CABRI® II Plus

CABRILOG

Criador de Ferramentas Matemáticas

MANUAL DE UTILIZAÇÃO

BOAS-VINDAS!

Bem-vindo ao mundo dinâmico de Cabri II Plus!

Nascido no fim dos anos 80 a IMAG, um laboratório de pesquisa associado ao CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) e à universidade Joseph Fourier de Grenoble, Cabri Geometry conta hoje, com mais de 100 milhões de usuários, em computadores e calculadoras gráficas Texas Instrumentos, em todo o mundo. Cabri II Plus é agora desenvolvido e distribuído pela sociedade Cabrilog, fundada em março 2000 por Jean Marie LABORDE, diretor de pesquisa no CNRS e pai espiritual de Cabri II Plus.

A construção de figuras geométricas no computador traz uma nova dimensão em relação às construções clássicas usando papel, lápis, régua e compasso.

Cabri II Plus possui um grande número de funcionalidades, potentes e fáceis de utilizar. As figuras, das mais simples às mais complicadas podem ser manipuladas livremente. A qualquer momento, pode-se testar a construção de uma figura, emitir conjecturas, medir, calcular, apagar, esconder/mostrar os objetos, colocar cores, pontilhados, texto, ou bem recomeçar novamente.

Cabri II Plus é o melhor dos softwares para a aprendizagem e o ensino da geometria. Ele se dirige aos professores e aos estudantes, e pode ser utilizado da escola primária à universidade.

Cabri II Plus é uma nova versão do programa Cabri Geometry™ II. Ela comporta muitas novas possibilidades que tornam o seu uso ainda mais eficiente e agradável. Além disso, esta versão corrige falhas observadas na antiga versão e incorpora um grande número de funcionalidades solicitadas pelos usuários.

Certas funcionalidades do software são específicas às versões Macintosh/Windows: as teclas `Ctrl` e `Alt` do Windows correspondem ao comando ⌘ e à opção `Alt` ⌥ sobre Mac OS. O clique da direita sob Windows corresponde ao `Ctrl`+clic sobre Mac OS.

- **Interface**: Os novos ícones são mais largos e mais legíveis.Os menus contextuais tornam ainda mais intuitiva a utilização de Cabri II Plus, resolvendo facilmente as situações de ambiguidade de seleção ou mudando os atributos de qualquer objeto com alguns cliques.

- **Nomes**: Nomeie todos os objetos e posicione o nome em qualquer lugar ou em volta de um objeto.

- **Expressões**: Defina e avalie dinamicamente as expressões com uma ou mais variáveis.

- **Gráfico instantâneo**: Trace e estude facilmente os gráficos de uma ou várias funções.

- **Lugares geométricos**: Construa lugares geométricos de pontos ou objetos, lugares geométricos de lugares geométricos ou intersecções com lugares geométricos. As equações de curvas algébricas, construídas graças à ferramenta lugar geométrico podem ser exibidas.

- **Retas inteligentes**: Exiba somente a parte útil de uma reta. O comprimento desse pedaço de reta pode ser modificado a vontade.

- **Cores**: Escolha as cores dos objetos e dos textos assim como as cores de preenchimento com a ajuda da nova paleta de cores ampliada ou utilizando as cores variáveis dinamicamente.

- **Imagens (Bitmaps, JPEG, GIF)**: Fixe uma imagem a certos objetos de uma figura (pontos, segmentos, polígonos, fundo). As imagens são recalculadas durante as animações e as manipulações da figura.

- **Texto**: O estilo, a fonte e os atributos do texto de qualquer objeto podem ser mudados livremente.

- **Janela de descrição**: Uma janela pode ser aberta para listar todas as etapas da construção de uma figura.

- **Registro de uma sessão**: Registrar uma sessão durante a utilização do software. Uma sessão pode ser relida na tela ou impressa mais tarde, para estudar o progresso dos alunos e identificar claramente as dificuldades encontradas durante as experimentações (Windowa somente)

- **Importação/Exportação de figuras**: Figuras podem ser transferidas para ou a partir de uma calculadora gráfica utilizando Cabri Junior (TI-83 Plus e TI-84 Plus)

Todas essas novas funcionalidades podem trazer uma nova dimensão à prática de seu ensino.

Este documento é dividido em duas partes.

A parte **[1] CONTATO INITIAL** é destinada aos usuários que descobrem o software pela primeira vez. Ela permite a familiarização com a interface de Cabri II Plus e as convenções de utilização do mouse. Entretanto, a experiência prova que o contato inicial é muito rápido, e, e que na classe, os alunos já fazem geometria na sua primeira meia hora de utilização do programa.

