Windowsのみ)

・ フィギュアのインポート/エクスポート: あなたのコンピュータから、TIのグラフ電卓であるCabri Junior (TI-83 Plus and TI-84 Plus)に、図形を移動させることが出来ます。

これらのユニークな機能により、生徒たちは新しい次元の学習経験を得ることが出来るでしょう。

このマニュアルは２つの部分からなっています。

第一部「発見 - 初心者のための使い方」は、始めてカブリを使われる方のための説明書です。カブリ・ジオメトリのインターフェース、マウスの使い方に慣れるためのものです。経験によれば、カブリ・ジオメトリはすぐになれることができ、教室では、半時間も経たないうちに、生徒たちはすでにこのソフトウェアで「幾何」をおこなっています。

第二部「発見しよう-中級編」は、このソフトを使い始めた方のもので、インタラクティブな幾何の世界を探検するための、高校レベルの課題を提案しています。

「リファレンス.pdf」 は、このソフトウエアのすべての機能を説明しています。

「高度な使い方.pdf」は、高度な内容、大学生レベルの内容を含みます。中に含まれる課題は色々あり、独立したつくりになっています。読者は、細かい作図の指示に従って作図を完成させ、次にExerciseに挑戦します。

以下、カブリ・ジオメトリ II Plusのことを単にカブリ・ジオメトリと呼びます。

私たちのウェブサイト、www.cabri.com（日本では、http://www.ies.co.jp/math/）からは、最新のアップデイトや製品ニュースが掲載され、特にこのマニュアルの新しいバージョンが取得可能です。また、いろいろなインターネットのページのリンクや、幾何学やカブリ・ジェオメトリについての情報が掲載されています。
皆様が作図を楽しみ、研究や発見の時間を楽しく過ごされることを、カブリログ社のスタッフ一同お祈りしております。

Author: Eric Bainville

翻訳： （株）アイ・イー・エス

Latest update: June, 30th 2005

For new versions: www.cabri.com

To report errors: support@cabri.com

Graphic design, page lay-out & Second readings: Cabrilog

CONTENTS

CHAPTER 1

始めましょう – 基礎編

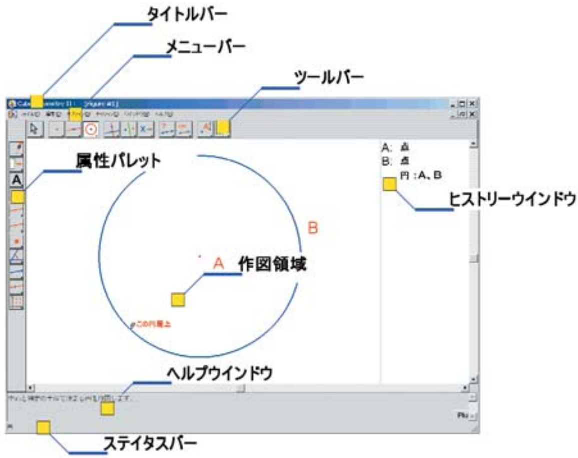
1.1 哲学

カブリ・ジオメトリはユーザーとソフトウェアとの相互関係（マウス、キーボード等）が最大のレベルで実現するように設計されています。一つ一つのケースでユーザーがソフトウェアの動きを予測できるようにすることとです。一方では、技術的な基準を尊重しながら、他方では、数学的にかなった道筋で作動するように考えられています。

カブリ・ジオメトリのドキュメントはバーチャルな1平方メートルの紙からなり、その上に自由に図形を描けるようになっています。図形は、標準的な幾何図形（点、直線、円、等）とその他のオブジェクト（数値、テキスト、式、等）を使いながら、作成されます。

ドキュメントには作図の**マクロ**も含めることができます。**マクロ**は一連の作図を記憶し、それをあとで使うことができます。それは、ソフトウェアの機能を拡張するものです。カブリ・ジオメトリでは、複数のドキュメントを同時に開くことができます。

1.2 ユーザー・インターフェース



上の図は、カブリ・ジオメトリのメイン・ウインドウとそのいろいろな領域の様子を示しています。カブリ・ジオメトリが初めてロードされたときは、属性のツールバーとテキスト・ウインドウは表示されていません。

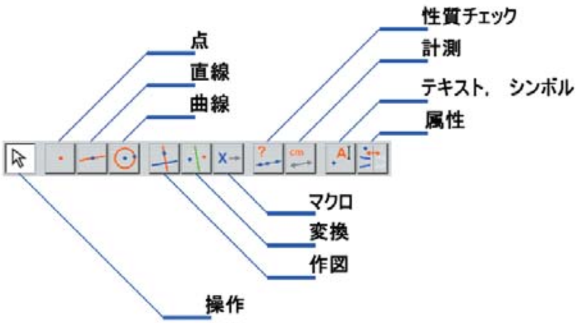
タイトルバーは作図した図形のファイルの名前を表しています。保存以前のときは Figure #1, 2... のように表示されます。

メニューバーからは、アプリケーションのコマンドを表示させることができます。それは、通常のソフトウェアと同じコマンドに関連するものです。

このマニュアルでは、[メニュー]内容、という書き方でメニューから選べるコマンドの内容を示します。　たとえば、[ファイル]保存、はファイルメニューから選べる保存のコマンドのことを表します。

ツールバーは、図形を作成し、修正するためのツールを表示します。それぞれのツールボックスはツールをいくつか含みますが、そのなかの一つのツールをバー上にアイコンで表示します。この使用可能なツールは、背景が白でボタンが押されたような形で示されます。　他のツールは、背景がグレーの押されていない形のボタンで示されています。ボタンを短く一度クリックすると、そのボタンのツールが使用可能な状態になります。ボタンをクリックして押したままにするとドロップダウンメニューでツールボックスが開きます。そのままカーソルを移動して、他のツールの上でクリックするとそのツールが使用可能な状態になり、ツールバーにアイコンが表示されます。

