CABRI GEOMETRY™ II Plus

CABRILOG

革新的数学ツール

上級編

WELCOME !

カブリ・ジオメトリ™ ユーザマニュアル上級編へようこそ！

このマニュアルの３つの章では、皆さんに上級レベルの問題を紹介します。研究の題材として面白く、カブリ・ジオメトリ™で簡単に解決できる問題です。これらの問題は、カブリ・ジオメトリ™での発見を遂行したい方々のものであり、大学生などの上級者向けになっています。

ここの問題はお互いに独立した内容になっていますので、読者には、詳しい作図を真似た後、Exerciseに取り組むことをお薦めします。
＊が２つ付いたExerciseは、より難しくなっています。

CONTENTS

CHAPITRE 1

垂足三角形

[点]点ツールを使って３点Ａ、Ｂ、Ｃを作図領域上の任意の場所にとるところから始めます。まず、[直線]直線ツールを使って直線ＡＢ、ＢＣ、ＣＡを引きます。４番目の点Ｍを平面上の任意の位置にとり、Ｍの正射影Ｃ’、Ａ’、Ｂ’を、それぞれの直線上にとります。これらは、[作図]垂線ツールを使って、Ｍを通る各直線の垂線を順番にひき、[点]点ツールで、垂線とそれに対応する直線の交点をとることにより得られます。[点]点ツールは、２つの対象図形の交点をとります。カーソルを交点の近くに持っていくだけで、カブリ・ジオメトリはこの交わった点というメッセージを表示します。図が複雑なときにはどの図形ですかというメッセージと、メニューリストを表示します。

点

直線

垂線

点

３点Ａ’、Ｂ’、Ｃ’によりひとつの三角形が定義されます。三角形は[直線]三角形ツールで描かれます。この三角形は、ＡＢＣの垂足三角形と呼ばれています。[外観]塗りつぶしツールを使って、三角形の内部に色をつけることができます。
興味深い点は、Ｍの位置に関する三角形の面積です。三角形の面積は、[計測]面積を使って図ることができます。結果の値は三角形の向きによらない“幾何的”面積です。計測値はcm^2で与えられ、作図領域のどこにでも置くことができます。マウスの右クリックで数字を選択することにより、ショートカットメニューが現れます。その中に、三角形の方向により符号の変化する“代数的”面積を表示するオプションがあります。

三角形

塗りつぶし

面積

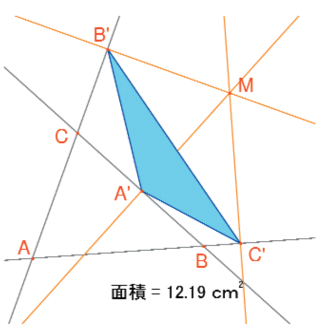


Figure 1.1 – Mに冠する垂足三角形とその面積

Mの位置によって決まる三角形A’B’C’の面積がどのように変化するか考えていきましょう。

いくつかの方法が考えられます。例えば、[表示]トレースOn/Offツール（トレースされる対象図形を選択する必要があります、ここではMをクリックします）．を選択してみます。

A’B’C’の面積が一定になるように　Mを動かしてみましょう。Mの継続的な位置が画面に描かれます。それは、A’B’C’の面積が一定であるような等高線を表しています。別の方法としては、格子点上の軌跡を使って、多くのMの位置に対してA’B’C’の面積を目に見える形で表示させるというものもあります。

ここでは、後者の方法を行いましょう。Mの色々な位置に対するA’B’C’の面積に比例する面積を持つ、中心Mの円を描きます。これを描くにはまず、三角形の面積の平方根に比例する円の半径を計算する必要があります。

[計測]計算を選択し、sqrt(その後に三角形の面積を示す数値を選択）を入力します。これで三角形の面積が式に取り込まれ、sqrt(a　ここで括弧を閉じる）という形になります。円が大きくなりすぎないように、10で割っておきます。