A parte **[2] DESCOBERTA** é destinada aos novos usuários e propõe atividades de nível de 5a a 8a série do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Outros documentos são disponíveis sob forma de documentos PDF no repertório de instalação do programa ou sobre o
CD-ROM de instalação

O segundo documento, **APROFUNDAMENTO.pdf** apresenta outras atividades mais avançadas, de nível de Ensino Médio, pré-vestibular e primeiro ciclo universitário.

As atividades desses documentos são largamente independentes umas com as outras. O leitor é convidado a fazer construções detalhadas, depois os exercícios propostos.

Nosso site *www.cabri.com* lhe dará acesso às últimas atualizações e às notícias referentes aos nossos produtos, em particular às novas versões deste documento. O site contém igualmente ligações com dezenas de páginas da Internet e referências a vários livros sobre geometria e sobre Cabri II Plus.

Manual Cabri II Plus:
Autor inicial: Eric Bainville
Atualização: Christophe Foucher, Junho 2007
Novas versõe: *www.cabri.com*
Support: *support@cabri.com*
Criação gráfica, configuração de página e releituras: Cabrilog

ÍNDICE GERAL

CONTATO INICIAL

DESCOBERTA

CAPÍTOLO 1

CONTATO INICIAL

1.1 FILOSOFIA

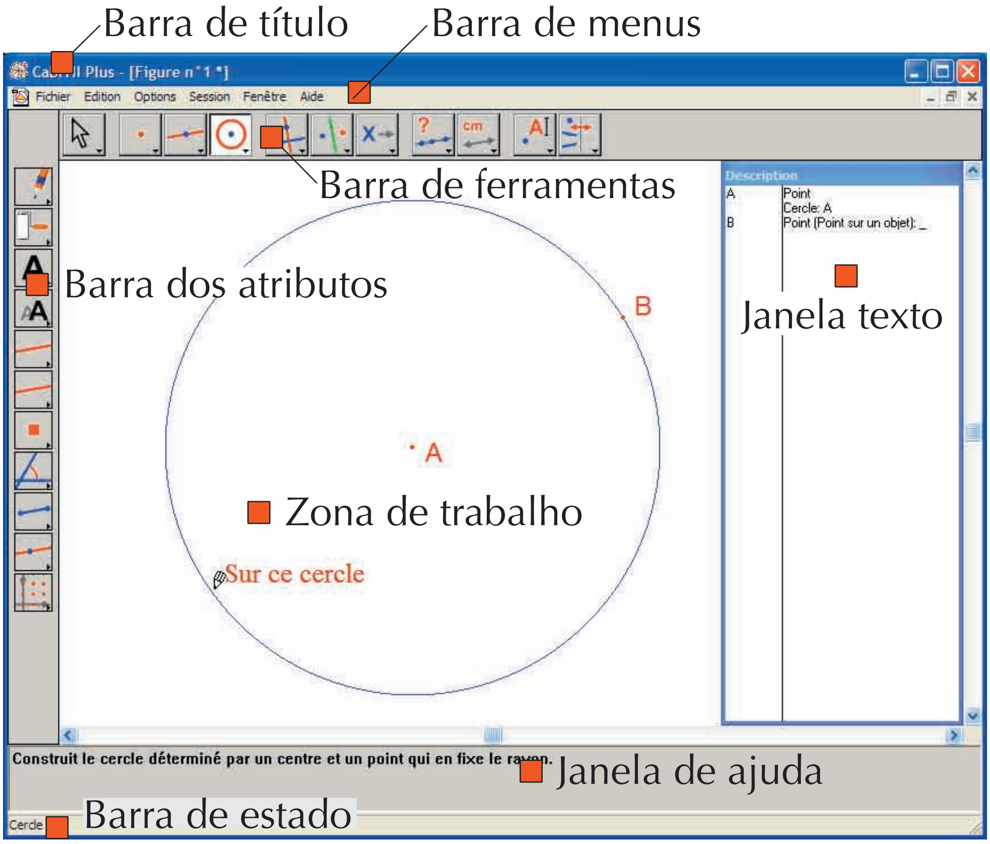
A filosofia de Cabri II Plus é de permitir o máximo de interação (teclado, mouse,...) entre o usuário e o programa e, em cada caso, de fazer aquilo que o usuário espera que o programa faça, respeitando de um lado os comportamentos usuais das aplicações e do sistema, e de outro lado o comportamento matemático mais plausível.