ツールバーはユーザーによって自由に変更でき、最終的に各自の教室の使用状況に合わせた設定に固定することができます。（リファレンス.pdfの[8]“リファレンスとカスタマイズ”を参照）



このマニュアルのでは[ツールボックス]ツールという書き方で、ツールボックス内のツールボックスのツールを示し、それに対応するアイコンを余白に表示します。（いくつかのラベルは余白に入りきらないほど長いので短縮されています。）たとえば、[直線]半直線は直線ツールボックスのなかの半直線のツールを表します。ツールバーのアイコンの表示は大、小の選択ができます。アイコンのサイズを変更するには、カーソルをツールバーに示されている一番右のツールに移動し、マウスの右ボタンをクリックします。

画面の一番下の**ステイタス・バー**には、現在選択されているツールの名前が表示されます。

属性バーから、対象図形の属性（色、スタイル、大きさ...）を変更することができます。属性バーを表示させるには、[オプション]属性の表示というコマンドを選択します。表示をやめるには、[オプション]属性の非表示を選択します。ファンクション・キーF9を使っても同じことができます。

ヘルプ・ウィンドウには、選択されているツールの説明の概略が表示され、そのツールを使うためにあらかじめ必要な対象図形と何が作図されるかが示されます。**ヘルプ・ウィンドウ**は、F1キーによって、開いたり、閉じたりします。

ヒストリーウィンドウは、テキスト文の形で図形の名前を記憶しており、すでに作図されたすべての対象図形と使われた作図方法のリストを表示します。このウィンドウを開くには、[オプション] ヒストリーウィンドゥを開くというコマンドを用い、閉じるには、[オプション] ヒストリーウィンドゥを閉じるというコマンドを用います。F10キーを用いても同じことができます。

最後になりますが、作図領域は使用可能なすべての領域の一部を示します。幾何的な作図が実行されている場所がこの作図領域です。

1.3 マウスを使用する

このソフトウェアの機能のほとんどがマウスの操作でコントロールされます。マウスを使ってカーソルを移動する、ボタンを押す、ボタンを放す、という操作があります。
特に指示がなければ、ボタンと言えば、マウスのメインボタン、普通は左側のボタンのことを指します。

作図領域でカーソルを移動させるためにマウスが使われているときには、このソフトウェア上では、クリック、または、ドラッグ・アンド・ドロップでどのような結果が得られるかが、3つの方法で分かるようになっています。

- カーソルの形
- カーソルの近くにポップアップ・メニューを表示する
- 作図途中の一部表示されている部分

作図の内容によっては、ポップアップ・メニューや作図途中の部分は表示されません。

カーソルの形とその意味：

すでに存在する対象図形の選択が可能。

すでに存在する対象図形の選択が可能、または、移動できる、あるいは、作図に使用可能。

すでに存在する対象図形がクリックされて選択ずみ、または、作図で使用可能な状態になっています。

カーソルの下にある対象図形に対して、いくつかの選択が可能な状態。クリックするとポップアップ・メニューが表示され、その中からどの対象図形を選択するか正確に選択できます。

対象図形を移動しているときにでるマーク。

カーソルがシートのまだ使用されていないところに位置しているとき、または、クリック・アンド・ドラッグによって、長方形の領域が選択されているときに表示されます。

シートの見える部分を移動させるための汎用モード。いつでもCtrlキーを押したままにするとこのモードになります。このモードのときは、ドラッグ・アンド・ドロップでシートをウィンドウ上でスライドさせることができます。

ワークシートがドラッグされているときの形。

シート上をクリックすることによって、新しく他から独立に移動できる点を作成できることを表す形。

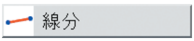
クリックによって、新たに、対象図形上を移動できる点または、2つの対象図形の交点を新たに作成できることを表す形。

カーソルの下にある対象図形を、現在選ばれている色で塗りつぶすことを表す形。

クリックによって、カーソルの下にある対象図形の属性（例えば、色、スタイル、太さ。。。）を変化させることを表す形。

1.4 初めての作図

この章[1]“始めましょう基礎編”の実例として、ひとつの対角線が与えられた場合の正方形の作図を一緒にやってみましょう。カブリ・ジオメトリ™Ⅱ Plusがロードされると、新規に何も描かれていないバーチャルなドローイング・シートが作成されます。



まず、最初に正方形の対角線となる線分を作図しましょう。直線のアイコンをクリックすることで、[直線]線分ツールを使用可能な状態にする必要があります。そして、マウスを押して、ツールボックスを開きます。カーソルを線分ツールまでもって行き、マウス・ボタンを放し、線分ツールを選択します。

Figure 1.1 – ツールの選択、[直線]線分

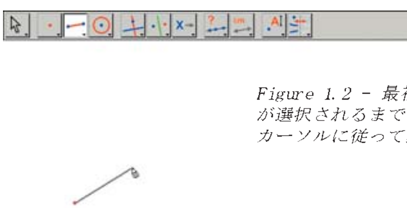


Figure 1.2 – 最初の点の作図。2番目の点が選択されるまでは、線分の終わりの点はカーソルに従って動きます。

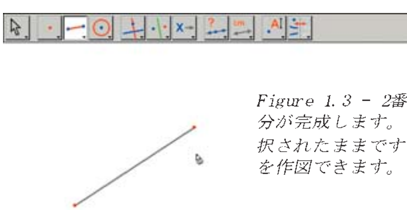
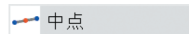


