CABRI II PLUS

Innowacyjne Narzędzie Matematyczne

PODRĘCZNIK UŻYTKOWNIKA

WITAJ!

Witaj w interaktywnym świecie Cabri GeometryTM!

Oprogramowanie Geometria Cabri zostało stworzone w IMAG, będącym połączeniem laboratorium CNRS (Narodowe Centrum Badań Naukowych) z Uniwersytetem Josepha Fourier'a w Grenoble we Francji. Jean-Marie LABORDE, duchowy ojciec Cabri rozpoczął realizację projektu w roku 1985, by ułatwić naukę oraz nauczanie geometrii.

Obecnie, ponad 15 milionów zadowolonych użytkowników pracuje z programem Geometria Cabri zarówno na komputerach jak i kalkulatorach graficznych Texas Instruments.

Konstruowanie obiektów geometrycznych na komputerze oferuje zupełnie nowe doświadczenie w porównaniu z wykonywaniem ćwiczeń w sposób tradycyjny, przy użyciu ołówka, papieru, linijki i cyrkla! Geometria Cabri II Plus oferuje szeroki zakres potężnych, lecz łatwych w użyciu narzędzi. Możesz rysować i manipulować zarówno figurami płaskimi jaki i bryłami, od najprostszych po najbardziej skomplikowane. By przetestować konstrukcję możesz swobodnie manipulować figurami na dowolnym etapie, wyciągać wnioski, mierzyć lub usuwać obiekty, obliczać, wprowadzać zmiany lub zacząć wszystko od początku. Geometria Cabri II Plus to nowoczesne narzędzie do nauki i nauczania geometrii, zaprojektowane z myślą o nauczycielach jak również uczniach na wszystkich poziomach nauki, od szkoły podstawowej do szkół wyższych.

Niektóre funkcje programu są specyficzne dla wersji Macintosh lub Windows: klawisze `Ctrl` i `Alt` w systemie Windows odpowiadają klawiszom `Crtl` i `Alt` na komputerach Macintosh; kliknięcie prawego przycisku myszy w systemie Windows odpowiada kombinacji `Ctrl` + kliknięcie na komputerach Macintosh.

• **Interfejs**: nowe, większe i bardziej czytelne ikony. Bardziej intuicyjne menu wyskakujące, ułatwiające dokonywanie wyborów. Zmiana właściwości dowolnego obiektu za pomocą kilku kliknięć.

• **Etykiety**: istnieje możliwość nadawania nazw wszystkim obiektom graficznym i umieszczania ich w dowolnym miejscu przy obiekcie.

• **Wyrażenia**: definiowanie wyrażenia z jedną lub wieloma zmiennymi i dynamiczne obliczanie ich wartości.

• **Natychmiastowe wykresy**: można w łatwy sposób rysować i analizować wykresy jednej lub więcej funkcji, a możliwość bezpośredniej ich manipulacji pozwala odczytywać wartość funkcji w zależności od jej parametrów.

• **Miejsce geometryczne**: wyświetlanie miejsca geometrycznego punktów lub obiektów i przecięć miejsc geometrycznych. Można również wyświetlić równania algebraiczne krzywych algebraicznych wykreślanych przy pomocy tego narzędzia.

• **Krótkie proste**: wyświetlana jest tylko użyteczna część linii. Możesz zmienić długość tej części tak często, jak tylko chcesz.

• **Kolory**: możliwość kolorowania obiektów i tekstu, jak również wypełnienia obszarów zamkniętych przy wykorzystaniu nowej palety kolorów i funkcji RGB ich zmiany.

• **Obrazy** (Bitmapy, JPEG, GIF): możliwość dołączania obrazu zapisanego w formacie JPG, BMP lub GIF do obiektów (punkty, odcinki, wielokąty, tło). Obrazy zostaną uaktualnione podczas animacji oraz manipulacji figury.

• **Tekst**: edycja stylu, czcionki i atrybuty tekstu każdego ze znaków osobno.

• **Okno Opisu Konstrukcji**: można otworzyć to okno by uzyskać dostęp do wszystkich etapów konstrukcji (tylko Windows).

• **Nagrywanie sesji**: nagrywanie sesji w trakcie korzystania z programu. Można potem wyświetlić ją na ekranie lub wydrukować, co jest pomocne w nadzorowaniu postępów uczniów i identyfikowaniu trudności, które napotykają (tylko Windows).

• **Import/Eksport konstrukcji**: skonstruowane figury mogą być przesyłane z komputera do aplikacji Cabri Junior zainstalowanej w kalkulatorach graficznych TI (TI-83 Plus i TI-84 Plus) i odwrotnie.

Te wszystkie wyjątkowe funkcje otwierają nowy wymiar nauki dla uczniów.

Niniejszy podręcznik jest podzielony na dwie części:

Część [1] PIERWSZE KROKI – SAMOUCZEK PODSTAWOWY dedykowany nowym użytkownikom Geometrii Cabri. Pozwala zapoznać się z interfejsem oraz używaniem myszy w programie. Jednak doświadczenie pokazuje, że ludzie uczą się bardzo szybko, jak korzystać z Geometrii Cabri, oraz że w trakcie zajęć uczniowie swobodnie korzystają z programu po 30 minutach od rozpoczęcia pracy z nim.

Część [2] ODKRYWANIE – ŚREDNIOZAAWANSOWANY SAMOUCZEK dedykowany nowym użytkownikom, podpowiada jak korzystać z programu, by poznać świat interaktywnej geometrii na poziomie szkoły średniej.

PRZEWODNIK.pdf jest kompletnym podręcznikiem użytkowania programu.

DLA ZAAWANSOWANYCH.pdf sugeruje jeszcze więcej działań z wykorzystaniem programu dla starszych klas szkoły średniej i studentów. Działania opisane w tych materiałach są w większości niezależne od siebie. Zachęcamy czytelników do tworzenia konstrukcji na podstawie dokładnych ich opisów i wykonywania proponowanych ćwiczeń.

Geometria Cabri II Plus od tego momentu będzie występować pod nazwą Geometria Cabri.

Odwiedź naszą stronę internetową www.cabri.com by uzyskać dostęp do uaktualnień podręcznika i informacji o produktach. Znajdziesz tam również linki do dziesiątek stron internetowych oraz informacje o książkach na temat geometrii i programu Cabri.

Życzymy Ci wielu fascynujących godzin spędzonych na konstruowaniu, eksploracjach i odkryciach z Cabri! Zespół Cabrilog

Podręcznik Cabri II Plus:
Autor: Sandra Hoath and Chartwell Yorke
Tłumaczenie: Bronisław Pabich, Maciej Marczewski, Agnieszka Nowakowska
Uaktualnienie: 11 lipca 2007
Nowe wersje: *www.cabri.com*
Zgłaszanie błędów: *support@cabri.com*
Projekt graficzny, układ stron, korekta: Cabrilog

SPIS TREŚCI

PIERWSZE KROKI – SAMOUCZEK PODSTAWOWY

1.1 FILOZOFIA

Program Geometria Cabri został zaprojektowany tak, by zapewnić najwyższy poziom interakcji (mysz, klawiatura, itd.) pomiędzy użytkownikami i oprogramowaniem, i w każdym przypadku zrobić to, czego oczekuje od niego użytkownik: z jednej strony spełniając ogólnie przyjęte normy, a z drugiej podążając najodpowiedniejszą z punktu widzenia matematyki ścieżką.