Um ***documento*** Cabri II Plus é composto de uma ***figura*** construída livremente sobre uma única folha de papel virtual de um metro quadrado (l m por l m). Uma figura é composta de objetos geométricos tais como (pontos, retas, circunferências...) mas igualmente de outros objetos (números, textos, fórmulas,...)

Um documento pode também comportar ***macro-construções***, que permitem, memorizando construções intermediárias, estender as funcionalidades do programa. A aplicação permite abrir simultaneamente vários documentos e suporta o recortar/colar entre documentos abertos.

1.2 INTERFACE DA APLICAÇÃO

A ***figura*** abaixo mostra a janela principal da aplicação e suas diferentes zonas. Na abertura de Cabri II Plus, a barra de atributos, a janela de ajuda e a janela texto não são visíveis.

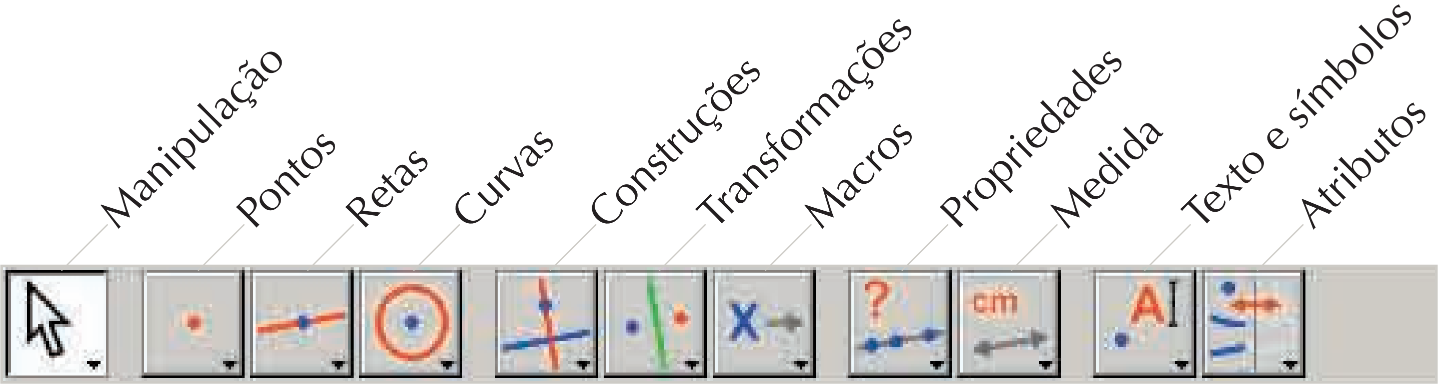


A ***barra de título*** indica o nome do arquivo contendo a figura, ou Figura n°, 1, 2,... se a figura não estiver ainda registrada.

A ***barra de menus*** permite acessar os comandos da aplicação que correspondem aos comandos encontrados usualmente nos programas.

Na sequência deste documento, designaremos a entrada Ação do menu Menu como [Menu]Ação. Por exemplo, [Arquivo]Salvar Como... designa a entrada Salvar como... do menu Arquivo.

A ***barra de ferramentas*** fornece as ferramentas que permitem criar e manipular a figura. Ela é constituída de várias caixas de ferramentas, comportando, cada uma, uma ferramenta visível, correspondendo a um ícone da barra. A ferramenta ativa é representada por um botão afundado, com um fundo branco. As outras ferramentas são representadas por botões não afundados, com um fundo cinza. Um clique curto sobre um botão ativa a ferramenta correspondente. Uma pressão prolongada sobre um botão abre a caixa de ferramentas e permite escolher uma outra ferramenta. Esta ferramenta tornase a ferramenta visível da caixa de ferramentas e a ferramenta ativa. A composiçao da barra de ferramentas pode ser modificada à vontade e se necessàrio também bloqueada numa configuraçao para uso em classe (ver Capitulo: **[8] PREFERENCIAS E PERSONALIZAÇAO** na **REFERENCI.pdf**).



Na seqüência deste documento, designaremos a ferramenta Ferramenta da caixa Caixa por [Caixa]Ferramenta, com o ícone correspondente lembrado na margem (algumas denominações muito longas foram abreviadas para caberem na margem). Por exemplo [Linhas]Semi-Reta representa a ferramenta Semi–reta da caixa de ferramentas Linhas.

