CABRI II PLUS

CABRILOG

Innowacyjne narzędzie matematyczne

DLA ZAAWANSOWANYCH

WITAJ !

Witaj w części podręcznika programu Geometria Cabri przeznaczonej dla zaawansowanych użytkowników.

Część ta, składająca się z 3 rozdziałów, prezentuje kilka trudniejszych zadań, których rozwiązanie przy użyciu programu Geometria Cabri będzie bardzo proste i przyjemne. Zadania te uzupełniają część podręcznika **Samouczek**, która jest przeznaczona dla użytkowników pragnących w większym stopniu zgłębić tajniki programu Geometria Cabri.

Ćwiczenia te są przeznaczone dla osób na poziomie zaawansowanym lub studentów. W większości są niezależne od siebie. Zachęcamy czytelnika do odtwarzania opisywanych metod konstrukcji i wykonywania proponowanych ćwiczeń. Ćwiczenia trudniejsze oznaczone zostały gwiazdką.

Podręcznik Cabri II Plus:
Autor: Sandra Hoath and Chartwell Yorke
Tłumaczenie: Bronisław Pabich, Maciej Marczewski, Agnieszka Nowakowska
Uaktualnienie: 11 lipca 2007
Nowe wersje: *www.cabri.com*
Zgłaszanie błędów: *support@cabri.com*
Projekt graficzny, układ stron, korekta: Cabrilog

SPIS TRESCI

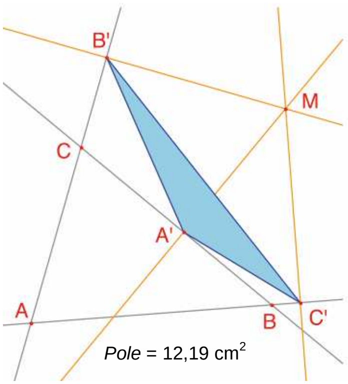
TRÓJKĄTY SPODKOWE

Za pomocą narzędzia [Punkty]Punkt narysuj na początek trzy punkty *A, B, C,* w dowolnym miejscu obszaru rysowania. Następnie skonstruuj linie proste *AB, BC* i *CA,* za pomocą narzędzia [Linie]Prosta. Utwórz gdziekolwiek czwarty punkt *M,* oraz rzuty prostopadłe punktu *M*: *C'*, *A'* i *B'*, na odpowiednich prostych. Punkty te konstruuje się tworząc proste prostopadłe do każdej z wymienionych wyżej prostych przechodzące przez punkt *M* używając w tym celu narzędzia [Konstrukcje]Prosta prostopadła. By zaznaczyć punkty przecięcia każdej prostej prostopadłej z odpowiadającą jej prostą użyj narzędzia [Punkty]Punkt. Narzędzie [Punkty]Punkt wykreśla punkty przecięcia dwóch obiektów w sposób pośredni. Wystarczy zbliżać kursor do punktu przecięcia, dopóki program Geometria Cabri nie wyświetli informacji Punkt tego przecięcia lub w przypadku trudności z określeniem, które obiekty się przecinają, informację Przecięcie... i menu, z którego można wybrać te obiekty.

Trzy punkty *A', B'* i *C'* definiują trójkąt, który można wykreślić za pomocą narzędzia [Linie]Trójkąt. Nazywa się go trójkątem spodkowym trójkąta *ABC.* Wnętrze tego trójkąta może zostać pokolorowane przy użyciu narzędzia [Atrybuty obiektów]Wypełnij... . Obiektem zainteresowania w tym przypadku jest pole tego trójkąta w zależności od położenia punktu *M.* Pole trójkąta mierzy się za pomocą narzędzia [Mierzenie]Pole. Wynikiem tego pomiaru jest arytmetyczna wartość pola powierzchni, nie mająca związku z ustawieniem trójkąta.

Wynik jest przedstawiony w cm^2, można go umieścić w dowolnym miejscu obszaru rysowania. Klikając na liczbę prawym przyciskiem myszy uaktywnimy menu skrótowe, które zawiera opcję zmiany wartości pola na wartość algebraiczną, znak której zależy od ustawienia trójkąta.

Rozpatrzymy teraz w jaki sposób zmienia się pole trójkąta *A'B'C'* w zależności od położenia punktu *M*. Istnieje kilka sposobów osiągnięcia tego. Na przykład, uruchom narzędzie [Tekst i Symbole]Ślad włączony / wyłączony (które wymaga wybrania obiektów, dla których śledzenie to ma zostać włączone, w tym przypadku punktu *M*, więc kliknij na niego). Następnie przesuń punkt *M* próbując utrzymać stałą wielkość pola trójkąta A*'B'C'*.