計算機にはsqrt(a)/10という式が表示されます。=ボタンでこの式を計算し、その答えを作図画面の適当なところまでドラッグします。

中心Mで、今求めた半径を持つ円を描くために、[作図]コンパスツールを選択します。作図画面までドラッグされた数字を選択し、次に点Mを選択します。

中心Mで、要求する半径を持つ円が現れます。これで、点が動いたときのMの周りの円の面積の変化を見ることができます。

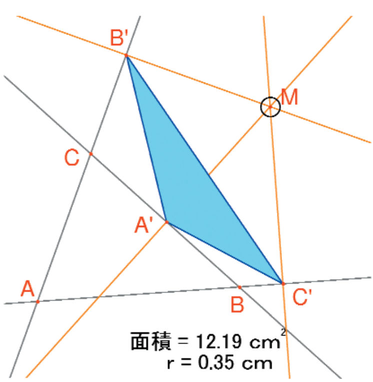


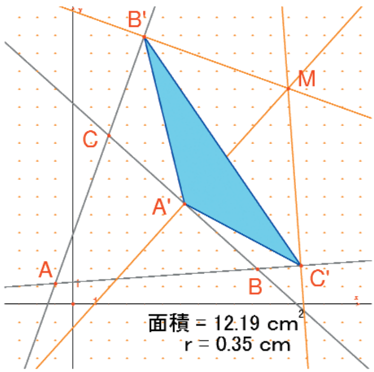
Figure 1.2 –中心Mで、A’B’C’の面積に比例した面積を持つ円が描かれる

それでは、格子点を定義し、格子点を用いてMを再定義し、そして格子点上の各点に対し、対応する垂足三角形の面積を表す円を描きましょう。格子点を定義するためには、座標軸が必要です。どのような図に対してもデフォルトの座標軸があります、それを使いましょう。この軸を表示するには、[外観]座標軸の表示を選択し、次に[外観]格子点の表示ツールを選択し軸を選びます。そうすると、格子点が現れます。

座標軸の表示

格子点の表示

Figure 1.3 – 図のデフォルトの座標軸を使って格子点が作られる。Mは任意の格子点状に再定義される。



ここでMはまだ独立で、平面上を自由に動けるので、これから再定義して格子点上に限定します。[作図]図形属性の再定義ツールを選択し、Mを選んだときに現れるメニューリストから対象図形上の点を選択し、次に格子点上の任意の点をクリックします。これで、Mを格子点上に固定することができます

図形属性の再定義

[作図]軌跡ツールを使うと、Mを格子点上で動かしたときの円の集合が得られます。円を選択し、次に点Mを選択します。そうすると、

軌跡

Mが格子点上を動いたときの円の軌跡が得られます。垂足三角形の面積を一定に保つ等高線は円となり、その円の中心は、ＡＢＣの外接円の中心と同じ点であることが示されています。(参照 *Geometry Revisited by H.M.S.Coxeter and S.L.Greitzer, Mathematical Association of America, section 1.9* など) とくに、MがＡＢＣの外接円上にあるとき、三角形Ａ'Ｂ'Ｃ'の面積は０になります。同値な言いかえをすると、MがＡＢＣの外接円上にあるとき、そのときに限り、Ａ'、Ｂ'、Ｃ'の３点が同一直線上に存在します。

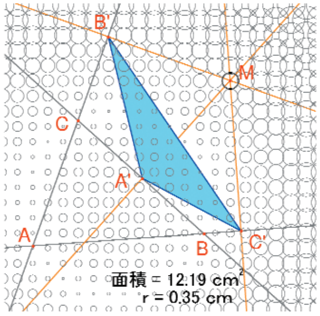
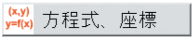


Figure 1. 4 – Mの位置の関数としての、垂足三角形の面積の分布

Exercise 1 – ＡＢＣの外接円上にMがあるとき、３点Ａ'、Ｂ'、Ｃ'は同一直線上にあり、Ａ'Ｂ'Ｃ'はMに対するシムソン[1] 線（もしくはワリス[2] 線 — この直線は何年もの間シムソンの業績であると誤認されてきた。実際には 1799年にワリスの出版物に登場している。）と呼ばれる。シムソン線の包絡線を図示せよ。
（[作図]軌跡ツールを使う。）この曲線は、120°回転させると元の形に戻る。その形状がギリシャ文字のΔに似ていることからデルトイド(または、トリカスピッド、またはシュタイナー[3] のハイポサイクロイド)と呼ばれている。
この曲線は３直線ＡＢ、ＢＣ、ＣＡに垂直である。４次の代数曲線である。このことは、[計測]方程式, 座標ツールで確かめることができる。