Figure 1.3 – 2番目の点が選択されると線分が完成します。[直線]線分ツールは、選択されたままですので、つづけて他の線分を作図できます。

さあ、作図領域で、カーソルを動かしてみましょう。マウスの形 を確認しましょう。1回のクリックで最初の点が作成されます。続けて、作図領域でカーソルを動かしましょう。ひとつの線分が最初の点からカーソルまで伸びています。それが作成される予定の線分です。2番目の点もクリックによって作成されます。それで、2点とひとつの線分ができました。



正方形を作図するには、この線分を直径とする円を描く必要があります。円の中心は線分の中点です。中点を作図するには、[作図]中点ツールを選択し、カーソルを線分の上にもってきます。カーソルの近くに、この線分の中点というポップアップ・メッセージが表示され、カーソルの形が に変化します。クリックによって、線分の中点がマークされます。

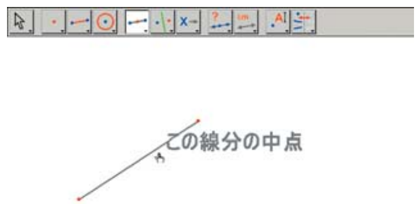
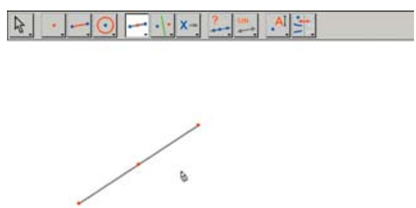
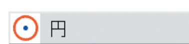


Figure 1.4 – 線分の中点の作図





この後、[曲線]円を選択し、カーソルを動かし、作図されたばかりの中点の近くまでもって行きます。そうすると、この中心というポップアップ・メッセージが表示されます。[曲線]円ツールを使うには、円の中心を選択する必要があるので、中点の上でクリックします。このようにカーソルを動かし、クリックすると、円が表示されます。さらに、カーソルを線分の終点までもって行くと、この半径というメッセージが表示されます。クリックすることによって、この点を通る円が完成されます。

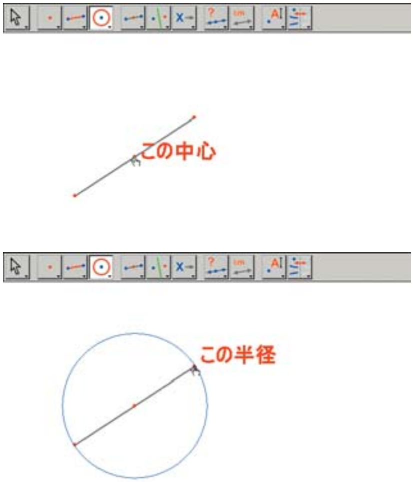
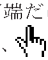


Figure 1.5 – 与えられた線分を直径とする円の作図

この図形を変えるには、ツールを[操作]ポインタに変更します。この図形の動かすことのできる点は、線分の両端だけです。カーソルをひとつの端点の上まで動かすとその形は、となります。そして、“この点”というポップアップ・メッセージが表示されます。そして、その点をドラッグ・アンド・ドロップすることで、全体の図形が自動的に更新されます。線分は新たに描かれ、中点はもそれにしたがって動き、円も同様に変化します。

当初の目的の正方形を描くには、あと、もうひとつの対角線を作図することが必要です。それは、円の直径で、もとの線分に垂直です。線分の垂直2等分線を作図します。もとの線分に垂直で、その中点を通る直線です。[作図]垂直2等分線ツールを選択します。そして、その線分の上にカーソルを動かし、クリックして線分を選択します。こうして、垂直2等分線が作図されます。

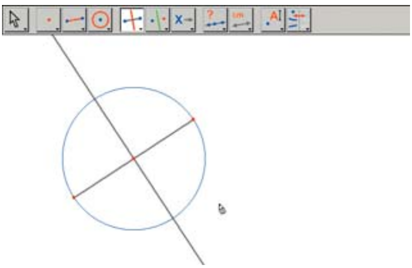
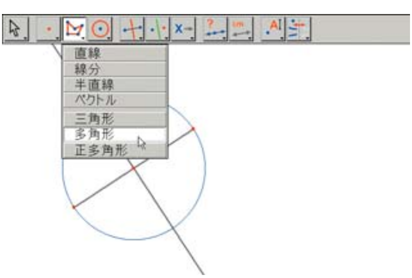
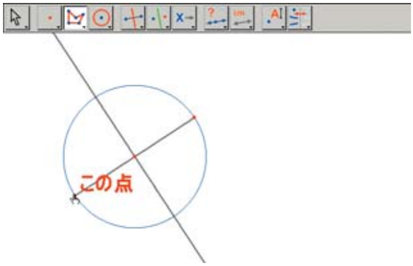


Figure 1.6 – もうひとつの対角線を描くための、線分の垂直2等分線の作図

正方形を完成させるには、[直線]多角形ツールを選択します。このツールは、頂点を決めるための一組の点の選択を必要とします。点の選択を終了させるためには、最初の点にもどって、2度目のクリックをするか、あるいは、最後に決める点でダブル・クリックをします。円と垂直2等分線の交点は、現時点では作図されていませんが、カブリ・ジオメトリでは、その交点が使われるときには、すでに作図されているものとみなします。