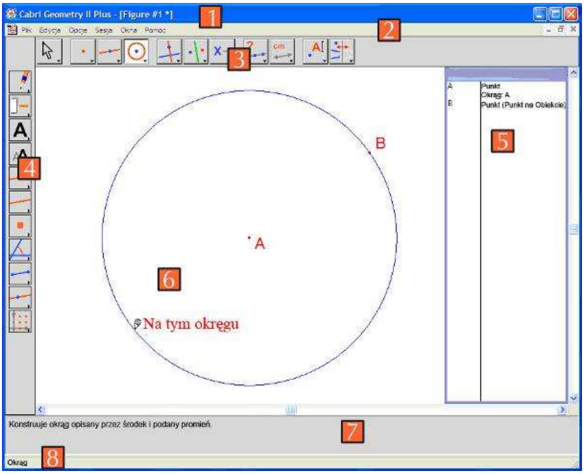
Dokument programu Geometria Cabri składa się z konstrukcji, która może być naniesiona w dowolnym miejscu wirtualnej kartki papieru o wielkości jednego metra kwadratowego. Konstrukcja jest tworzona przy użyciu standardowych obiektów geometrycznych (punktów, linii, kół, itp.) oraz innych (liczb, tekstu, formuł, itp.).

Dokument może również zawierać makrokonstrukcje, które umożliwiają zapamiętanie i późniejsze odtworzenie pośrednich etapów konstrukcji, rozszerzając tym samym funkcjonalność programu.

W programie Geometria Cabri można otworzyć jednocześnie więcej niż jeden dokument i wycinać, kopiować oraz wklejać elementy pomiędzy nimi.

1.2 INTERFEJS UŻYTKOWNIKA

Poniższy obrazek pokazuje główne okno programu Geometria Cabri oraz jego różne sekcje. Przy pierwszym uruchomieniu Paleta atrybutów, Okno pomocy i Okno opisu konstrukcji nie są wyświetlane.



1. Pasek tytułowy
2. Pasek narzędzi
3. Menu główne
4. Paleta atrybutów
5. Okno opisu konstrukcji
6. Przestrzeń do rysowania
7. Okno pomocy
8. Pasek stanu

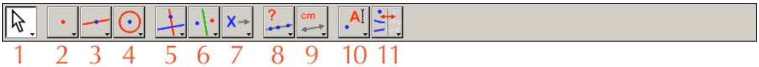
Pasek tytułowy pokazuje nazwę figury (w przypadku, gdy plik został otwarty lub zapisany) lub Figura #1,2... jeżeli figura nie została jeszcze nazwana.

Menu główne pozwala użytkownikowi manipulować dokumentami i sesjami oraz kontrolować ogólny wygląd i zachowanie programu.

W całym podręczniku wszystkie polecenia tego menu będą podawane w następujący sposób: [Opcja Menu]Polecenie. Na przykład, [Plik]Zapisz Jako... oznacza wybranie polecenia Zapisz Jako... z opcji menu Plik.

Pasek narzędzi prezentuje narzędzia, które można wykorzystać do tworzenia lub modyfikacji figury. Składa się z jedenastu rozwijalnych przyborników, w postaci ikon. By wybrać konkretny przybornik kliknij raz lewym przyciskiem myszy w ikonę. By rozwinąć przybornik kliknij i przytrzymaj lewy przycisk myszy. By wybrać narzędzie z przybornika trzymaj wciśnięty przycisk myszy i przesuń kursor na poszukiwane narzędzie, które w wyniku tego działania wyświetli się jako ikona przybornika.

Wygląd paska narzędzi można zmieniać lub blokować go w ustalonej konfiguracji by wykorzystać ją w klasie. Zobacz rozdział [8] OPCJE USTAWIEŃ i DOSTOSOWANIA PROGRAMU.



1. Manipulacje
2. Punkty
3. Linie
4. Krzywe
5. Konstrukcje
6. Przekształcenia
7. Makrokonstrukcje
8. Właściwości
9. Mierzenie
10. Tekst i symbole
11. Atrybuty obiektów

W niniejszym podręczniku Narzędzie z Przybornika jest opisane w postaci: [Przybornik]Narzędzie, a na marginesie umieszczona jest odpowiednia ikona. Na przykład [Linie]Półprosta oznacza wybór narzędzia Półprosta z przybornika *Linie*. (Niektóre z opisów zbyt długich, by zmieścić je na marginesie zostały skrócone).

Ikona przybornika może być wyświetlona w dużym lub małym formacie. By zmienić wielkość ikony, przesuń kursor na prawo od ostatniego narzędzia w przyborniku, kliknij prawym przyciskiem myszy z wciśniętym równocześnie klawiszem `Ctrl` /`Ctrl`+klik i wybierz Małe Ikony.

Pasek statusu zawsze wskazuje aktywne narzędzie (tylko w WINDOWS).

Paleta atrybutów pozwala zmieniać atrybuty różnych obiektów: kolor, styl, rozmiar... Włączamy ją z menu głównego poleceniem *[OPCJE]Pokaż paletę atrybutów*, a wyłączamy z menu głównego poleceniem *[OPCJE]Ukryj paletę atrybutów*, lub przez wciśnięcie klawisza `F9`.

Okno pomocy udostępnia pomoc dla aktywnego narzędzia. Włączamy i wyłączamy je klawiszem `F1`. Pojawia się wówczas opis aktualnego narzędzia, wymaganych dla niego obiektów oraz wyniku konstrukcji.

Okno opisu konstrukcji zawiera tekst opisujący kolejne kroki konstrukcji. Wyświetlona jest lista wszystkich skonstruowanych obiektów i użytych do konstrukcji metod. Włączamy go z menu głównego poleceniem *[OPCJE]Pokaż opis konstrukcji* lub przez wciśnięcie klawisza `F10` (tylko WINDOWS).

Przestrzeń do rysowania ukazuje dostępną część całkowitej powierzchni. W tym obszarze wykonywane są konstrukcje geometryczne.

1.3 KORZYSTANIE Z MYSZY

Większość funkcji jest kontrolowana za pomocą myszy:

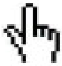
- poruszenie myszy przemieszcza kursor,
- naciśnięcie przycisku myszy,
- zwolnienie przycisku myszy.

W przypadku, gdy mysz jest wykorzystywana do przemieszczania kursora po obszarze rysowania, program Geometria Cabri informuje o możliwych rezultatach kliknięcia lub przeciągnięcia i upuszczenia na trzy sposoby:

- zmiana kształtu kursora,
- pole tekstowe obok kursora,
- częściowe wyświetlenie konstruowanego obiektu.

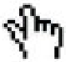
W zależności od konstrukcji, wyskakujące powiadomienie i częściowy obiekt mogą nie być wyświetlone.

Oto lista możliwych stanów kursora:



Istniejący obiekt może być wybrany.

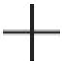
Istniejący obiekt może być wybrany, przemieszczony lub użyty w konstrukcji.



Istniejący obiekt został kliknięty w celu wybrania lub użycia w konstrukcji.

Dostępnych jest kilka możliwości wyboru dla obiektów znajdujących się pod kursorem. Kliknij, by wyświetlić wyskakujące menu wyboru konkretnego obiektu.

Istniejący obiekt jest w trakcie przemieszczania.



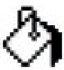
Kursor znajduje się w nieużywanej części kartki i używając kliknięcia i przeciągnięcia można zaznaczyć prostokątny obszar.

Wskazuje na możliwość przemieszczania widocznego obszaru kartki. By uzyskać dostęp do tej funkcji w dowolnym momencie naciśnij i przytrzymaj klawisz Ctrl. W tym trybie, przeciągnięcie i upuszczenie przemieszcza obszar roboczy w obrębie okna.