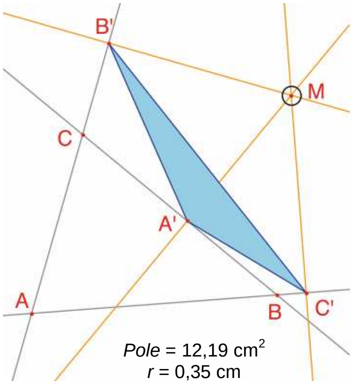


Rysunek 1.1 – Trójkąt spodkowy dla punktu *M* oraz jego pole powierzchni.

Następujące po sobie pozycje punktu *M* wyświetlane są na ekranie, dając ogólny wygląd linii, dla której wielkości pola trójkąta *A'B'C'* są takie same. Innym sposobem może być wykorzystanie miejsca geometrycznego punktów na siatce w celu wykreślenia graficznej prezentacji pola trójkąta *A'B'C'* dla dużej liczby pozycji punktu *M*.

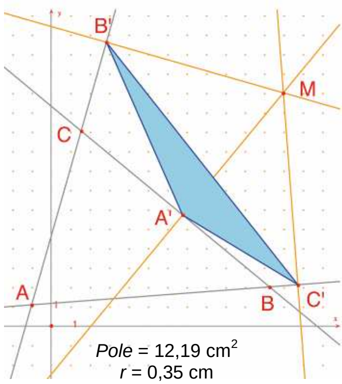
Tutaj skorzystamy z tej właśnie metody i narysujemy koło o środku w punkcie *M*, którego pole powierzchni dla bardzo dużej ilości pozycji punktu M jest proporcjonalne do pola trójkąta *A'B'C'*. By to uczynić, konieczne jest obliczenie długości promienia koła, proporcjonalnej do pierwiastka kwadratowego pola trójkąta. Uruchom narzędzie [Mierzenie]Kalkulator i wpisz w jego oknie wyrażenie sqrt (a następnie zaznacz liczbę, która wskazuje pole trójkąta) by wstawić je do wyrażenia, które przyjmuje postać sqrt(*a*). Zamknij prawy nawias. Podziel wyrażenie przez 10 by uniknąć otrzymania zbyt dużego koła.

Wyrażenie w kalkulatorze ma teraz postać sqrt(*a*)/10. Oblicz jego wartość klikając na przycisk =, a następnie przenieś otrzymany wynik w odpowiednie miejsce obszaru rysowania. By wykreślić okrąg o środku M i promieniu, który właśnie został obliczony, użyj narzędzia [Konstrukcje]Cyrkiel. Wybierz liczbę, która została naniesiona na obszar rysowania, a następnie punkt *M*. Wykreślony zostanie okrąg o środku w punkcie *M* z zadaną długością promienia. Możesz łatwo zobaczyć, jak zmienia się pole koła o środku *M*, w miarę przemieszczania tego punktu.



Rysunek 1.2 – Wykreślone koło o środku w punkcie *M*, którego pole powierzchni jest proporcjonalne do pola trójkąta *A'B'C'*.

Określimy teraz punkty kratowe oraz przedefiniujemy punkt *M* względem tych punktów, a następnie wykreślimy koła przedstawiające pole trójkąta spodkowego w każdym punkcie kratowym. Do zdefiniowania punktów kratowych wymagane jest istnienie układu współrzędnych. Skorzystamy z domyślnych osi, dostępnych dla każdej figury. By je wyświetlić wybierz [Atrybuty obiektów]Pokaż osie.

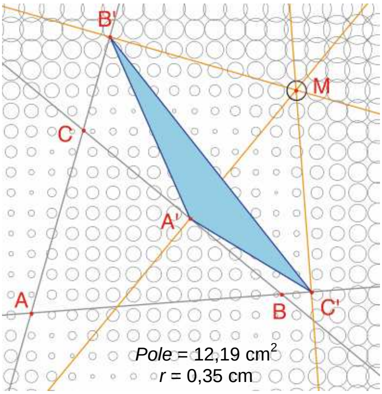


Rysunek 1.3 – Konstruowanie punktów kratowych z użyciem domyślnych osi. Punkt *M* jest następnie przedefiniowany jako jeden z punktów kratowych.

Następnie uruchom narzędzie [Atrybuty obiektów]Punkty kratowe i wybierz osie. W obszarze rysowania zostaną wyświetlone punkty kratowe.