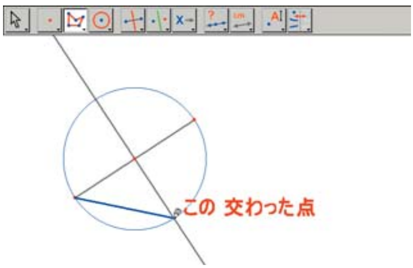


Figure 1.7 – 円と垂直2等分線との交点をすでに作図されている点とみなして、おこなう正方形の作図

言い換えれば、線分のひとつの端点（ポップアップメッセージではこの点）を最初の頂点として選択し、そして、カーソルを円と垂直2等分線のひとつに移動します。この交わった点というポップアップ・メッセージが表示され、マウスをクリックすることで、交点が、多角形の次の頂点として作図されることを示します。それでは、選択してください。
続けて、線分のもうひとつの点を選択し、円と垂直2等分線の2つ目の点を選択します。最後に最初の頂点をクリックします。これで、正方形ができました。

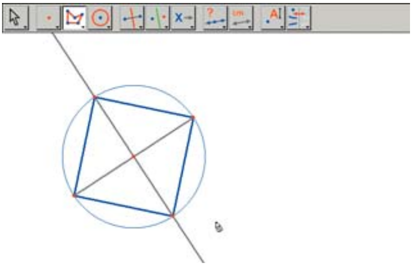


Figure 1.8 – あなたのはじめてのカブリ・ジェオメトリの作図

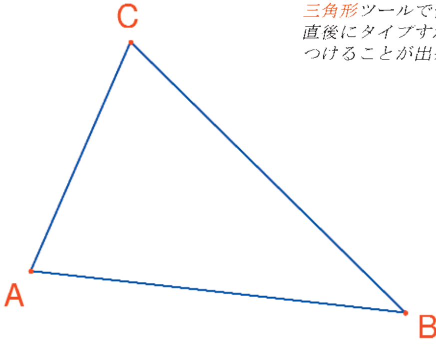
オイラー線

まず一般の三角形ＡＢＣを作り、それから中線を３本引きます。中線というのは、頂点と対辺の中点を結ぶ線のことです。次に頂点から対辺に下ろす垂線を３本引きます。最後に、辺の垂直二等分線を３本引きます。垂直二等分線というのは、辺の中点を通り辺に垂直な直線のことです。
よく知られているように、３本の垂線、３本の中線、３本の垂直二等分線はそれぞれ１点で交わります。さらに、これらの３点は一直線上に並びます。この直線は三角形のオイラー線と呼ばれています。

三角形を作るには、[直線]三角形ツールを選びます。ツールバーの使い方については、一つ前のセクションの、[1]“始めましょう － 基礎編”を参照して下さい。

[直線]三角形ツールを選択したら、作図領域の空いた場所をクリックして新しい点を３つ作って下さい。これらの点は作った後にすぐにラベルをはることが出来ます。“直後に”キーボードからラベルをタイプするだけです。三角形が作られた後に、これらのラベルを点の周りに動かすことが出来ます。たとえば三角形の外部にラベルを動かすことが出来ます。

Figure 2. 1 － 三角形ＡＢＣが[直線]三角形ツールで作られる頂点を作った直後にタイプすれば、頂点にラベルをつけることが出来る。



[1] *Léonald Euler, 1707-1783*

対象図形の名前を動かすには、[操作]ポインタツールを選択しなければなりません。カーソルを、このラベルというポップアップメッセージが出るようにラベルの上にもってきてラベルをドラッグし、ドラッグ中、ラベル（名前）が望みの場所に来たときに、マウスボタンを放します。対象図形の名前を変えるには、[表示]ラベルツールを選択し、その名前を選択します。すると、編集用ウィンドウが現れます。

中点は[作図]中点ツールで作図できます。ＡＢの中点を作るためには、Ａ、Ｂの順で選択します。

線分の中点も同様に線分を選択することにより作られます。新しい点は“直後に”作ることが出来ます。Ｃ’としましょう。 他の辺の中点も同様に作ります。Ａ’をＢＣ上に、Ｂ’をＣＡ上に作ります。

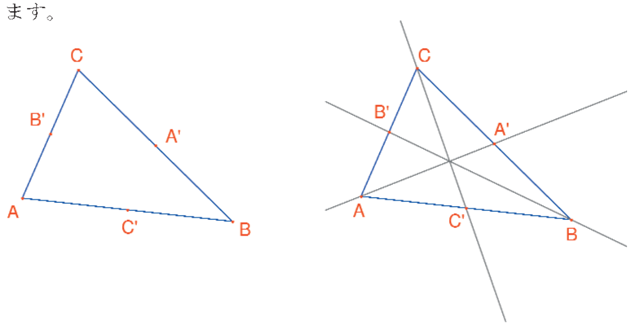


Figure 2.1 – [左]. 中点は[作図]中点ツールで作られる。このツールが使える対象図形は、２点、線分、多角形の辺である。 [右]. 中線は[直線]直線Lineツールで作られ、その色は[属性]色ツールで変更できる。

[操作]ポインタツールを使うと、独立で移動可能な対象図形を自由に動かせます。今回の作図では、３点Ａ, Ｂ, Ｃは独立で移動可能な対象図形です。作図中のどの部分が動かされても、すぐに全体の図に反映されます。従って、作図の相互関係を調べることが出来ます。図の中から固定されていない対象図形を見つけるためには、[操作]ポインタツールを選択し、作図領域の空いている部分をクリックし、少し待ちます。そうすると、動かせる対象図形は点滅します。

[直線]直線ツールを使って３本の中線を作ることが出来ます。直線ＡＡ’については、点Ａ、Ａ’を順にクリックします。

直線の色を変えるには、[属性]色ツールを使います。パレットから色を選び、それをクリックし、その色をつける対象図形をクリックします。

[点]点ツールをクリックし、ポインタを３直線の中線の交点の近くにもって行きます。カブリ・ジオメトリは２直線の交点を作ろうとしますが、（３直線中どの２直線の交点かという）多義性があるので、ポップアップ・メニューが現れ、ユーザはどの2直線かを選ぶことが出来ます。カーソルが選択するリストの上を動くに従って、図の中の対応する直線が点滅します。中線の交点にGというラベルをつけましょう。