Obszar roboczy jest przeciągany.

Kliknięcie stworzy nowy, niezależny ruchomy punkt na kartce.

Kliknięcie stworzy nowy punkt, który jest możliwy do przemieszczania w obrębie istniejącego obiektu lub w przecięciu dwóch istniejących obiektów.



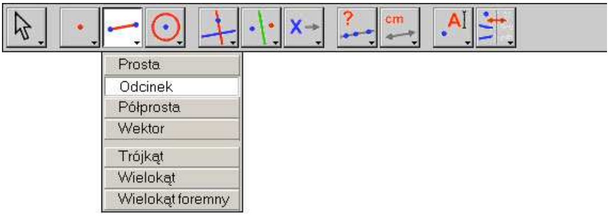
Kliknięcie wypełni obiekt znajdujący się pod kursorem z użyciem bieżącego koloru.

Kliknięcie zmieni atrybut (kolor, styl czy grubość) obiektu pod kursorem.

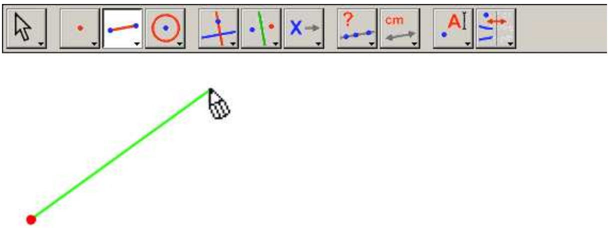
1.4 TWOJA PIERWSZA KONSTRUKCJA

W celu ilustracji rozdziału [1] PIERWSZE KROKI – SAMOUCZEK PODSTAWOWY skonstruujemy kwadrat, mając zadaną jedną z jego przekątnych. Kiedy uruchamiasz program Geometria Cabri, otwiera się nowa, czysta wirtualna kartka, dzięki czemu natychmiast możesz rozpocząć konstrukcję.

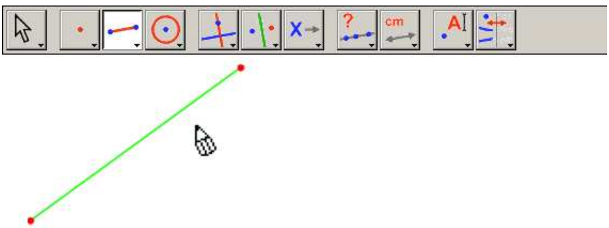
Skonstruuj odcinek, który będzie przekątną kwadratu. Najpierw wybierz narzędzie [Linie]Odcinek.



Rysunek 1.1 *– Wybieranie narzędzia [Linie]Odcinek.*



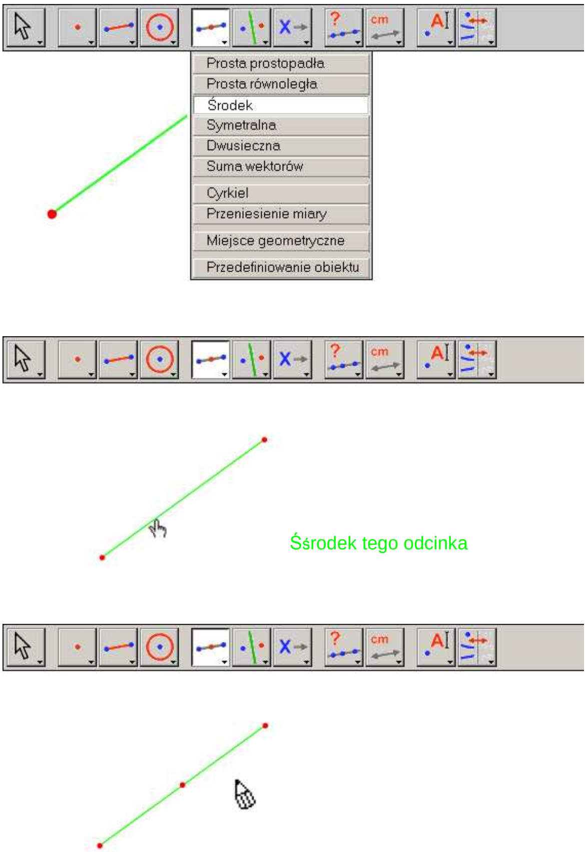
Rysunek 1.2 *– Konstruowanie pierwszego punktu. Wyświetla się podgląd odcinka podążający za kursorem do czasu utworzenia drugiego punktu.*



Rysunek 1.3 *– Po utworzeniu drugiego punktu odcinek jest gotowy. Narzędzie [Linie]Odcinek pozostaje aktywne, by umożliwić konstrukcję następnego odcinka.*

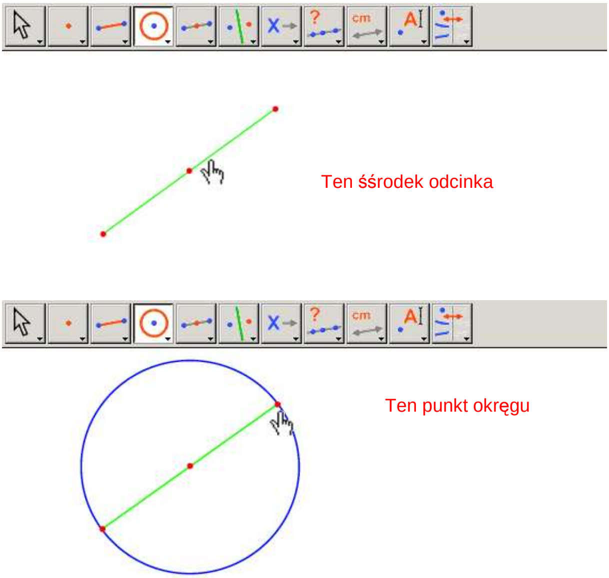
Przemieść teraz kursor w obrębie obszaru rysowania: przybierze on następujący kształt . Kliknij raz by utworzyć pierwszy punkt. W dalszym ciągu przemieszczaj kursor po obszarze rysowania. Odcinek rozciągnie się od pierwszego punktu do kursora, ukazując gdzie zostanie utworzony. Kliknij, by utworzyć drugi punkt. Nasz rysunek zawiera teraz dwa punkty i jeden odcinek.

By skonstruować kwadrat, najpierw utwórz okrąg wykorzystując odcinek jako jego średnicę. Środek okręgu to środek odcinka. By skonstruować punkt, będący środkiem odcinka wybierz narzędzie [Konstrukcje]Środek i przemieść kursor nad odcinek. Przy kursorze zostanie wyświetlona informacja *Środek tego odcinka*, a kształt kursora zmieni się na . Kliknij by zaznaczyć środek odcinka.