*Exercise 2** – 上のexercise のデルトイドに対し、中心と、曲線が３直線に接する３点と、曲線が内接する円のうち最大のものを作図せよ。

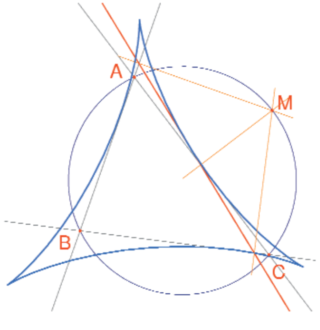


Figure 1. 5 – 三角形のＡＢＣのSimson 線の包絡線はデルトイドと呼ばれる。正三角形のような対称性を持つ。

[1] *Robert Simson, 1687-1768*

[2] *William Wallace, 1768-1843*

[3] *Jakob Steiner, 1796-1863*

CHAPITRE 2

関数

カブリ・ジオメトリ™には、座標系と式のツールがあるので、関数のグラフを簡単にかくことができます。グラフは関数の性質を学ぶために使えます。この章では、次の3次関数について勉強していきましょう。

$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

まず、[外観]座標軸の表示ツールで座標軸を表示させます。次に、作図領域に関係式をかく必要があります。式が一度作図領域に配置されると、その値は変数の値が変る度に計算しなおされます。この関数に対しては、[表示]式を選択し、x^3 - 2*x + 1/2と入力します。変数として使用可能な名前は、文字a, b, c. . . zです。

x軸上のどこかに([点]点ツールを使って)点Pをとります。[計測]方程式,座標 を選択し次に点Pを選んで、その座標を表示させます。座標を表しているテキストは最初はPにくっついていて、点が動くと一緒に動きます。[操作]ポインタツールを使うと座標Pから離すことができます。座標は図のどこにでも置くことができます。点Pのところに座標を戻すためには、点の近くまでクリック＆ドラッグします。

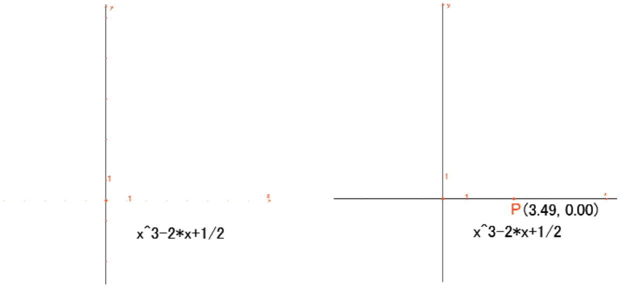
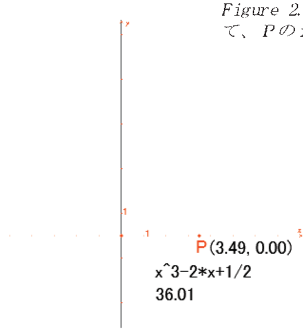
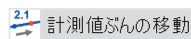


Figure 2.1 – [左]関数式が図に記入される。
[右] 点Pをx軸上にとり、[計測]式, 座標系 を使ってその座標を表示する。

次に、x が P の x 座標であるときの f (x)の値が必要となります。[計測] 式を適用ツールを選択し、次に式をクリックし、その後、括弧の中の P の x 座標をクリックします。ここでは、順序が大切です。

Figure 2.2 – [計測]式を適用ツールを使って、P の x 座標xにおける f (X) を計算する





では、[作図] 計測値ぶんの移動ツールを選択し、この値、次に y 軸を選択することにより、この値を y 軸上に移動させせます。この後は、[直線] 平行線ツールを使って、印のついた点を通り両軸に平行な直線を引かなければいけないだけです。それらの交点にMというラベルを貼りましょう。この点の座標は(x , f (x)) です。次の図においては、点 P は原点に近い (1. 89, 0) に移動してあります。こうすると、Mが画面内に見えます。直線の作図中に P を動かすことができます。