Punkt *M* jest w dalszym ciągu niezależnym, ruchomym punktem; przedefiniujemy go teraz tak, by ograniczyć go do punktów kratowych. Uruchom narzędzie [Konstrukcje]Przedefiniowanie obiektu, a następnie wybierz punkt *M*. Wybierz opcję Punkt na obiekcie z wyświetlonej listy i dowolny punkt kratowy. Punkt *M* jest teraz ograniczony do punktów kratowych.

Można teraz skorzystać z narzędzia [Konstrukcje]Miejsce geometryczne, by skonstruować zbiór kół otrzymany w wyniku przemieszczania punktu *M* po punktach kratowych. Wybierz najpierw koło, a następnie punkt *M*, by otrzymać miejsce geometryczne kół w miarę przemieszczania punktu M przez punkty kratowe.

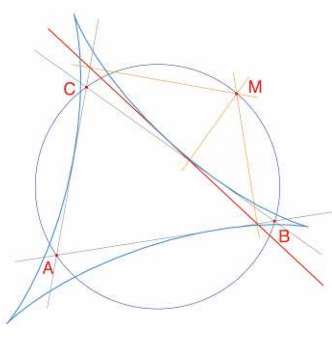


Rysunek 1.4 – Rozkład pola powierzchni trójkąta spodkowego jako funkcji położenia punktu M.

Można pokazać (zobacz na przykład *Geometry Revisited*, autorstwa *H.M.S. Coxeter'a* i *S.L. Greitzer'a*, *Mathematical Association of America*, podpunkt 1.9), że kontury linii, dla których pola trójkątów spodkowych są równe są kołami o środku takim samym jak środek okręgu opisanego na trójkącie *ABC*. W szczególnym przypadku pole trójkąta *A'B'C'* wynosi zero, wtedy, gdy punkt M leży na okręgu opisanym na trójkącie *ABC* lub równoważnie, punkty *A'*, *B'* i *C'* są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt *M* leży na okręgu opisanym na trójkącie *ABC*.
Ćwiczenie 1 – Gdy punkt *M* leży na okręgu opisanym na trójkącie *ABC*, punkty *A'*, *B'* i *C'* są współliniowe a linia *A'B'C'* nazywana jest linią *Simsona*, (lub linią *Wallace'a* – linia ta została nieprawidłowo przypisana Simsonowi, jako że została odkryta w roku 1799 przez Wallace'a). Skonstruuj obwiednię linii Simsona. (Skorzystaj z narzędzia [Konstrukcje]Miejsce geometryczne). Krzywa ta, niezmienna przy obrocie o 120^o, nazywana jest deltoidem (albo hipocykloidą *Steiner'a*), ponieważ jej kształt przypomina grecką literę delta (▯).
Jest ona styczną do trzech linii *AB*, *BC* i *CA*, krzywą algebraiczną czwartego stopnia. Możesz sprawdzić jej równanie,

korzystając z narzędzia [Mierzenie]Równanie i współrzędne.

Ćwiczenie 2* – Dla deltoidu z poprzedniego ćwiczenia skonstruuj środek, trzy punkty, gdzie krzywa styka się z trzema liniami prostymi oraz największy okrąg, który może być wpisany w krzywą.



Rysunek 1.5 – Obwiednia linii Simsona dla trójkąta *ABC* nazywana jest deltoidem. Posiada on te same symetrie co trójkąt równoboczny.

Robert Simson, 1687-1768

William Wallace, 1768-1843

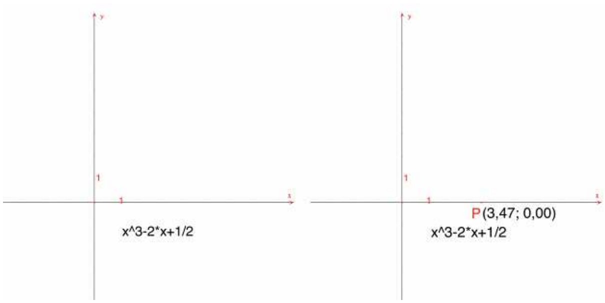
Jakob Steiner, 1796-1863

FUNKCJE

Wykresy funkcji w programie Geometria Cabri konstruuje się w bardzo prosty sposób, dzięki zastosowaniu układu współrzędnych oraz narzędzia służącego definiowaniu wyrażeń. Wykres może posłużyć do badania własności funkcji. W niniejszym rozdziale zbadamy wielomian stopnia 3.