Rysunek 1.4 *– Konstruowanie środka odcinka.*

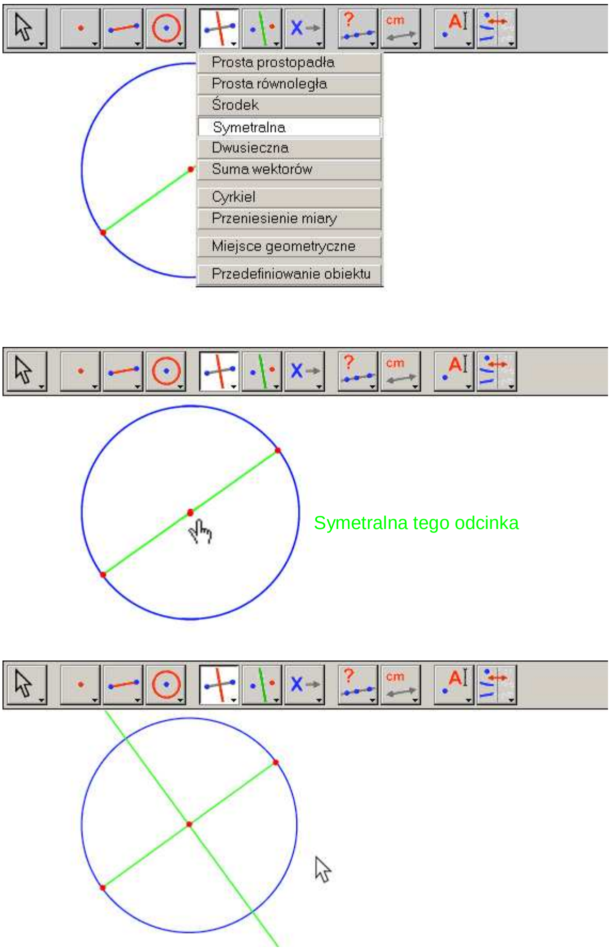
Wybierz narzędzie [Krzywe]Okrąg i przesuń kursor w pobliże środka. Zostanie wyświetlone pole tekstowe Ten środek. Narzędzie [Krzywe]Okrąg wymaga jeszcze wskazania środka okręgu, więc kliknij na środku skonstruowanego odcinka, by go wybrać. Kiedy to zrobisz, w miarę oddalania się kursora od tego punktu tworzy się okrąg. Przesuń go w pobliże jednego z końców odcinka; aż zostanie wyświetlone pole tekstowe i ten jako punkt okręgu. By ukończyć tworzenie okręgu kliknij ten punkt.



***Rysunek 1.5** – Konstruowanie okręgu z zadanym odcinkiem jako jego średnicą.*

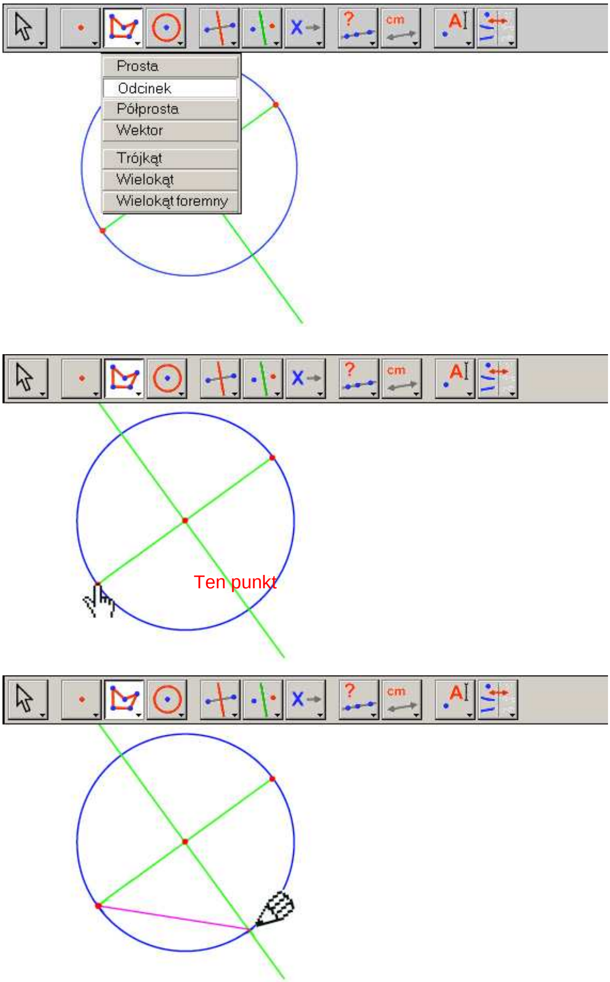
Wybierz narzędzie [Manipulacja]Wskaźnik lub wciśnij klawisz ESC, by zmodyfikować figurę. Jedynymi obiektami, które możesz przemieścić, są końce odcinka i sam odcinek. Jeżeli przemieścisz kursor nad jeden z tych obiektów jego kształt zmieni się na i pokaże się pole tekstowe Ten punkt lub Ten odcinek. Punkt lub odcinek może być wtedy przemieszczony przy pomocy myszy a cała figura zostanie automatycznie zaktualizowana: odcinek zostanie narysowany ponownie, a środek i okrąg odpowiednio się przemieszczą.

By skonstruować kwadrat, skonstruuj najpierw przekątną, która stanowi średnicę okręgu, prostopadłą do odcinka wyjściowego. Następnie skonstruuj symetralną odcinka: linię prostopadłą do odcinka, przechodzącą przez jego środek. Wybierz narzędzie [Konstrukcje]Symetralna i zaznacz odcinek klikając na niego. Program Geometria Cabri wykreśli symetralną.



***Rysunek 1.6** – Konstruowanie symetralnej odcinka w celu otrzymania drugiej przekątnej kwadratu.*

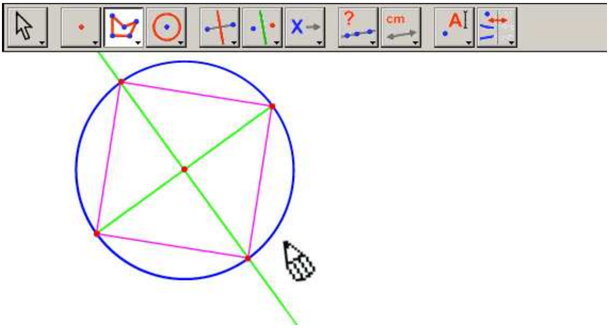
By ukończyć konstrukcję kwadratu wybierz narzędzie [Linie]Wielokąt. Narzędzie to wymaga od Ciebie zaznaczenia sekwencji punktów w celu zdefiniowania wierzchołków wielokąta. By zakończyć wprowadzanie sekwencji wybierz ponownie punkt początkowy sekwencji lub kliknij dwukrotnie na jej ostatni punkt. Dwa punkty przecięcia okręgu z symetralną nie są w rzeczywistości konstruowane: program Geometria Cabri umożliwia ich konstrukcję w dowolnym momencie, jeżeli zajdzie taka potrzeba.



Rysunek 1.7 *– Konstruowanie kwadratu z użyciem punktów przecięcia okręgu z symetralną.*

Innymi słowy, wybierz jeden z końców odcinka jako pierwszy wierzchołek wielokąta, następnie przesuń kursor do jednego z punktów przecięcia okręgu z symetralną.

Zostanie wyświetlone pole tekstowe by zasygnalizować, że kliknięcie utworzy punkt przecięcia. Zaznacz ten punkt jako kolejny wierzchołek wielokąta. Kliknij w tym miejscu, by utworzyć ten punkt, następnie wybierz kolejny koniec odcinka i drugi punkt przecięcia symetralnej. W końcu wybierz ponownie punkt początkowy sekwencji (lub kliknij podwójnie na ostatnim wierzchołku wielokąta).



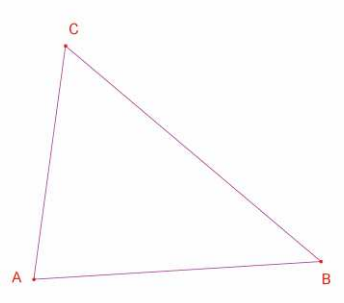
Rysunek 1.8 *– Twoja pierwsza konstrukcja w Geometrii Cabri!*

LINIA EULERA

W niniejszym rozdziale skonstruujemy trójkąt ABC, następnie jego trzy środkowe. Środkowe to linie łączące wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Następnie utworzymy trzy wysokości trójkąta: linie przechodzące przez wierzchołki trójkąta i prostopadłe do przeciwległego boku. Ostatecznie skonstruujemy trzy symetralne boków trójkąta: linie prostopadłe do każdego boku przechodzące przez jego środek. Znanym faktem jest, iż trzy wysokości, trzy środkowe i trzy symetralne trójkąta łączą się każde w innym punkcie tworząc linię prostą, nazywaną prostą Eulera w trójkącie.