Os ícones da barra de ferramentas podem ser afixados em dois tamanhos. Para mudar de tamanho, clicar no botão direito do mouse depois de ter deslocado o cursor na barra de ferramentas, à direita da última ferramenta e selecionar pequenos ícones.

A ***barra de estado***, abaixo da janela, indica permanentemente, qual é a ferramenta ativa.

A ***barra de atributos*** permite modificar os atributos dos objetos: cores, estilos, tamanhos,... Ela é ativada pelo comando [Opções]Mostrar os atributos, e oculta de novo por [Opções]Esconder os atributos, ou pela tecla `F9` sob Windows e ⌘+`F9` sob Mac.

A ***janela de ajuda*** fornece uma ajuda sucinta sobre a ferramenta selecionada. Ela indica quais são os objetos esperados pela ferramenta, e o que será construído. Ela é ativada/oculta pela tecla `F1` sob Windows e ⌘+`F1` sob Mac.

A ***janela texto*** contém uma descrição da figura sob forma de texto. Encontra-se o conjunto dos objetos construídos e seu método de construção. É ativada pelo comando [Opções]Mostrar a descrição, e oculta novamente por [Opções]Esconder a descrição, ou pela tecla `F10` sob Windows e ⌘+`F10` sob Mac. Enfim, a zona de trabalho representa uma porção da folha de trabalho. É na zona de trabalho que efetuamos as construções geométricas.

Enfim, a ***zona de trabalho*** representa uma porçao da folha de trabalho. E na zona de trabalho que se realizam as contruçoes.

1.3 UTILIZAÇÃO DO MOUSE

A maioria das funcionalidades do programa é realizada utilizando o mouse. As ações sobre o mouse são o deslocamento, a pressão sobre um botão, e a soltura do botão. Na ausência de indicação contrária, tratar-se-a do botão principal do mouse, que é geralmente o botão à esquerda.

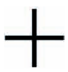
- Uma seqüência pressionar-soltar é chamada clique
- Uma seqüência pressionar-soltar-pressionar-soltar é chamada duplo-clique.
- Uma seqüência pressionar-deslocar-soltar é chamada arrastar-posicionar.

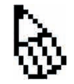
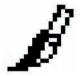
Quando se desloca o mouse na zona de trabalho, o programa nos informa de três maneiras daquilo que vai produzir um clique ou um arrastar-posicionar:

- a forma do cursor,
- o texto exibido ao lado do cursor,
- uma representação parcial do objeto em fase de construção.

Segundo os casos, o texto e a representação parcial podem não ser exibidos.

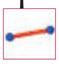
Os diferentes cursores são os seguintes:

	Um objeto existente pode ser selecionado.
	Um objeto existente pode ser selecionado, ou deslocado, ou utilizado em uma construção.
	Aparece quando clicamos sobre um objeto existente para selecioná-lo, ou utiliza-lo em uma construção.
	Várias seleções são possíveis sob o cursor. Um clique provocará a aparição de um menu permitindo precisar os objetos a serem selecionados entre todas as possibilidades.
	Um objeto existente está sendo deslocado.
	O cursor está numa parte livre da folha, e pode-se definir uma seleção retangular por arrastar-posicionar.
	Indica o modo de deslocamento da folha. Pode-se entrar nesse modo a todo momento apertando e seguranto a tecla `Ctrl` (Windows) ou ⌘ (Mac OS). Nesse modo, o arrastar-posicionar deslocará a folha na janela.
	Aparece durante o deslocamento da folha.

	Indica que um clique vai criar um novo ponto livre sobre a folha.
	Indica que um clique vai criar um novo ponto, que pode estar livre sobre um objeto existente, ou um novo ponto na intersecção de dois objetos existentes.
	Indica que um clique vai preencher o objeto sob o cursor com a cor corrente.
	Indica que um clique vai mudar o atributo (por exemplo a cor, o estilo, a espessura, ...) do objeto sob o cursor.

1.4 PRIMEIRA CONSTRUÇÃO

Para ilustrar este capítulo **[1] CONTATO INICIAL**, vamos construir um quadrado a partir de uma de suas diagonais. Na abertura de Cabri II Plus, um novo documento vazio é criado, e pode-se imediatamente começar uma construção.

Vamos construir o segmento que será uma das diagonais do quadrado. Ativa-se a ferramenta [Linha]Segmento  clicando sobre o ícone da direita e mantendo o botão do mouse apertado para abrir a caixa de ferramentas. Em seguida, desloca-se o cursor sobre a ferramenta segmento e solta-se o botão do mouse para ativá-la.