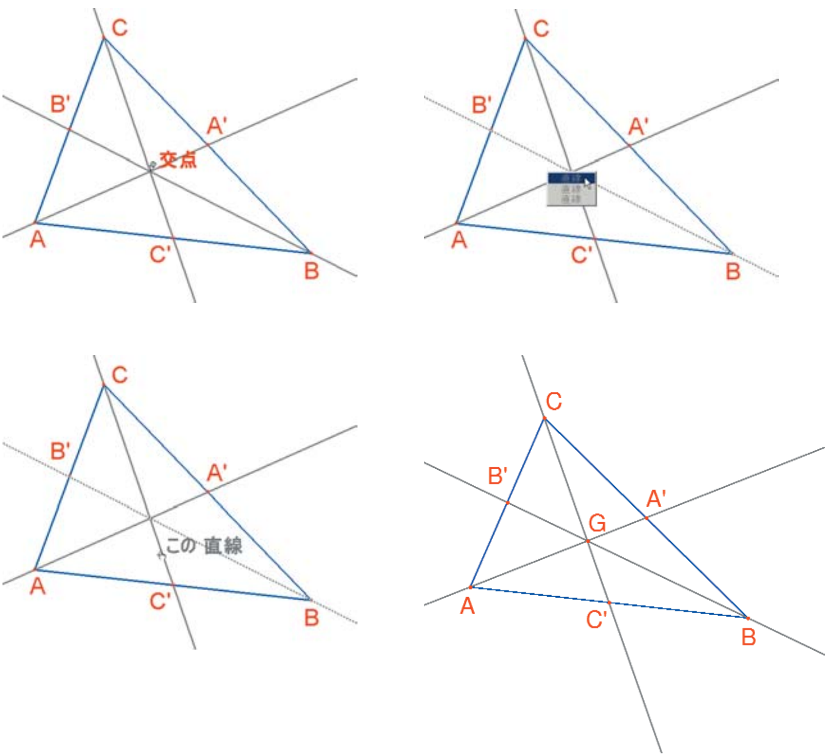


Figure 2.3 – 中線の交点の作図と、選択の多義性の解決

垂線

三角形の垂線は[作図]垂線ツールで作られます。このツールは与えられた方向に垂直で、与えられた点を通る直線を一本だけ作図します。だから選択する対象図形は、点ともうひとつ：直線、線分、半直線などです。選択する順番はここでは重要ではありません。Aを通る垂線を引くためには、Aを選択し、次に辺BCを選択します。同様にBとCの垂線も作ります。中線のときと同様に垂線の色を選び、交点 Hを作ります。

垂直二等分線

[作図]垂直二等分線ツールは、線分の垂直二等分線を作るのに使います。ただ線分を選択するか、それとも2つの端点を選択するだけです。3本の垂直二等分線の交点にラベルOをつけます。

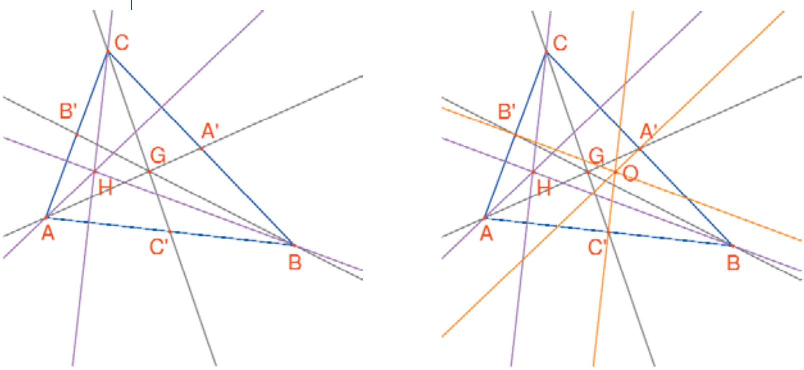


Figure 2.4 – [左]. [作図]垂線ツールで、垂線を作る。[右]. 最後に、[作図]垂直二等分線ツールで、垂直に等分線を引く。

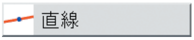
同一直線上？

[性質チェック]同一直線上?ツールで、3点O, H, Gが同一直線上にあるかどうかをチェックすることが出来ます。3点を順番に選択し、作図領域の空いている所をクリックすると、答えが表示されます。この表示には、同一直線上にあるかどうかが書かれています。

図の独立な点が動くと、同時にこの文章にもチェック結果が反映されます。

結果が特別な場合であるだけかもしれないので、図の中の対象図形の性質をよく考えなければなりません。

三角形のオイラー線は、[直線]直線ツールで、例えばOとHを選ぶことにより作られます。この直線は３点O，H，Gを通ります。[属性]線の太さツールで　この直線を他と区別しましょう。



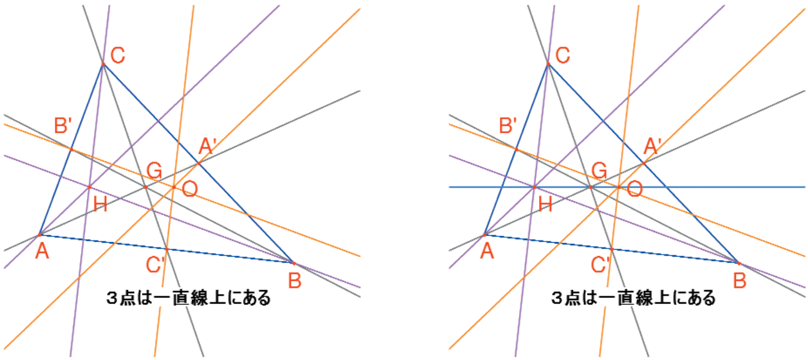


Figure 2.5 – ［左］．３点O，H，Gが同一直線上にあるかのチェック。［性質チェック］同一直線上?ツールで３点は一直線上にあるまたは...一直線上にない..という表示が出る ［右］三角形のオイラー線［属性］線の太さ ツールで太くするとはっきり見える。