By skonstruować trójkąt wybierz narzędzie [Linie]Trójkąt. W celu uzyskania informacji na temat posługiwania się przybornikiem zobacz Rozdział [1] PIERWSZE KROKI – SAMOUCZEK PODSTAWOWY w poprzedniej części.

Gdy narzędzie [Linie]Trójkąt jest aktywne, kliknij na puste pole, by stworzyć trzy nowe punkty w obszarze rysowania. Te punkty mogą być nazwane natychmiast po utworzeniu poprzez wpisanie ich nazw z klawiatury. Gdy trójkąt zostanie skonstruowany, możesz przemieszczać te etykietki dookoła punktów by na przykład umieścić je poza trójkątem.



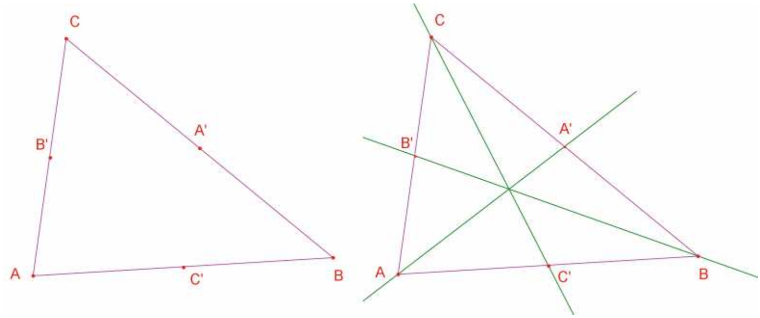
[1] *Léonard Euler, 1707-1783*

Rysunek 2.1 *– Trójkąt ABC skonstruowany za pomocą narzędzia [Linie]Trójkąt. Wierzchołki są nazwane bezpośrednio poprzez wpisanie ich nazw w trakcie tworzenia.*

By przesunąć nazwę obiektu użyj narzędzia [Manipulacja]Wskaźnik. Przesuń nazwę umieszczając nad nią kursor aż pokaże się pole tekstowe Ta nazwa, następnie przytrzymaj przycisk myszy w trakcie przesuwania myszy, by umieścić nazwę w oczekiwanym miejscu. By zmienić nazwę obiektu wybierz narzędzie [Tekst i symbole]Nazywanie i wybierz nazwę; wyświetli się okno edycyjne.

Użyj narzędzia [Konstrukcje]Środek by skonstruować środki odcinków. By utworzyć środek odcinka AB wybierz najpierw A, następnie B.

Innym sposobem konstrukcji środka odcinka jest wybranie samego odcinka. Możesz nazywać bezpośrednio nowe punkty, na przykład C'. W ten sam sposób możesz konstruować środki odcinków A' na BC, B' na CA.

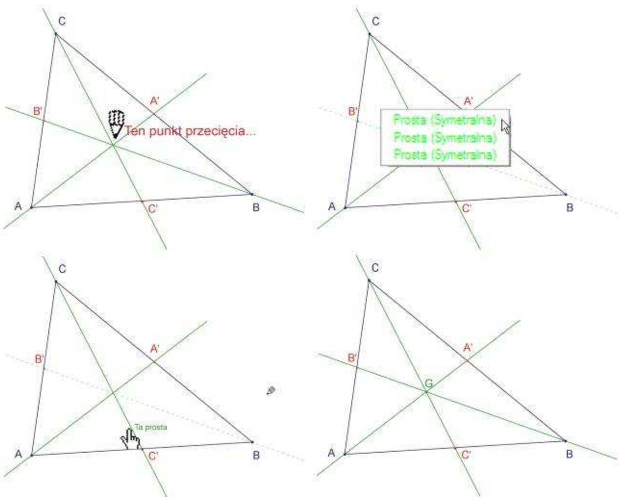


Rysunek 2.2 *– [Z lewej]. By skonstruować środki odcinków użyj narzędzia [Konstrukcje]Środek, który jako argumenty akceptuje dwa punkty, odcinek lub bok wielokąta.*
[Z prawej]. By skonstruować środkowe użyj narzędzia [Linie]Prosta, a by zmienić ich kolor narzędzia [Właściwości]Kolor.

Narzędzie [Manipulacja]Wskaźnik pozwala swobodnie poruszać niezależne, ruchome obiekty konstrukcji. W tym przypadku trzy punkty A, B i C są niezależnymi, ruchomymi obiektami. Cała konstrukcja jest automatycznie uaktualniana w momencie poruszenia któregoś z nich. Dzięki temu masz możliwość przyjrzenia się różnorodnym konfiguracjom konstrukcji. By sprawdzić, które z obiektów są ruchome, wybierz narzędzie [Manipulacja]Wskaźnik, kliknij i przytrzymaj przycisk na pustej części obszaru rysowania. Po chwili obiekty ruchome zostaną wyświetlone jako pływające zaznaczenie (znane również jako maszerujące mrówki). Użyj narzędzia [Linie]Prosta by skonstruować trzy środkowe. Dla środkowej AA' kliknij najpierw punkt A, następnie A'.

Użyj narzędzia [Właściwości]Kolor... by zmienić kolor linii. Wybierz barwę z palety klikając na nią, następnie kliknij na obiekt, na który ma zostać naniesiony kolor.

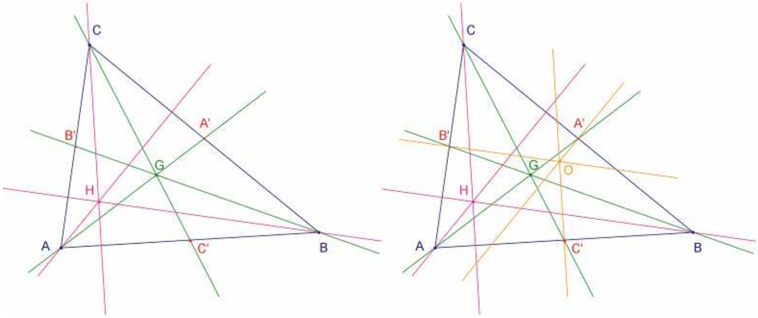
Wybierz narzędzie [Punkty]Punkt, a następnie umieść kursor w pobliżu punktu przecięcia trzech środkowych. Program Geometria Cabri usiłuje utworzyć punkt przecięcia dwóch linii, jednak ponieważ w miejscu przecięcia znajdują się trzy linie musisz wybrać dwie z nich, które posłużą do skonstruowania punktu przecięcia. W miarę przesuwania kursora w dół listy obiektów, podświetlane są odpowiednie linie w figurze. Przypisz nazwę G punktowi przecięcia środkowych.



Rysunek 2.3 *– Konstruowanie punktu przecięcia środkowych oraz rozwiązywanie problemu niejednoznaczności wyboru.*

Skorzystaj z narzędzia [Konstrukcje]Prosta prostopadła by skonstruować wysokość trójkąta. Narzędzie to tworzy linię, która jest prostopadła do zadanego kierunku, przechodząc przez zadany punkt. Tak więc wybierz punkt oraz: prostą, odcinek, promień itd. Kolejność wyboru nie ma znaczenia. By skonstruować wysokość przechodzącą przez punkt A, wybierz ten punkt, a następnie bok BC. Skorzystaj z tej samej metody by skonstruować wysokości poprowadzone z wierzchołków B i C. Tak, jak w przypadku środkowych, wybierz kolor dla wysokości i skonstruuj ich punkt przecięcia H.