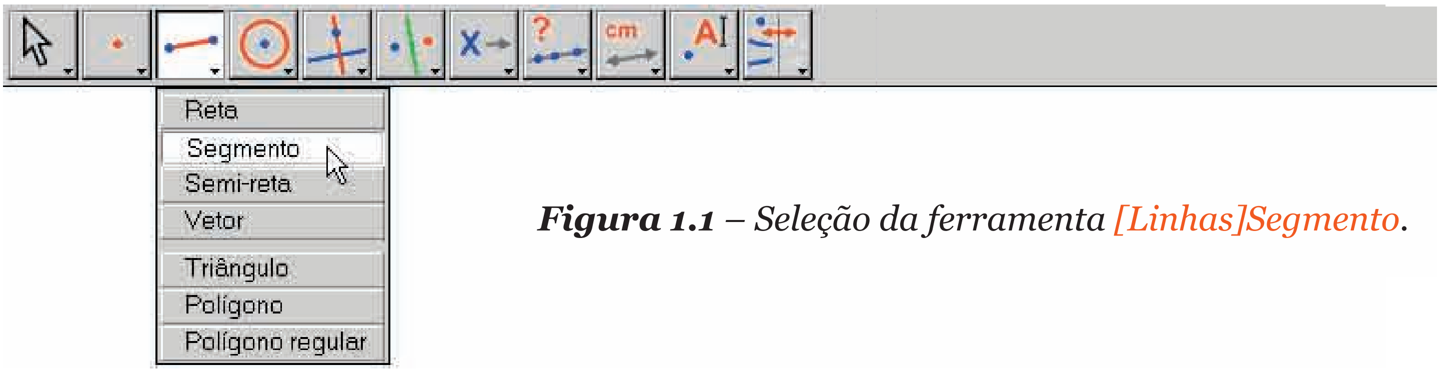


***Figura 1.1** – Seleção da ferramenta [Linhas]Segmento.*

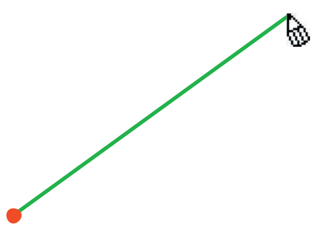


***Figura 1.2** – Construção do primeiro ponto. Uma imagem do segmento final desloca-se com o cursor por ocasião da seleção do segundo ponto.*