頂点の位置を変えて三角形の形を変化させると、GがいつもOとHの間にあり、３点の線分上における位置関係が変化しないことが明らかであるとわかります。GOとGHの長さを測ってこれを調べてみましょう。

[計測]距離、長さツールを使いましょう。このツールは、選択された対象図形により、２点間の距離、または線分の長さを図ることが出来ます。GそしてOを選択しましょう：GからOまでの距離が単位cmで現れます。GとHについても同じです。　計測値がいったん現れたら、対応するテキストメッセージは編集できます。例えば、GO＝という文字を数字の前に入力しましょう。

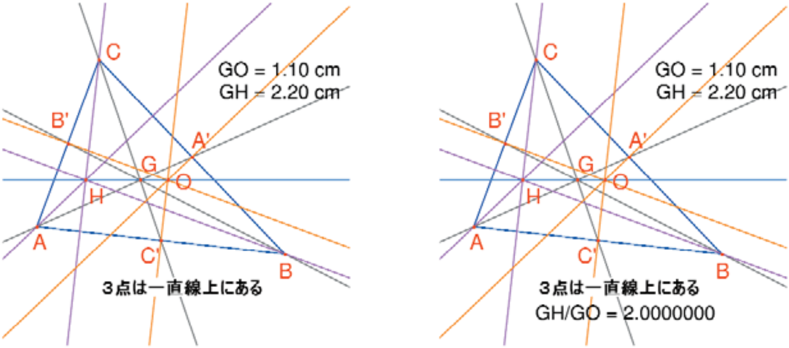


Figure 2.6 – [左]. [計測]距離、長さツールがGOとGHの長さを求めるのに使われている。[右]. 計算機を使って–[計測]計算–GH/GOの比を表示し、常に2であることを表す。

元の三角形を変化させることにより、GHの長さが常にGOの2倍であるとわかります。GH/GOの比を計算し、これを確かめよう。[計測]計算機ツールを使います。GHの距離を与えるテキストメッセージを選択し、演算子 / を選択し、最後にGOのテキストメッセージを選択します。 = キーをクリックすると結果が得られます。この結果は作図領域上にドラッグ&ドロップできます。([操作]ポインタツールで)数字を選択したら、表示する桁数は、+ と – キーで増減させられます。このようにして、比は10桁ほど表示させられ、これを見れば、比が一定で2に等しいということが確信できます。

Exercise 1 – 中心OでA, B, Cを通る外接円をこの図に付け加えなさい。[曲線]円ツールを使いなさい。

Exercise 2 – 次に、三角形の九点円をかき加えなさい。これはOHの中点を中心とする円で、辺の中点A', B', C'と各垂線の足と、線分HA, HB, HCそれぞれの各中点となる円です。

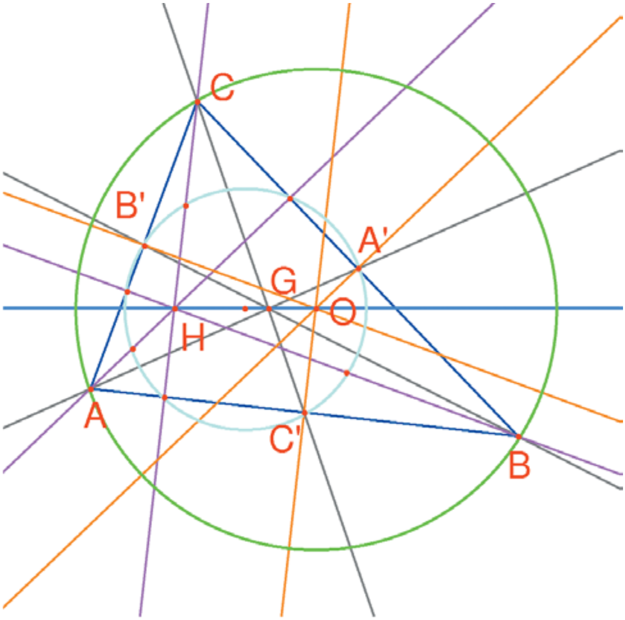


Figure 2.7 – 最終的な図。三角形とその外接円と“九点円”。

点を探そう

この章では、カブリ・ジオメトリを使うとどのような発見的な学習が出来るかということを見ていきます。与えられた３点A, B, Cから始め、次の式を満たす点Mを探しましょう。

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}.$$

まずは［点］点ツールを使って、ランダムな位置に４点を作り、“直後に”（すなわち、点を作った直後に文字をタイプして、）A, B, C, Mというラベルをつけます。

カブリ・ジオメトリではベクトルを使うことも出来ます。ベクトルは矢印で現されます。今回、［直線］ベクトルツールで、最初にMそしてAを選択して、ベクトル $\overrightarrow{MA}$ をつくる必要があります。このベクトルの矢印の始点はMです。同じことを$\overrightarrow{MB}$ と $\overrightarrow{MC}$ についても行います。

次に、［作図］ベクトルの和ツールを使って、$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ の結果のベクトルを作ります。まず２つのベクトルをクリックし、次に結果のベクトルの始点をクリックします。ここではMを始点とします。このベクトルの終点にNというラベルをつけます。