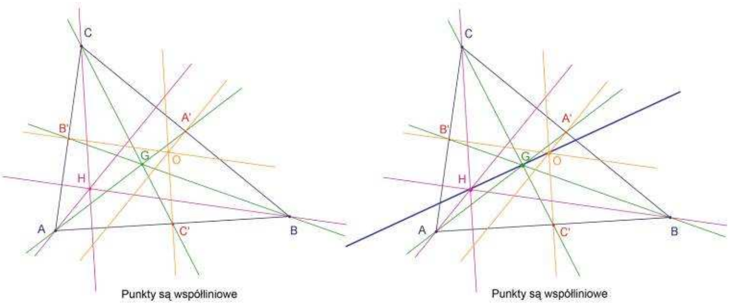
Skorzystaj z narzędzia [Konstrukcje]Symetralna by skonstruować symetralną odcinka. Wybierz odcinek lub oba jego końce. Oznacz punkt przecięcia trzech symetralnych jako O.



__Rysunek 2.4__ – [Z lewej]. Konstruowanie wysokości z wykorzystaniem narzędzia [Konstrukcje]Prosta prostopadła
[Z prawej]. Konstruowanie symetralnych z wykorzystaniem narzędzia [Konstrukcje]Symetralna.

By sprawdzić, czy punkty O, H i G są współliniowe możesz skorzystać z narzędzia [Atrybuty obiektów]Czy współliniowe? Wybierając wszystkie punkty po kolei, a następnie klikając gdziekolwiek w obszarze rysowania program Geometria Cabri wyświetli informację o współliniowości tych punktów.
Jeżeli przemieścisz niezależne punkty w figurze, ten tekst jest aktualizowany w tym samym czasie co inne części figury.

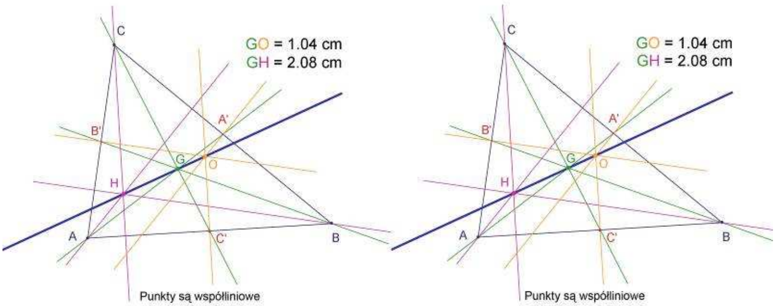
By skonstruować linię Eulera trójkąta przechodzącą przez punkty O, H i G skorzystaj z narzędzia [Linie]Prosta wybierając, na przykład punkty O i H. By utworzona linia wyróżniała się, użyj narzędzia [Właściwości] Grubość linii…



__Rysunek 2.5__ – [Z lewej]. Sprawdzanie współliniowości punktów O, H i G. Narzędzie [Atrybuty obiektów]Czy współliniowe? Tworzy wiadomość tekstową Punkty są współliniowe lub Punkty nie są współliniowe.

[Z prawej]. Linia Eulera w trójkącie, uczyniona lepiej widoczną przez pogrubienie za pomocą narzędzia [Właściwości]Grubość linii…

Jeżeli zmienisz kształt trójkąta zmieniając położenie wierzchołków względem siebie, jest oczywiste, że punkt G zawsze będzie znajdował się pomiędzy punktami O i H, jak również nie ulegnie zmianie jego położenie na odcinku. Załóżmy, że chcemy zweryfikować to stwierdzenie mierząc długości odcinków GO i GH. Wybierz narzędzie [Mierzenie] Długość i odległość. Narzędzie to mierzy odległość między dwoma punktami lub długość odcinka w zależności od wybranego obiektu. Wybierz punkt G, a następnie O: pojawi się odległość od G do O, mierzona w centymetrach. Zrób to samo dla punktów G i H. Gdy już przeprowadzisz pomiary możesz zmodyfikować odpowiednie wiadomości tekstowe dodając, na przykład wyrażenie GO= przed liczbą. (tylko Windows).

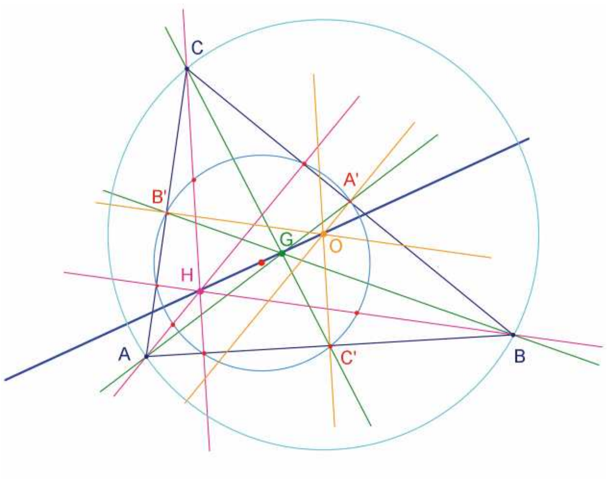


Rysunek 2.6 *– [Z lewej]. Wykorzystanie narzędzia [Mierzenie] Długość i odległość do znalezienia długości odcinków GO i GH.*
[Z prawej]. Użycie kalkulatora – [Mierzenie] Kalkulator... do wyświetlenia stosunku GH/GO i pokazania, że jest on zawsze równy 2.

Wprowadzając zmiany w oryginalnym trójkącie, możesz zauważyć, że odcinek GH jest zawsze dwa razy dłuższy od GO. By to zweryfikować możemy obliczyć stosunek GH/GO. Wybierz narzędzie [Mierzenie] Kalkulator... Wybierz wiadomość tekstową podającą odległość GH, potem operator dzielenia / i w końcu wiadomość tekstową podającą odległość GO. Kliknij klawisz = by otrzymać wynik, który może być przeniesiony i upuszczony na obszar rysowania. Jeżeli wybierzesz opcję [Manipulacja]Wskaźnik lub wciśniesz klawisz ESC i wskażesz wyznaczoną liczbę, to możesz za pomocą klawiszy + i − na klawiaturze zwiększyć lub zmniejszyć ilość wyświetlanych jej cyfr. Możesz wyświetlić obliczony stosunek z użyciem dziesięciu lub więcej cyfr, by ukazać, że w rzeczywistości ten stosunek jest stały i równy 2.

Ćwiczenie 1 – Dodaj do figury okrąg opisany na trójkącie, ze środkiem w punkcie O, przechodzący przez punkty A, B i C wykorzystując narzędzie [Krzywe]Okrąg.

Ćwiczenie 2 – Następnie dodaj dla trójkąta dziewięciopunktowy okrąg. Jest to okrąg, którego środek jest środkiem odcinka OH, przechodzący przez środki boków: A', B' i C', spodek każdej z wysokości oraz środki odcinków HA, HB i HC.