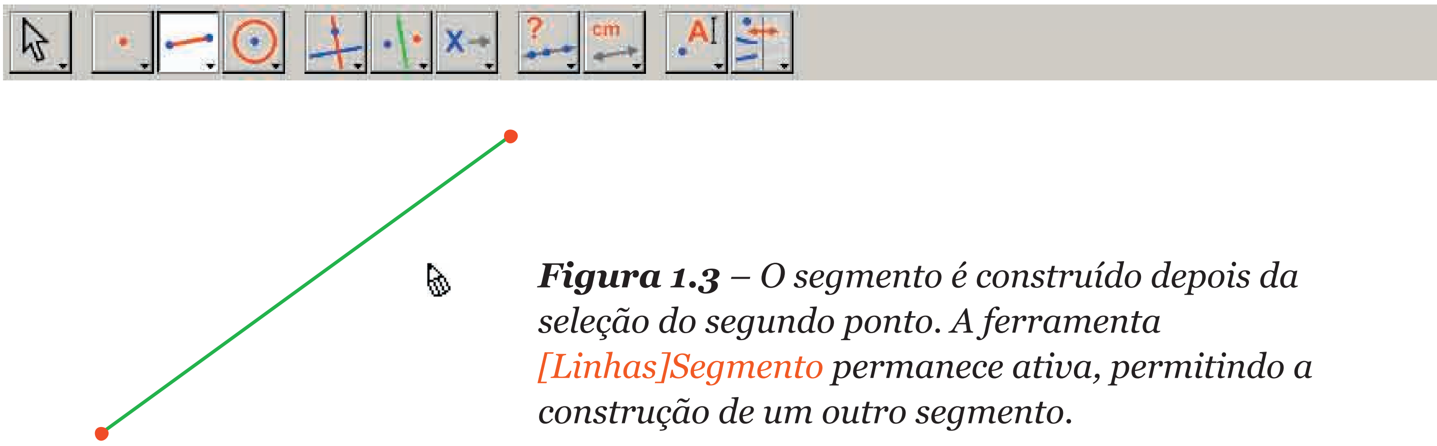
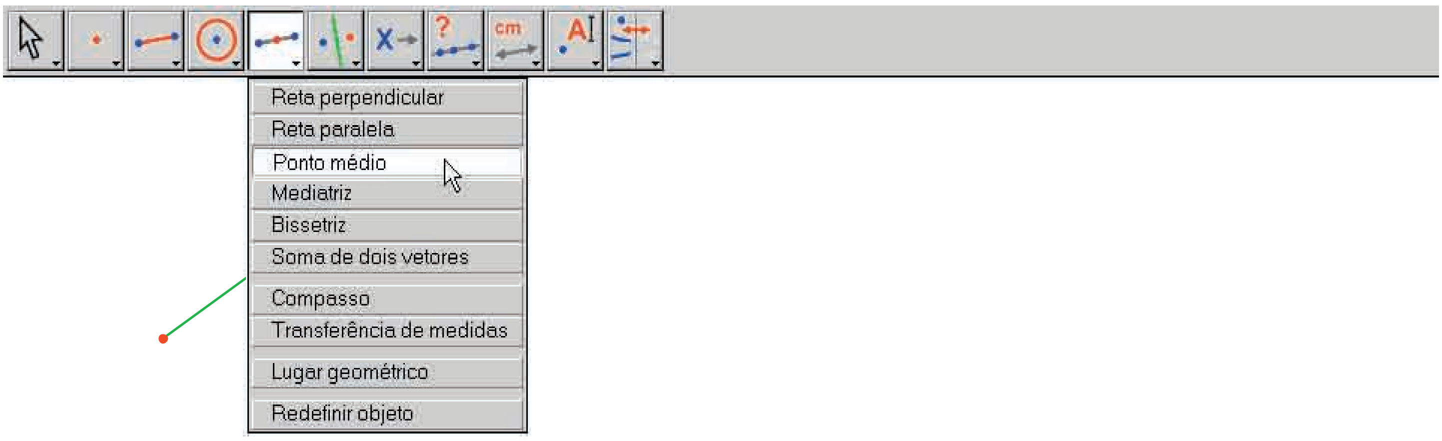
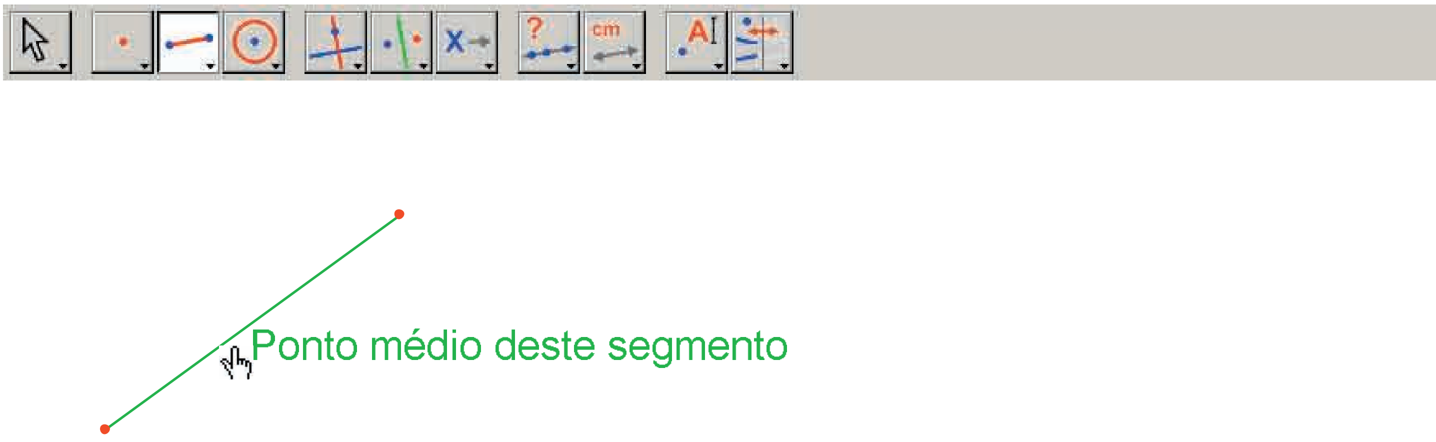


***Figura 1.3** – O segmento é construído depois da seleção do segundo ponto. A ferramenta [Linhas]Segmento permanece ativa, permitindo a construção de um outro segmento.*

Desloquemos agora o cursor na zona de trabalho onde ele toma a forma . Cria-se o primeiro ponto com um clique. Continuemos a deslocar o cursor na zona de trabalho. Um segmento traçado entre o primeiro ponto e o cursor materializa o segmento que será construído. Cria-se o segundo ponto com um clique. Nossa figura comporta agora dois pontos e um segmento.