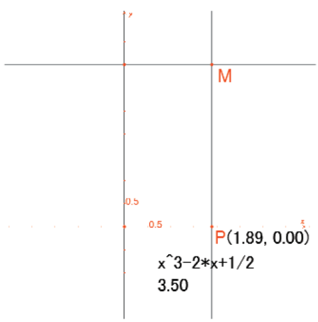


Figure 2.3 – 計測値ぶんの移動を使った点M (x, f(x))の作図

関数のグラフは、ｘ軸に沿ってＰを動かしたときのＭの軌跡として得られます。[作図]軌跡ツールで、まずＭ、次にＰを選択することにより作図されます。関数のグラフのもっとも興味深いところを見るために、（ドラッグ＆ドロップで）原点を動かしたり、（軸上の任意の目盛りをドラッグ＆ドロップすることにより）縮尺を変えることができます。

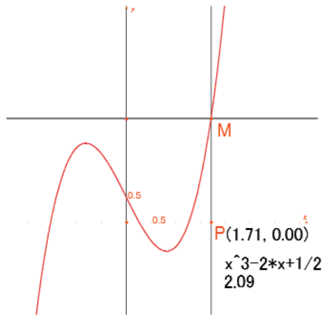


Figure 2.4 – [作図]軌跡ツールを使っていよいよ関数のグラフが作られる。原点を動かしたりサイズの変更をして興味深い部分が見られるようにすることができる。

それでは、曲線上の与えられた点におけるこの曲線の接線の近時を作図していきましょう。小さなｈに対して以下が成り立つことが知られています。

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

幾何的な立場から見れば、この近似は接線の傾きを、ｘ座標がｘ－ｈとｘ+ｈの点からなる曲線上の２点からなる弦の傾きと同じものとしています。[表示]数値の編集を使って、ｈに対する値が定義されます。ここでは、作図を簡単にするため、例えばｈは0.3としましょう。ｈの値は、より良い近似を与える小さな値に変えることもできます。次に、x軸上に点Ａをとり、中心Ａ、半径ｈの円を描きます。

この円は、[作図]コンパスツールを選択し、Ａを端点とする長さｈの線分を選択することにより得られます。ｘがＡのｘ-座標であれば、この円とｘ軸の２つの交点のｘ座標がｘ－ｈとｘ+ｈです。２交点と点Ａを通りｙ軸に平行な直線を描きます。（[作図]平行線）

この３直線と曲線との交点により、ｘ座標がｘ－ｈ、ｘ、ｘ＋ｈである曲線上の点Ｂ$^{-}$、Ｂ、Ｂ$^{+}$が与えられます。

図がかなり込み入ってきているので、これ以上使われない要素を隠しましょう。[外観]表示／非表示ツールを選択し、非表示にしたい要素を選びます。ここでは、Ｐ、Ｍ、Ｍの作図に使われた２本の直線、Ｐの座標、そしてＰにおける関数の値を選択します。隠された対象図形はマーキー（点滅する点線）として見えるだけで、[外観]表示／非表示ツールが選択されているときのみ、見えます。隠された対象図形をもう一度見える状態にするには、ツールを選択しているときに、もう一度その図形を選べばいいだけです。

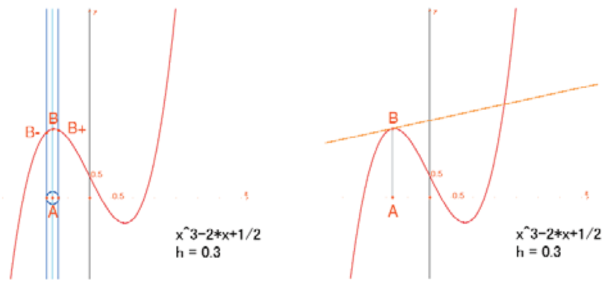


Figure 2.5 – ［左］ｘ座標がｘ－ｈ、ｘ、ｘ＋ｈである曲線上の３点Ｂ-, Ｂ, Ｂ+が作図される。
［右］作図のための要素が消された状態のＢにおける接線の近似