$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

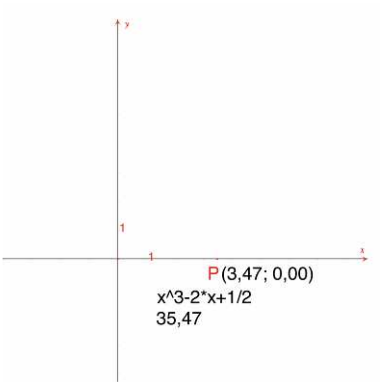
W pierwszej kolejności wyświetlimy układ współrzędnych za pomocą narzędzia [Atrybuty obiektów]Pokaż osie. Następnie musimy utworzyć odpowiednie wyrażenie w obszarze rysowania. Gdy wyrażenie zostanie już tam umieszczone, jego wartość można obliczyć dla różnych wielkości zmiennych. Dla wyżej podanej funkcji uruchom narzędzie [Tekst i Symbole]Wyrażenie i wpisz $x^3 - 2x + 1/2$. Nazwami dozwolonymi dla zmiennych są litery: *a*, *b*, *c*... *z*.



Rysunek 2.1 - [Z lewej]. Wprowadzanie wyrażenia opisującego funkcję.
[Z prawej]. Punkt *P* jest zaznaczony na osi *ox*, a jego współrzędne wyświetlone za pomocą narzędzia [Mierzenie]Równanie i współrzędne.

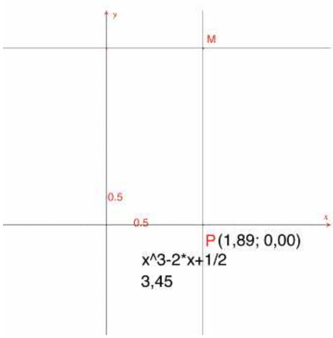
Zaznacz punkt *P* gdziekolwiek na osi *ox* (używając narzędzia [Punkty]Punkt). Wyświetl jego współrzędne uruchamiając narzędzie [Mierzenie]Równanie i współrzędne, a następnie klikając na punkt *P*. Tekst mówiący o współrzędnych jest początkowo przyczepiony do punktu P i razem z tym punktem się porusza. Za pomocą narzędzia [Manipulacja]Wskaźnik, współrzędne można odczepić od punktu *P* i umieścić w dowolnym miejscu. By z powrotem przyczepić je do punktu, kliknij i przenieś je w pobliże punktu *P*.

Idąc dalej, potrzebować będziemy wartości *f(x)*, gdzie *x* jest odciętą punktu *P*. Uruchom narzędzie [Mierzenie]Przypisz do wyrażenia, kliknij na wyrażenie, a następnie odciętą punktu *P* w nawiasie. Kolejność działań jest istotna.



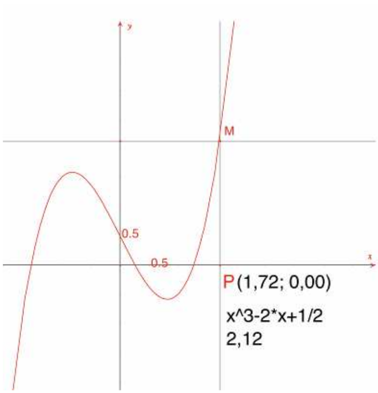
Rysunek 2.2 – Narzędzie [Mierzenie]Przypisz do wyrażenia jest użyte w celu obliczenia wartości *f(x)* dla odciętej punktu *P*.

Wartość tę przenosimy na oś *oy*, za pomocą narzędzia [Konstrukcje] Przeniesienie miary, a następnie wybieramy tę wartość na osi *oy*. Po uczynieniu tego wystarczy poprowadzić proste równoległe do każdej z osi, przechodzące przez obydwa zaznaczone punkty, za pomocą narzędzia [Konstrukcje]Prosta równoległa. Ich punkt przecięcia można oznaczyć jako *M*, a jego współrzędne to (*x*, *f*(*x*)). Na poniższym rysunku punkt *P* został przemieszczony bliżej początku układu współrzędnych (1,89; 0) tak, żeby punkt *M* był widoczny.



Rysunek 2.3 – Konstruowanie punktu *M(x, f(x))* za pomocą przeniesienia miary.

Wykres funkcji uzyskujemy w wyniku przemieszczenia się miejsca geometrycznego punktu *M* w miarę jak punkt *P* przemieszcza się wzdłuż osi *ox*. Konstruujemy je używając narzędzia [Konstrukcje]Miejsce geometryczne wybierając najpierw punkt *M*, potem *P*. By przyjrzeć się części wykresu, która nas interesuje, można przesunąć początek układu współrzędnych (przenosząc i upuszczając go w nowym położeniu) i zmienić skalę (przenosząc i upuszczając dowolny punkt na osi wyznaczający jednostkę).