Para construir o quadrado, poderemos utilizar a circunferência tendo este segmento por diâmetro. O centro desta circunferência é o ponto médio do segmento. Para construir esse ponto médio, ativa-se a ferramenta [Construções]Ponto Médio , depois desloca-se o cursor sobre o segmento. O texto Ponto médio deste segmento aparece então ao lado do cursor, que toma a forma . Clicando, constrói-se o ponto médio do segmento.





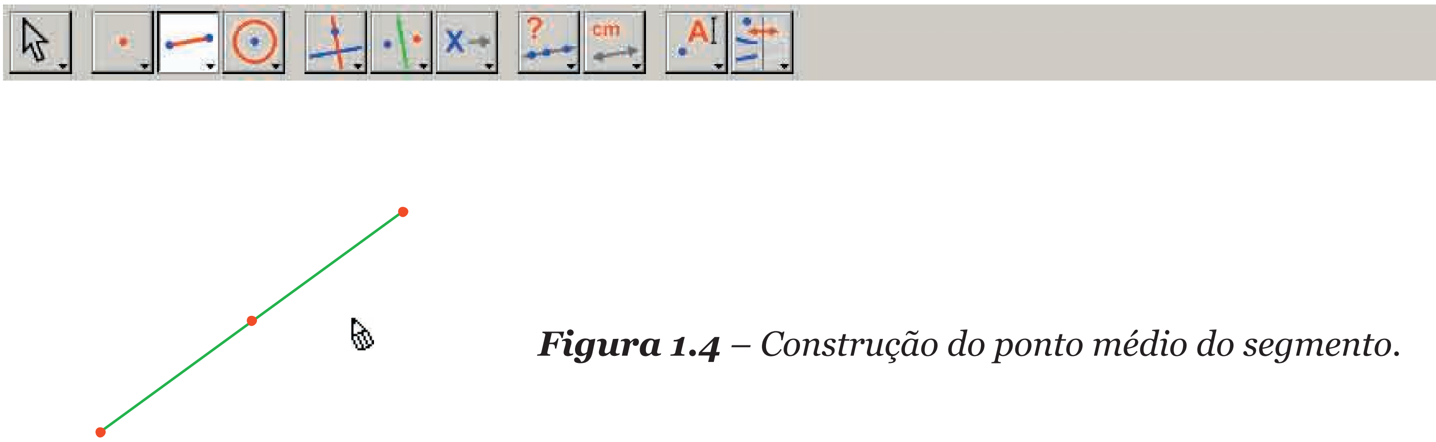
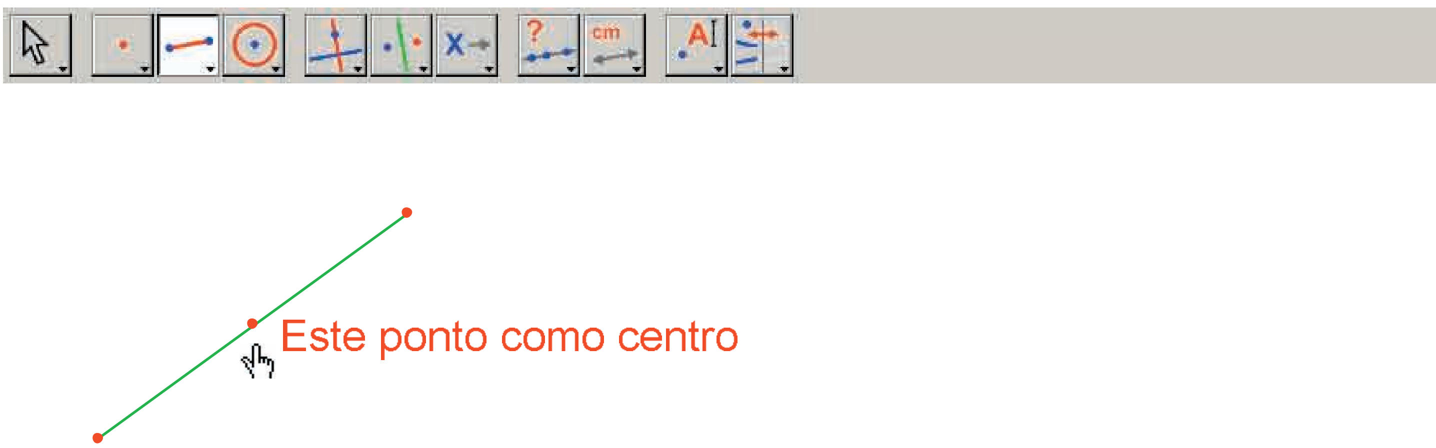