接線の近似は、Bを通りＢ－Ｂ+に平行な直線です。

[直線]直線 ツール、そして[作図]平行線 を使ってこの直線を作図します。それでは、Ｂ－Ｂ+を通る直線と作図のための要素を隠して、ｈ、Ａ、ＢとＢにおける“接線”だけが見える状態をつくりましょう。ｈ=0.3という値がすでに接線に対するとてもよい近似を与えていることがわかるでしょう。にもかかわらず、ｈの大きさを、例えば0.0001まで下げることにより、この近似をもっとよくすることもできます。

x軸に沿ってAを動かすことにより、f（x）=0の3乗根の場所、fの定常点、すなわち曲線の変曲点を見ることができます。

情報として、f（x）=0の3つの解は、大体$r1$=-1,52568、$r2$=0,25865と$r3$=1,26703です。定常点のx座標は、$e_1 = -\sqrt{6}/3 \approx -0{,}81649$ と $e_2 = \sqrt{6}/3 \approx 0{,}81649$ です、変曲点$(0, 1/2)$です。

Exercise 3 – 接線の傾きを使って、関数の傾きを表す曲線の近似を描きなさい。

*Exercise 4** – 接線はx軸と x座標x'の点A'で交わる。一般に、このx'はAがすでにf（x）=0の根の近傍にあれば、根のよい近似となることが知られています。この命題は、方程式の根を求めるための"Newton[1]-Raphson[2]"法として知られている反復法の基本原理となっています。A'と、同じ方法で反復によりえられるA''を作図し、A''の位置とAの位置を比較しましょう。とくに、Aとして3乗根と違いA''とAが一致する2箇所の位置が見つかります。
情報として、6次方程式には2つの実数解があります。その値は大体-0.56293と0.73727です。適当なAを選んでも、A'が微分係数が0になるような2点のうちの1点になるようにAを選ぶと、微分法になることもわかります。

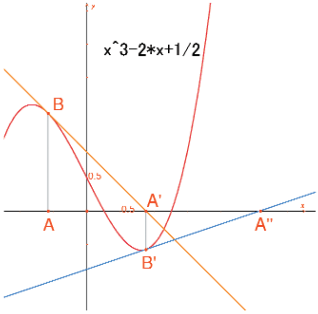


Figure 2. 6 – 点Aから始まるNewton-Raphson法の初めの2段階

[1] *Sir Isaac Newton, 1643-1727*

[2] *Joseph Raphson, 1648-1715*

注意 ：[計測]式を適用 ツールによって同じグラフを直接的に描くこともできる。

CHAPITRE 3

しきつめ

多角形を使って、平面のしきつめを作りましょう。まず、以下の作業に十分な、簡約化された定義からはじめましょう。興味のある方は、参考文献として*Tilings and Patterns by Branko Grünbaum and G.C. Shepherd,* Freeman 1987 を参照してください。多くのインターネットサイトにも、しきつめと対称群に関する情報が載っています。

閉じた線で囲まれた平面図形の集合に対して、その内の要素に重なりがなく、かつすべての閉じた要素の和集合が平面全体を覆うときに、その形の集合を、しきつめといいます。これらの平面の形が、しきつめのタイルと呼ばれます。２つのタイルの共通部分は線分または直線で、エッジと呼ばれ、２つまたはそれ以上のタイルの共通部分が１点であるときは、頂点と呼ばれます。

しきつめ*P*に対し、ｆによる*P*の全てのタイルの像が*P*のタイルであるような平面の等*長写像*ｆの集合をＳ(*P*)と書きます。
Ｓ(*P*)はしきつめの*対称群*と呼ばれる群になります。このような群を考えるとき、以下のようにいくつかの場合があります。