Rysunek 2.4 – Tworzenie wykresu funkcji ukończone przy użyciu narzędzia [Konstrukcje]Miejsce geometryczne. Układ współrzędnych może zostać przeniesiony i przeskalowany by ułatwić analizę wybranego obszaru wykresu.

Skonstruujemy teraz przybliżoną styczną do tej krzywej w zadanym punkcie. Dla małych wartości *h*, wiadomo, że

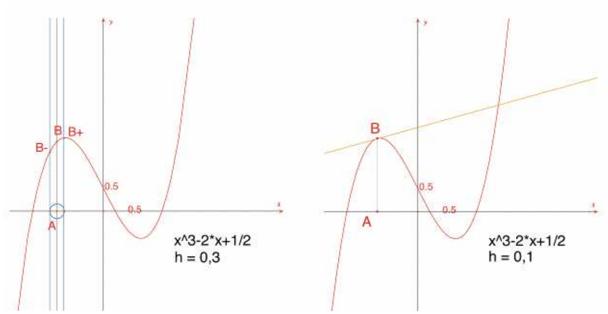
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Z geometrycznego punktu widzenia, przybliżenie to sprowadza współczynnik kierunkowy stycznej do współczynnika kierunkowego cięciwy łączącej punkty na krzywej, których odcięte wynoszą $x-h$ oraz $x+h$. Używając narzędzia [Tekst i Symbole]Edytor numeryczny (pokrętło) określamy wartość *h*, w naszym przypadku 0,3 by ułatwić konstrukcje. Wartość *h* można zmienić na mniejszą, by uzyskać lepsze przybliżenie stycznej. Następnie skonstruuj punkt *A* na osi *ox*, okrąg o środku w punkcie *A* i promieniu *h*.

Okrąg uzyskujemy uruchamiając narzędzie [Konstrukcje]Cyrkiel, wybierając najpierw wartość *h*, następnie punkt *A*. Punkty przecięcia tych punktów z osią *ox* posiadają odcięte $x-h$ i $x+h$, gdzie x jest rzędną punktu *A*. Wykreśl trzy proste równoległe do osi *oy* ([Konstrukcje]Prosta równoległa), które przechodzą przez dwa punkty przecięcia oraz punkt *A*.

Miejsca przecięcia tych trzech prostych z krzywą tworzą punkty B^-, B, B^+, które są punktami krzywej o odciętych odpowiednio $x - h$, x, i $x + h$.

Ponieważ figura zaczyna tracić przejrzystość, ukryj te elementy, które nie są już używane. Uruchom narzędzie [Atrybuty obiektów]Ukryj/Pokaż i wybierz elementy, które mają zostać ukryte. W tym wypadku, powinniśmy ukryć punkty P, M, dwie linie konstrukcyjne tworzące punkt M, współrzędne punktu P oraz wartość funkcji w punkcie P. Ukryte obiekty są widoczne tylko jako pływające zaznaczenie (maszerujące mrówki) i widoczne są tylko wtedy, gdy aktywne jest narzędzie [Atrybuty obiektów]Ukryj/Pokaż. By uczynić ukryte obiekty z powrotem widocznymi wybierz je ponownie, gdy narzędzie jest aktywne.



Rysunek 2.5 - [Z lewej]. Trzy punkty B^-, B, B^+ są konstruowane na krzywej.
[Z prawej]. Przybliżenie stycznej w punkcie B, gdy elementy konstrukcyjne zostały ukryte.

Przybliżeniem stycznej jest w tym wypadku prosta równoległa do prostej przechodzącej przez punkty B^-B^+ przechodząca przez punkt B. Skonstruuj wyżej wymienioną prostą korzystając z narzędzia [Linie]Prosta, a następnie [Konstrukcje]Prosta prostopadła. Teraz możemy ukryć prostą przechodzącą przez punkty B^-B^+, jak również inne elementy konstrukcyjne tak, by zostały widoczne tylko h, A, B oraz styczna. Widoczne jest, że wartość h = 0,3 już w tym momencie daje bardzo dobre przybliżenie stycznej. Mimo to, można je jeszcze poprawić, zmniejszając wartość h, do wartości, przykładowo, 0,0001.

Przesuwając punkt A wzdłuż osi ox, można dostrzec położenie trzech pierwiastków równania $f(x) = 0$, punkt stacjonarny funkcji f oraz punkt przegięcia krzywej.