最後に、さきほどと同様に、 $\overrightarrow{MN} =$（ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ ）と$\overrightarrow{MC}$ を足してMを始点とする結果のベクトルを作ります。このベクトルの終点をPとします。

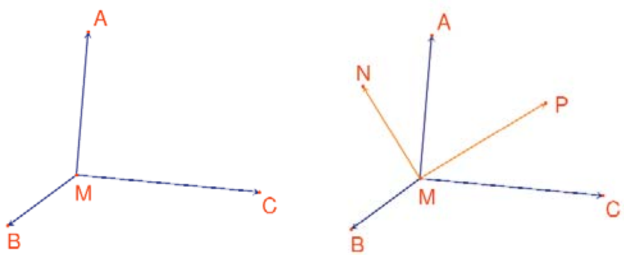


Figure 3.1 –［左］. 任意の点A, B, Cと、別の点Mから始め、ベクトル $\overrightarrow{MA}$ 、 $\overrightarrow{MB}$ 、$\overrightarrow{MC}$ を描く。［右］［作図］ベクトルの和ツールで $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ と、 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ を作図する。

ポインタ

これで、この問題がドラマチックに解決されます。そのために、[操作]ポインタツールを選択し、点Mを動かします。３つのベクトルの和の結果は、Mが作図領域上を動くのにつれて、変化します。$\overrightarrow{MP}$ の大きさと方向は、点A, B, Cに対するMの位置に依存します。このようにして、他にも考えられますが、次のような推測をすることができます：

・３つのベクトルの和が零ベクトルになるようなMの場所は一ヶ所しかない。すなわち、この問題の解はひとつしかない。解は三角形ABCの内部にある。
・四辺形$MANB$は 平行四辺形である。
・四辺形$MCPN$は 平行四辺形である。
・和が零ベクトルとなるとき、$\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{MC}$ は同一直線上にあり、さらに同じ大きさで、反対向きでなければならない。
・ $\overrightarrow{MP}$ は常に同じ点を通り、この点が問題の解である。
・点 Pの位置は、Mに依存する。この事実に基づき、PからMへの変換が存在する。この問題の解は、この変換によって不変な点である。

色々な観察によって、どんな方向への調査も可能です。

例えば、$\overrightarrow{MP}$ と $\overrightarrow{MC}$ が反対方向を向いているという観察をするとしましょう。
そうすると、他の問題点も挙がります：Mがどういう位置にあるときに、これら２本のベクトルが同一直線上にあるのでしょうか？Mを動かして２つのベクトルが同一直線上になるようにしてみましょう。Mはある直線上にいなければならない、そして、この直線はCとAB の中点を通らないといけないということがわかるでしょう。この直線はCを通る中線です。MはA，B，Cに同様に依存するので、Mは他の中線上にものっているはずだということがわかります。よって、求める点は、３本の中線の交点であるということになります。

教室での活動に関しては、上に続いて、生徒は解の作図をしたり、調査の結果から推測の証明をすることもできます。

動的な作図（関係を保ったままあとで動かすことができる作図）は、紙に書かれた動かない図形よりも、効果的で、納得のいくものです。実際、数多くの場合からの推測を確かめるためには、図を操作するだけで十分です。色々な場合について、図が変化しても成り立つ推測は正しいと言えるでしょう。

教室で最大限の効果を上げるには、最初に生徒たちと次のような問題点をあげるとよいでしょう。

・正しく見えている動的な作図は実際に正しいか？
・正しい動的な作図は問題の答えになっているか？
・いつの時点で数学的な証明ができたと言えるか？
・証明するにあたり、動的作図にかけているものは何か？
・証明は、作図するのに使われた手順に基づかなければならないか？

Exercise 3 – 問題を４点に拡張します。次のようなMを探しなさい。 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$.

*Exercise 4** – もとの問題（３点）に必要な、“検討すべき筋道”と証明をすべて挙げなさい。これは、高校レベルの生徒に適当な問題です。

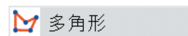
*Exercise 5** – ３点への距離の和 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ を最小にするMを調べて作図しなさい。この答えは、三角形ABCのフェルマ点です。

[1] *Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

VARIGNONの四角形

この章では*Varignon*[1]（ヴァリニョン）の定理に基づく色々な作図を紹介します。

まず、任意の四角形ＡＢＣＤを作ります。[直線]多角形ツールを選択し、４点を選び“即座に”Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄとラベルをつけます。多角形を完成するためには、Ｄを作った後にもう一度Ａを選択します。



次に、ＡＢの中点Ｐ、ＢＣの中点Ｑ、ＣＤの中点Ｒ、ＤＡの中点Ｓを、[作図]中点ツールで作ります。このツールでＡＢの中点を作るには、ユーザはＡを選び次にＢを選びます。線分ＡＢがすでに存在するときは、その線分を選択することも出来ます。多角形の辺を選択することも可能です。今回はこのケースです。

最後に[直線]多角形ツールで四角形ＰＱＲＳを作ります。

[操作]ポインタツールで図を変形することにより、ＰＱＲＳが常に平行四辺形であるらしいということがわかります。
では、[性質チェック]平行？ツールを使って、カブリ・ジオメトリに　ＰＱとＲＳが平行であるかどうかを判断させましょう。辺ＰＱ，を選び、次にＲＳを選ぶと、この２辺が実際に平行であるといえるというテキストメッセージが現れます。動揺にＰＳとＱＲが平行であることもチェックしましょう。