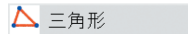
・Ｓ(*P*)は平行移動を含まない。したがってＳ(*P*)は、$2\pi/n$の回転で生成された群（単位元となることもある）と同型であるか、ｎ個の辺を持つ正多角形の対称群となって、二面体群と同型になる。

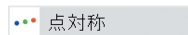
・Ｓ(*P*)は同一直線上の移動を含む。したがってＳ(*P*)は７つの*frieze群*のうちの一つと同型になる。

・Ｓ(*P*)は一次独立な２つのベクトルの方向への平行移動を含む。したがって、Ｓ(*P*)は、17個の*wallpaper群*（または、*plane crystallographic群*）のうちの一つと同型になり、そのしきつめは周期的といわれる。

敷き詰めのタイルがただ1つのタイルの等長写像として得られるとき、しきつめはモノヘドラルという。
ここでは、われわれは、多面体のタイルによるモノヘドラルなしきつめの場合についてのみ考えていきましょう。
まず三角形によるモノヘドラルな平面のしきつめを作ります。

[直線]三角形ツールを使って一般の三角形ＡＢＣを作り、[作図]中点ツールでそのうちの1つの辺（例えばＢＣ）の中点をとります。Ｄは、Ｉに関してＡを180°回転した点（点対称）とします。この作図は、[変換]点対称ツールを使います。最初に変換される点Ａ、次に中心Ｉです。





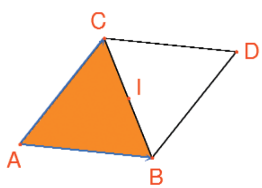
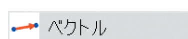
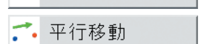


Figure 3.1 – 三角形の1つの辺（ここではＢＣ）の中点に関して180-回転して、三角形ＡＢＣの像が作られる。これで平行四辺形ＡＢＤＣができる。

四辺形ＡＢＤＣは平行四辺形なので、平面をしきつめることができます。次に、[直線]ベクトルツールを使って、２つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を作ります。これらのベクトルは、[変換]平行移動ツールを使って三角形ＡＢＣと三角形ＢＣＤの複製を作るのに使われます。





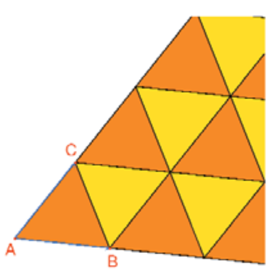
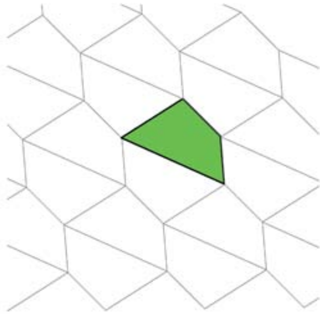


Figure 3.2 – [変換]平行移動ツールを使って、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の方向への2つの三角形の平行移動の像を作る。

同じ処理で、どんな四角形でも、（凸四角形、またはそうでなくても辺が交わらなければ、）平面をしきつめることができます。四角形の像はその辺の中点を中心とする回転移動により作られます。これにより対辺どうしが平行であるような六角形ができ、それを平行移動して、平面をしきつめます。

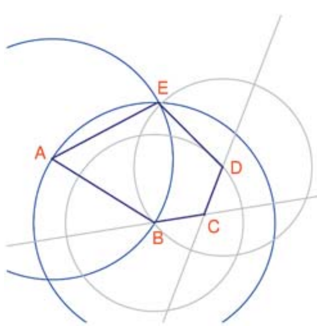
Figure 3.3 – 同様の作り方で、どんな四角形でも、（凸四角形、またはそうでなくても辺が交わらなければ、） 平面をしきつめることができます。



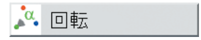
他の凸多角形に関しては、状況はもっと複雑になります。７辺以上の凸多角形で平面をしきつめるのは不可能であるということは証明することができます。平面をしきつめられる六角形には３つのタイプがあり、凸五角形には少なくとも14のタイプがあります。これらのタイプはすべて角と辺に対する制約で定義されています。この14タイプがこの問題のすべての解となっているかどうかについては、現在のところまだ知られていません。14のうちの一番最近のものは、1985年に発見されました。私たちの知る限り、凹多角形に対するこの問題はまだ分類されていません。