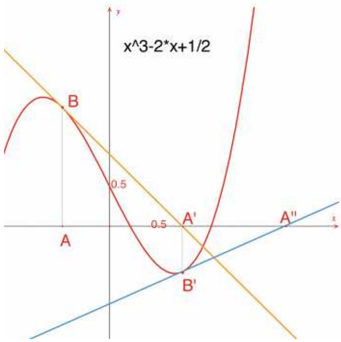
W kwestii formalnej, trzema rozwiązaniami równania $f(x) = 0$ są w przybliżeniu $r1 = -1{,}52568$, $r2 = 0{,}25865$, and $r3 = 1{,}26703$.
Odciętymi punktów stacjonarnych są

$e_1 = -\sqrt{6}/3 \approx -0{,}81649$ and $e_2 = \sqrt{6}/3 \approx 0{,}81649$
Punkt przegięcia ma współrzędne (0, 1/2).

Ćwiczenie 3 – Korzystając ze współczynnika kierunkowego stycznej, narysuj wykres przybliżający krzywą funkcji współczynnika kierunkowego.

Ćwiczenie 4 * - Styczna przecina oś *ox* w punkcie *A’* o odciętej *x’*, która, ogólnie rzecz biorąc, jest lepszym przybliżeniem pierwiastka, zakładając, że *A* znajduje się w sąsiedztwie pierwiastka równania *f(x)* = 0. Stwierdzenie to jest punktem wyjścia metody iteracyjnej nazywanej metodą Newton'a - Raphson'a znajdowania pierwiastka równania. Skonstruuj punkt *A’*, a następnie iteruj za pomocą tej metody punkt *A’* i przyrównaj położenie punktu *A’* do *A*. W szczególnym przypadku można odnaleźć dwie pozycje punktu *A*, różne od pierwiastków równania, dla których punkty *A’* i *A* pokrywają się.

Celem wyjaśnienia, istnieją dwa rzeczywiste pierwiastki wielomianu stopnia 6, których przybliżone wartości to – 0,56293 oraz 0,73727. Można zauważyć, że złe dobranie punktów *A* (takie, że *A’* jest jednym z dwóch punktów, gdzie pochodna jest równa zero) może przyczynić się do tego, że wyniki metody będą bardzo odbiegały od rzeczywistości.



Sir Isaac Newton,
1643-1727

Joseph Raphson,
1648-1715

Rysunek 2.6 – Dwie pierwsze iteracje metody Newton'a-Raphson'a rozpoczynając od punktu A.

Uwaga: ten sam wykres można otrzymać bezpośrednio, korzystając z narzędzia [Mierzenie]Przypisz do wyrażenia.

TESELACJE

Skonstruujemy teraz kilka teselacji płaszczyzny, przy użyciu wielokątów. Zacznijmy od uproszczonej definicji, która wystarczy do dalszej pracy. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do książki ”Tilings and Patterns” autorstwa Branko Grünbaum'a i G.C. Shepherd'a, wydawnictwo Freeman, 1987. Informacje na temat teselacji i grup symetrii można znaleźć również na wielu stronach internetowych.

Mówimy, że zbiór zamkniętych figur płaskich jest teselacją płaszczyzny, jeżeli ich części wewnętrzne nie nachodzą na siebie, a suma wszystkich części pokrywa w całości płaszczyznę. Te figury płaskie nazywane są kaflami teselacji. Miejsce przecięcia dwóch kafli, będące odcinkiem prostej lub krzywej nazywane jest krawędzią, natomiast punkt zetknięcia dwóch lub więcej kafli w jednym punkcie nazywany jest wierzchołkiem.

W przypadku teselacji *P*, piszemy *S(P)* dla zbioru izometrii *f* płaszczyzny takiej, że obraz każdego kafla teselacji *P* w izometrii *f* jest kaflem teselacji *P*. *S(P)* to grupa, nazywana grupą symetrii teselacji. Istnieje kilka przypadków, które trzeba rozpatrzyć analizując grupy symetrii:

• *S(P)* nie zawiera żadnych przesunięć. Wtedy *S(P)* jest izomorficzna z grupą cykliczną (prawdopodobnie zredukowaną do pierwszego elementu) utworzoną przez obrót o 2/*n* lub grupą, będącą grupą symetrii wielokąta foremnego o *n* bokach.

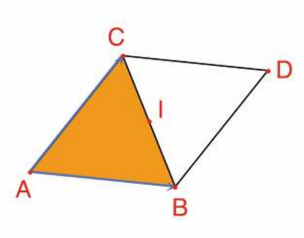
• *S(P)* zawiera przesunięcia współliniowe. *S(P)* jest wtedy izomorficzna do jednej z siedmiu grup fryzowych.