***Rysunek 2.7** – figura końcowa, ukazująca trójkąt z okręgiem na nim opisanym oraz okręgiem dziewięciopunktowym*

POSZUKIWANIE PUNKTU

Następujące działanie ilustruje kilka sposobów odkrywania z pomocą programu Geometria Cabri. Rozpoczynając od trzech zadanych punktów A, B, C, znajdź punkt M, dla którego:

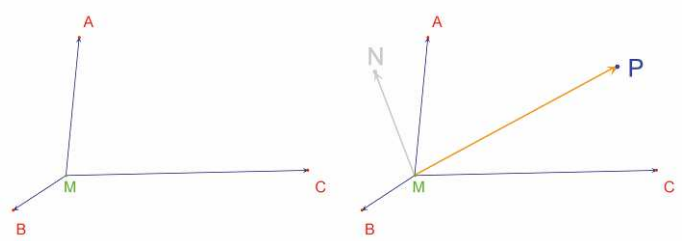
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$$

Przede wszystkim, skonstruuj cztery punkty w dowolnych miejscach używając narzędzia [Punkty]Punkt, nazwij je A, B, C oraz M.

Program Geometria Cabri pozwala używać wektorów. Każdy wektor jest przedstawiony w postaci odcinka zakończonego strzałką. Skonstruuj teraz wektor MA korzystając z narzędzia [Linie]Wektor, wybierając najpierw M, potem A. Wektor ma swój początek w punkcie M. Użyj tej samej metody by skonstruować wektory MB i MC.

Następnie skonstruuj wektor sumy $\vec{MA} + \vec{MB}$ korzystając z narzędzia [Konstrukcje]Suma wektorów. Kliknij najpierw obydwa wektory, a następnie początek wektora wynikowego, wybierając dla tego przykładu punkt M. Nazwij drugi koniec tego wektora N.

Ostatecznie, używając tej samej metody, skonstruuj sumę wszystkich trzech wektorów obierając M jako początek wektora wynikowego. Dodaj $\vec{MN}$ (będący sumą $\vec{MA} + \vec{MB}$) i $\vec{MC}$. Nadaj końcowi tego wektora nazwę P.



***Rysunek 3.1** – [Z lewej]. Rozpoczynając od trzech dowolnych punktów i dalszego M, konstruowane są wektory* $\vec{MA}, \vec{MB}$ *i* $\vec{MC}$.

[Z prawej]. Konstruowanie $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB}$
oraz $\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ z wykorzystaniem narzędzia [Konstrukcje]Suma wektorów.

Poszukaj teraz rozwiązania zadania za pomocą wykresu. By to uczynić, wybierz narzędzie [Manipulacje]Wskaźnik-i przemieść punkt M. Wektor będący sumą trzech wektorów jest uaktualniany na bieżąco, w miarę tego, jak poruszasz punkt M po obszarze rysowania. Możesz zauważyć, że długość i kierunek wektora $\vec{MP}$ zależy od pozycji punktu M względem punktów A, B i C. Możemy zatem wysnuć następujące wnioski (wśród wielu możliwych):

• Istnieje tylko jedna pozycja punktu M, dla której wektor wynikowy jest zerowy: zadanie ma tylko jedno rozwiązanie. Punkt będący rozwiązaniem znajduje się wewnątrz trójkąta ABC.
• Czworokąt MANB jest równoległobokiem.
• Czworokąt MCPN jest równoległobokiem.
• By otrzymać zerowy wektor wynikowy, wektory $\vec{MN}$ i $\vec{MC}$ muszą być współliniowe i dodatkowo muszą mieć tę samą długość, lecz przeciwne kierunki.
• Wektor $\vec{MP}$ zawsze przechodzi przez ten sam punkt i ten punkt jest rozwiązaniem zadania.
• Pozycja punktu P jest zależna od pozycji punktu M. Na podstawie tego faktu, możemy zdefiniować przekształcenie, które łączy P z M, a rozwiązanie zadania jest punktem stałym tej transformacji.

Przypuśćmy dla przykładu, że zaobserwowaliśmy, że wektory $\vec{MN}$ i $\vec{MC}$ muszą mieć przeciwne kierunki. Powstaje pytanie: dla jakich pozycji punktu M, te dwa wektory są współliniowe? Przemieść punkt M w taki sposób, by te dwa wektory były współliniowe. Zauważ, że punkt M musi leżeć na linii prostej i że ta linia przechodzi przez punkt C i środek odcinka AB. Linia ta jest zatem środkową trójkąta przechodzącą przez punkt C. Skoro M jest tak samo zależne od A, B i C, zauważ, że punkt M musi również leżeć na dwóch pozostałych środkowych, a szukany punkt jest zatem punktem przecięcia trzech środkowych.

Jako ćwiczenie w klasie, uczniowie mogą kontynuować wykonywanie zadania rozwijając konstrukcję punktu będącego rozwiązaniem i dowodząc wniosków, które wynikły z przeprowadzonych badań.

Konstrukcja dynamiczna jest dużo bardziej przekonującym sposobem ilustracji niż nieruchoma figura narysowana na kartce papieru. W istocie, możemy sprawdzić prawdziwość naszych przypuszczeń na dużej liczbie przykładów, po prostu manipulując figurą. Przypuszczenie, które pozostaje prawdziwe po wprowadzeniu zmian w figurze będzie w większości przypadków potwierdzone.

Na zajęciach, zadaj uczniom (między innymi) następujące pytania:

• Czy dynamiczna i wizualnie poprawna konstrukcja jest w rzeczywistości poprawna?
• Czy prawidłowa dynamiczna konstrukcja jest odpowiedzią na postawione pytanie?
• Kiedy argument matematyczny może być uznany za dowód?
• Czego brakuje w konstrukcji dynamicznej by uczynić z niej dowód?
• Czy dowód musi być oparty na procedurze użytej do narysowania figury?

Ćwiczenie 3 – Rozszerz zadanie do czterech punktów, znajdując punkt M taki, że: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=\vec{0}$

Ćwiczenie 4 – Wymień wszystkie sposoby rozwiązania i dowody znane uczniom starszych klas szkół średnich, niezbędne dla poprzedniego zadania (trzy punkty).

Ćwiczenie 5 – Zbadaj i skonstruuj punkty M, dla których suma odległości $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}$ jest najmniejsza. Rozwiązaniem jest punkt Fermata[1] w trójkącie ABC.

[1] *Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

CZWOROKĄT VARIGNON'A

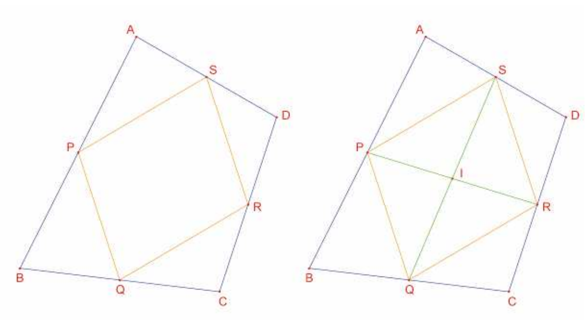
Następujący przykład ukazuje konstrukcję opartą na twierdzeniu Varignon'a[1].

Zacznij od skonstruowania dowolnego czworokąt ABCD. Wybierz narzędzie [Linie]Wielokąt, następnie wybierz cztery punkty i od razu nazwij je A, B, C, D. By zakończyć konstrukcję wielokąta, po utworzeniu punktu D wybierz ponownie punkt A.

Następnie skonstruuj środki odcinków: P – środek odcinka AB, Q – BC, R – CD oraz środek S odcinka DA korzystając z narzędzia [Konstrukcje]Środek.
Ostatecznie, skonstruuj czworokąt PQRS, korzystając z narzędzia [Linie]Wielokąt.