[1] *Pierre Varignon, 1654-1722*

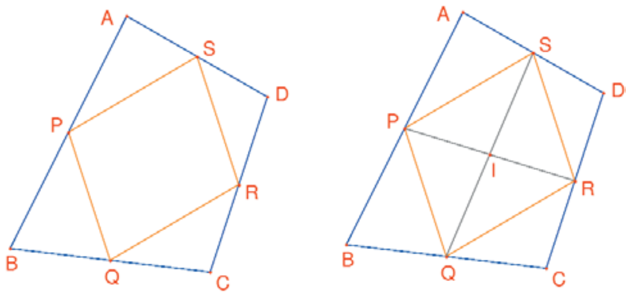


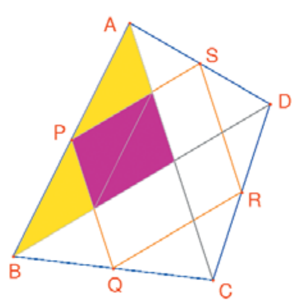
Figure 4.1 – ［左］. 任意の四辺形ＡＢＣＤから始めＡＢＣＤの辺の中点を頂点とするＰＱＲＳを作る。［右］. ＰＱＲＳの頂点を作り、お互いを二等分することを説明する。

では、２つの対角線ＰＲとＱＳを［直線］線分ツールで作り、その交点Ｉを［点］点ツールで作ります。ＩがＰＲとＱＳ両方の中点であり、それゆえＰＱＲＳが平行四辺形であることを示す方法はいくつかあります。例えば、重心を使うことが出来ます。Ｐは等しい質量がかかる2つの質点ＡとＢの重心とみなせます。同様に、Ｒは等しい質量を持つ2つの質点ＣとＤの重心とみなせます。従って、ＰＲの中点は、4つの質点Ａ, Ｂ, Ｃ, Ｄの重心です。ＱＳの中点についても同様です。ここから２つの中点が一致することがわかり、この点が交点Iです。

Varignonの定理は次のように続きます：

Ｖａｒｉｇｎｏｎの定理　ＡＢＣＤの各辺の中点を頂点とする四辺形ＰＱＲＳは平行四辺形で、その面積はＡＢＣＤの半分である。

Figure 4.2 – 定理の二つ目の部分を説明するための作図



Exercise 6 – これまでにすでに定理の最初の部分は証明しました。ではＰＱＲＳの面積に関する二つ目の部分が正しいことを示しましょう。ヒント：Figure 4.2に示された図を使いましょう。Ａ，Ｂ，Ｃはそのままにして、Ｄを動かしてＰＱＲＳが長方形になるようにしてみましょう。すでにわかっているように、ＰＱＲＳは平行四辺形なので、どれかひとつの角が直角であることを示せば十分です。だから、角Ｐの大きさを ［計測］角度ツールで測ります。このツールは、３点を選んで使います。２番目の点が頂点になります。例えば、Ｓ，Ｐ（角の頂点）の順に選びます。

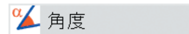
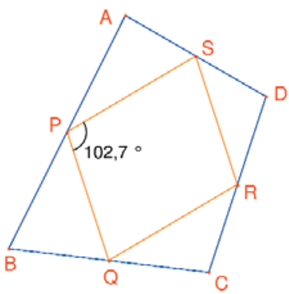


Figure 4.3 – 平行四辺形ＰＱＲＳの角Ｐの大きさを測る



［計測］角度ツールでは、［表示］角のマークツールですでにマークをつけておいた角の大きさを図ることも出来ます。このツールは、［計測］角度ツールと同じ順序で３点を選んで使います。Ｄを動かしてＰＱＲＳが長方形になるようにしましょう。Ｄがある直線上にある限り、答えは無限にあるようにみえます。実際、四辺形ＡＢＣＤの対角線ＡＣとＢＤが描かれたとき、ＰＱＲＳの辺はこれらに平行であるので、ＡＣとＢＤが垂直であるときに限り、ＰＱＲＳは長方形になるようにみえます。

ＰＱＲＳが常に長方形であることを確かめるには、Ｄの位置を再定義する必要があります。［直線］直線ツールでＡ，Ｃを選んで直線ＡＣを引き、次に［作図］垂線ツールでＢと直線ＡＣを選んで、Ｂを通るこの直線の垂線を引きます。

Ｄは今のところは、図の中の独立な動かせる点です。これを変えて、Ｂを通りＡＣに垂直な直線上に制限されるようにしましょう。［作図］図形属性の再定義ツールでＤを選択します。Ｄを再定義するための色々なオプションを並べたものが現れます。対象図形上の点を選択し、次に垂線上の任意の点を選択します。Ｄはこの点に移動し、これ以降、示された直線上に制限されます。
再定義は調査にとても役立つツールです。ユーザはもう一度最初から書き直すことなく、図の一部分の自由度を増やしたり減らしたりすることが出来ます。

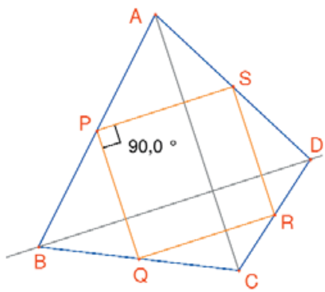


Figure 4.4 – 点Ｄが再定義され、ＰＱＲＳが常に長方形となる。Ｄにはまだ自由度が残されていて、ある直線上を動くことが出来る。

Exercise 7 – ＰＱＲＳが正方形になるための必要十分条件を求めなさい。もう一度Ｄを再定義し、正方形しか出来上がらないようにしなさい。

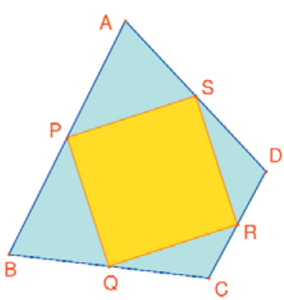


Figure 4.5 – ここで Ｄには全く自由度がなく、ＰＱＲＳは常に正方形である。