• *S(P)* zawiera dwa wektory przesunięcia, które nie są współliniowe. Więc grupa *S(P)* jest izomorficzna z jedną z 17 regularnych teselacji powierzchni, kryjących całą płaszczyznę (lub grup krystalografii płaskiej), teselacja jest wtedy cykliczna.

Jeśli wszystkie kafle w teselacji mogą być otrzymane z pierwszego kafla, i są z nim izometryczne, to mówimy, że teselacja jest jednorodna. Tutaj interesujemy się tylko teselacjami jednorodnymi, które można otrzymać z wielokątów.

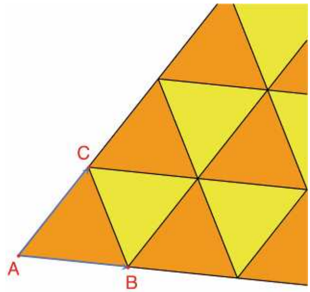
Na początek skonstruujemy teselację jednorodną płaszczyzny, złożoną z trójkątów.

Rozpoczniemy od konstrukcji trójkąta *ABC*, za pomocą narzędzia [Linie]Trójkąt, a następnie wyznaczymy środek *I*, jednego z jego boków, na przykład *BC* korzystając z narzędzia [Konstrukcje]Środek. Niech punkt *D* będzie obrazem punktu *A* powstałym przez półobrót dookoła punktu *I* (symetria środkowa). Tworzy się go za pomocą narzędzia [Przekształcenia]Symetria środkowa, wybierając najpierw obiekt, który ma zostać przekształcony: punkt *A*, a następnie środek symetrii *I*.



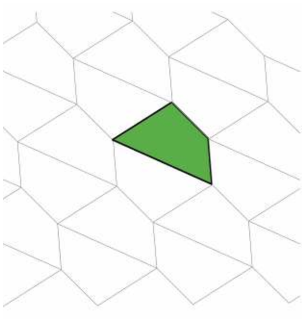
Rysunek 3.1 – Tworzenie obrazu trójkąta *ABC* w obrocie o 180° dookoła środka jednego z jego boków (w tym wypadku *BC*). W wyniku obrotu powstanie równoległobok *ABDC*.

Czworokąt *ABDC* jest równoległobokiem, którego możemy użyć do teselacji płaszczyzny. Tworzymy następnie dwa wektory *AB* i *AC* za pomocą narzędzia [Linie]Wektor. Wektorów tych użyjemy do powielenia trójkątów *ABC* i *BCD* za pomocą narzędzia [Przekształcenia]Przesunięcie.



Rysunek 3.2 - Narzędzie [Przekształcenia]Przesunięcie jest użyte w celu utworzenia obrazów dwóch trójkątów powstałych w wyniku przesunięcia o wektory *AB* i *AC*.

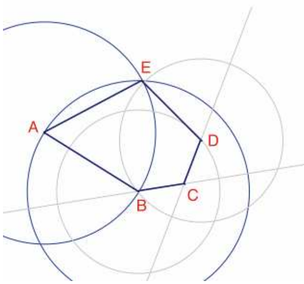
To samo podejście może zostać wykorzystane do teselacji płaszczyzny dowolnym czworokątem, wypukłym lub innym, którego boki nie przecinają się. Obraz czworokąta otrzymujemy przez jego obrót dookoła środka jednego z boku. Obrazem tym jest sześciokąt o bokach parami równoległych, który wykorzystujemy do teselacji płaszczyzny przez przesunięcia.



Rysunek 3.3 – Ten sam typ konstrukcji wykorzystujemy do teselacji płaszczyzny przy pomocy dowolnego czworokąta, wypukłego lub wklęsłego, zakładając, że jego boki nie przecinają się.

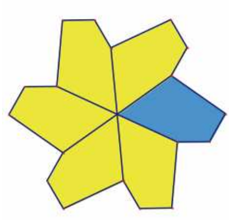
W przypadku innych wielokątów wypukłych, sytuacja jest bardziej skomplikowana. Można dowieść, że niemożliwa jest teselacja płaszczyzny wielokątem wypukłym o więcej niż sześciu bokach. Istnieją trzy rodzaje sześciokątów wypukłych, za pomocą których można przeprowadzić teselację płaszczyzny i co najmniej 14 typów pięciokątów wypukłych z ograniczeniami co do ich kątów i boków. Na dzień dzisiejszy, nie wiadomo, czy te 14 typów daje pełne rozwiązanie problemu. Ostatni z 14 typów został odkryty w roku 1985. Kwestia wielokątów wklęsłych nie została do tej pory rozwiązana.