Dokonując zmian w figurze za pomocą narzędzia [Manipulacja]Wskaźnik, możesz zauważyć, że czworokąt PQRS wydaje się zawsze być równoległobokiem. Możesz skorzystać z narzędzia [Atrybuty obiektów]Czy równoległe? by program Geometria Cabri sprawdził, czy linie PQ i RS są równoległe, następnie zrób to samo dla PS i QR. By to uczynić wybierz najpierw bok PQ a potem RS: pojawi się informacja tekstowa potwierdzająca, że te dwa boki są rzeczywiście równoległe. Użyj tej samej metody by sprawdzić równoległość PS i QR.

[1]Pierre Varignon, 1654-1722

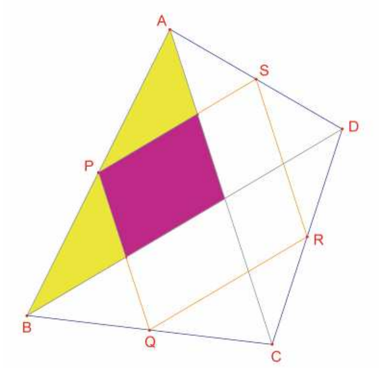


Rysunek 4.1 *– [Z lewej]. Rozpoczynając od dowolnego czworokąta ABCD skonstruuj czworokąt PQRS o wierzchołkach będących środkami boków ABCD. [Z prawej]. Konstrukcja przekątnych PQRS i ukazanie, że dzielą się wzajemnie na połowy*

Teraz skonstruujemy dwie przekątne PR i QS używając narzędzia [Linie]Odcinek oraz ich punkt przecięcia I z użyciem narzędzia [Punkty]Punkt. Istnieje kilka sposobów zademonstrowania, że punkt I jest środkiem zarówno PR i QS i zatem PQRS jest równoległobokiem.
Na przykład możesz wykorzystać środki ciężkości: punkt P może być potraktowany jako środek ciężkości dwóch cząsteczek o równej masie w A i B [(A,1), (B,1)]. Analogicznie punkt R jest środkiem ciężkości cząsteczek o równej masie w C i D [(C,1), (D,1)]. Wynika z tego, że środek odcinka PR jest środkiem ciężkości {(A,1), (B,1), (C,1), (D,1)}. To samo tyczy się środka odcinka QS. Wynika stąd, że te dwa środki pokrywają się w punkcie przecięcia I.

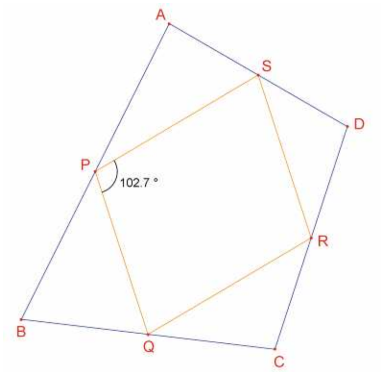
Twierdznie Varignon'a. Czworokąt PQRS, którego wierzchołki są środkami boków dowolnego czworokąta ABCD jest równoległobokiem, którego pole powierzchni stanowi połowę pola czworokąta ABCD.

Ćwiczenie 6 – Udowodnij, że druga część twierdzenia dotycząca pola PQRS jest prawdziwa. Podpowiedź: skorzystaj z figury pokazanej na Rysunku 4.2.



Rysunek 4.2 *– Konstrukcja pozwalająca zademonstrować prawdziwość drugiej części twierdzenia.*

Bez przemieszczania punktów A, B i C przesuń punkt D tak, żeby czworokąt PQRS wydawał się być prostokątem. Ponieważ wiemy już, że PQRS jest równoległobokiem wystarczy pokazać, że jeden z jego kątów jest prosty. Zmierz zatem miarę kąta o wierzchołku P korzystając z narzędzia [Mierzenie]Miara kąta. Narzędzie to wymaga wybrania trzech punktów, z których drugi jest wierzchołkiem kąta. Na przykład, możesz wybrać punkty S, P (wierzchołek kąta) a następnie Q.

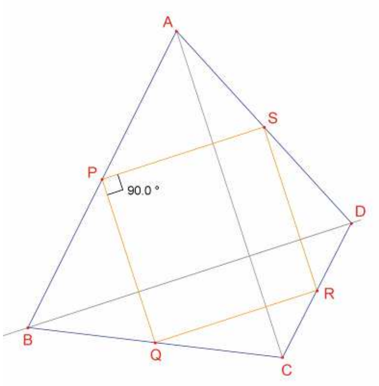


Rysunek 4.3 *– Mierzenie kąta równoległoboku PQRS o wierzchołku w punkcie P.*

Możesz również skorzystać z narzędzia [Mierzenie]Miara kąta, by ustalić miarę kąta, który został wcześniej oznaczony za pomocą narzędzia [Tekst i symbole]Zaznaczenie kąta. Korzystając z tego narzędzia musisz również wybrać trzy punkty w tej samej kolejności jak w przypadku narzędzia [Mierzenie]Miara kata. Przemieszczając punkt D tak, by równoległobok PQRS stał się prostokątem, możesz zauważyć, że jest nieskończenie wiele rozwiązań, dopóki punkt D leży na jednej linii prostej. Istotnie, jeżeli narysujesz przekątne AC i BD czworokąta ABCD możesz zauważyć, że boki równoległoboku PQRS są do nich równoległe, a stąd wynika, że PQRS jest prostokątem tylko wtedy, gdy AC i BD są prostopadłe. By upewnić się, że PQRS jest zawsze prostokątem, musimy ponownie zdefiniować położenie punktu D. Narysuj linię AC używając narzędzia [Linie]Prosta, wybierając punkty A i C, następnie wykreśl linię prostopadłą do niej przechodzącą przez punkt B za pomocą narzędzia [Konstrukcje]Prosta prostopadła, wybierając najpierw punkt B a potem linię AC.

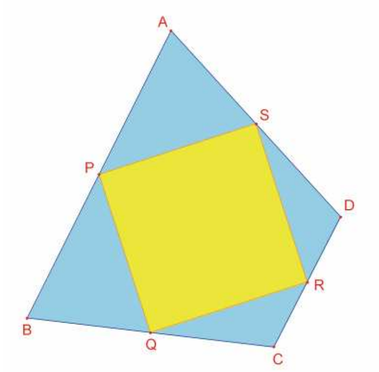
Punkt D jest obecnie niezależnym, ruchomym punktem figury. Zmodyfikuj go tak, by stał się punktem przypisanym do linii prostopadłej do AC przechodzącej przez punkt B. Wybierz narzędzie [Konstrukcje]Przedefiniowanie obiektu, a następnie wybierz punkt D. Pojawi się menu z dostępnymi opcjami redefiniowania punktu D. Wybierz Punkt na obiekcie i zaznacz dowolny punkt na linii prostopadłej. D przemieści się do tego punkt i od tego czasu będzie przypisane do wybranej linii.

Ponowne definiowanie jest potężnym narzędziem poznawczym. Pozwala zwiększać lub zmniejszać stopień swobody części figury bez konieczności rysowania jej od samego początku.



Rysunek 4.4 *– Punkt D jest teraz przedefiniowany w taki sposób, że PQRS jest zawsze prostokątem. Punkt D posiada wciąż jeden stopień swobody, pozwalający mu poruszać się wzdłuż linii.*

Ćwiczenie 7 – Znajdź warunek konieczny i wystarczający, by PQRS był kwadratem. Zredefiniuj ponownie punkt D w taki sposób, by za pomocą konstrukcji tworzone były tylko kwadraty.



Rysunek 4.5 *– W tym przypadku punkt D nie ma żadnego stopnia swobody i równoległobok PQRS jest zawsze kwadratem.*