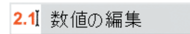
Exercise 5 – 次の条件を満たす凸五角形ＡＢＣＤＥを作りなさい。角Ａは60°、角Ｃは120°、ＡＢ＝ＡＥ、ＣＢ＝ＣＤ。これらの条件は一意的に五角形を定義せず、五角形の属を定義する。作図の際、少なくとも３つの独立な点があります。

Figure 3.4 – $\widehat{A}=60°$、$\widehat{C}=120°$、ＡＢ＝ＡＥ、ＣＢ＝ＣＤという条件を満たす五角形の作図。Ａ、Ｂ、Ｃは平面上の独立な点。



[変換]回転ツールをつかって、Aに関して60°ずつ回転していきます。このツールは、変換する対称図形、角、回転の中心の選択を必要とし、五角形の花びらを6枚持つ“花”を作ります。
ツールが必要とする角の値は、作図領域上にある値であり、前に[表示]数値の編集ツールで作成された値です。





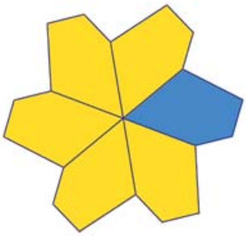


Figure 3.5 - 基本の五角形が、中心A、60°の回転で複製され、花びらが6枚の花が出来上がる。

では、変換を使って、これらの花を集めて平面をしきつめましょう。このしきつめは、*Tilings and Patterns* で与えられた分類に従うと、タイプ5になります。これは、*K. Reinhardt* によって書かれ、1918年に初版が出ています。

このしきつめはモノヘドラル（言い換えると、すべてのタイルが等長写像において単位元）であるだけでなく、イソヘドラル（しきつめの中で、すべての五角形が同じパターンの五角形で囲まれている）になっています。

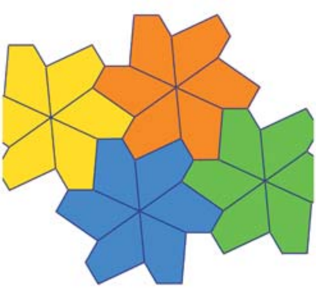


Figure 3.6 - 変換で花を集めて平面を覆う。

*Exercise 6** – 次の条件を満たす五角形ＡＢＣＤＥを作りなさい。 $\hat{E}=90°$、$\hat{A}+\hat{D}=180°$、$2\hat{B}-\hat{D}=180°$、$2\hat{C}+\hat{D}=360°$、$EA=ED=AB+CD$ 。

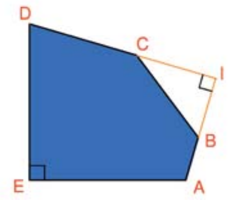


Figure 3.7 – Tilings and Patterns の分類でタイプ10の五角形。この五角形は平面のモノヘドラルなしきつめの基となっている。点ＡとＥは平面上の独立な点で、点Ｉは円弧状を自由に動く。

しきつめは最初にタイルをＥに関して90゜回転し、３つのコピーをとることからはじめます。角を切り取られた正方形が出来上がります。これらの正方形を一方向への変換で帯状にならべます。正方形の帯は、以下に見られるように、五角形の帯によって分けられます。

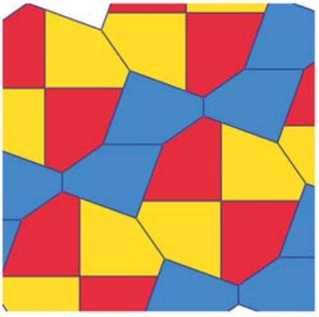


Figure 3.8 – 凸五角形による平面のモノヘドラルなしきつめ。このしきつめは、1975年のScientific American のMartinGardner による論文をもとに、RichardE.JamesIIIによって作られました。完成された論文は、'Time travel and other mathematical bewilderments', MartinGardner, Freeman 1987.にで参照できます。