Ćwiczenie 5 – Skonstruuj pięciokąt wypukły *ABCDE*, o następujących parametrach: kąt przy wierzchołku *A* równy 60°, przy *C* równy 120°,
AB = *AE*, *CB* = *CD*. Te parametry nie opisują jednego pięciokąta, a całą ich rodzinę. W konstrukcji występują przynajmniej trzy niezależne punkty.



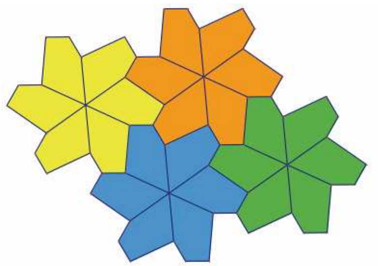
Rysunek 3.4 – Konstrukcja pięciokąta o parametrach: kąt przy *A* = 60°, kąt przy *C* = 120°, *AB* = *AE* i *CB* = *BD*. *A*, *B* i *C* są niezależnymi punktami płaszczyzny.

Wykonaj kolejno po sobie obroty o 60° dookoła punktu *A* za pomocą narzędzia [Przekształcenia]Obrót. Narzędzie to wymaga wybrania: przekształcanego obiektu, kąta oraz środka obrotu, by utworzyć kwiat o sześciu pięciokątnych płatkach. Kąt wymagany przez narzędzie to liczba znajdująca się w obszarze rysowania, utworzona wcześniej za pomocą narzędzia [Tekst i Symbole]Edytor numeryczny(pokrętło).



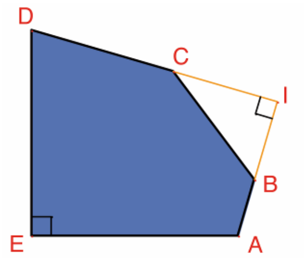
Rysunek 3.5 – Wyjściowy pięciokąt powielony przez obrót dookoła punktu *A* o kąt 60°, by otrzymać kwiat o sześciu płatkach.

Kwiaty te można teraz zgrupować ze sobą za pomocą przesunięć, by przeprowadzić teselację płaszczyzny. Jest to teselacja typu 5 według klasyfikacji podanej w książce ”Tilings and Patterns”. Została po raz pierwszy opublikowana przez K. Reinhardt'a w roku 1918.
Teselacja ta jest jednorodna, czyli że wszystkie kafle są identyczne w izometrii.



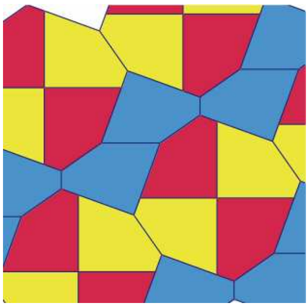
Rysunek 3.6 – Kwiaty zgrupowane przez przesunięcia w celu pokrycia płaszczyzny.

Ćwiczenie 6 – Skonstruuj pięciokąt ABCDE o następujących parametrach:
$E = 90°$, $A + D = 180°$, $2B - D = 180°$, $2C + D = 360°$, $EA = ED = AB + CD$.



Rysunek 3.7 – Pięciokąt 10 typu, zgodnie z klasyfikacją zawartą w książce “Tilings and Patterns”. Pięciokąt ten jest podstawą teselacji jednorodnej płaszczyzny. Punkty *A* i *E* są punktami niezależnymi płaszczyzny, punkt *I* porusza się swobodnie po łuku okręgu.

Teselacja jest tworzona przez utworzenie w pierwszej kolejności trzech kopii płytki, za pomocą następujących po sobie obrotów dookoła punktu *E* o kąt 90°.
Otrzymujemy dzięki temu ścięty kwadrat.
Następnie kwadraty te grupujemy w paski za pomocą przesunięcia w jednym kierunku. Paski kwadratów rozdzielamy następnie paskami pięciokątów, w sposób pokazany na poniższym rysunku.



Rysunek 3.8 - Jednorodna teselacja płaszczyzny pięciokątami wypukłymi. Teselację tę stworzył Richard E. James III, została ona poprzedzona publikacją artykułu Martina Gardnera w czasopiśmie „Scientific American” w 1975 roku. Pełny tekst artykułu można znaleźć w książce „Time travel and other mathematical bewilderments”, autorstwa Martina Gardnera, wydawnictwo Freeman, 1987.