Figura 1.4 *– Construção do ponto médio do segmento.*

Ativa-se em seguida a ferramenta [Curvas]Circunferência , e desloca-se o cursor na proximidade do ponto médio construído. O texto Este ponto como centro então aparece e clica-se para selecionar o ponto médio do segmento como centro da circunferência. Em seguida, a ferramenta circunferência espera um ponto da circunferência. Durante o deslocamento, uma circunferência centrada sobre o ponto médio do segmento e passando pelo cursor é traçada dinamicamente, como anteriormente com o segmento. Quando o cursor passa próximo a uma extremidade do segmento, a mensagem passando por este ponto é exibida. Clica-se e a circunferência passando por esta extremidade é construída.



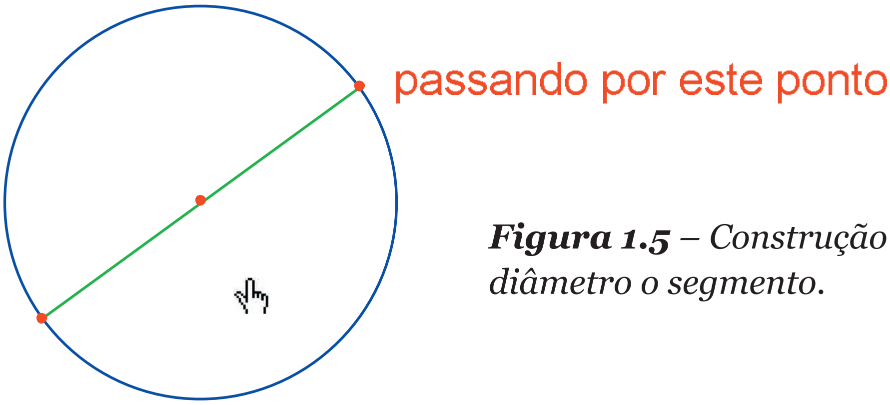
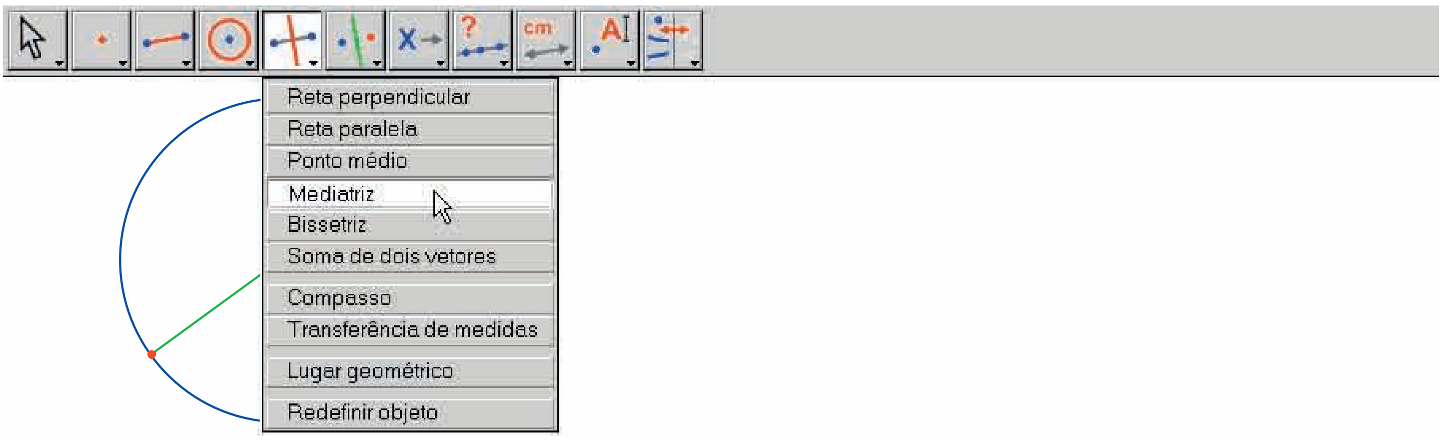
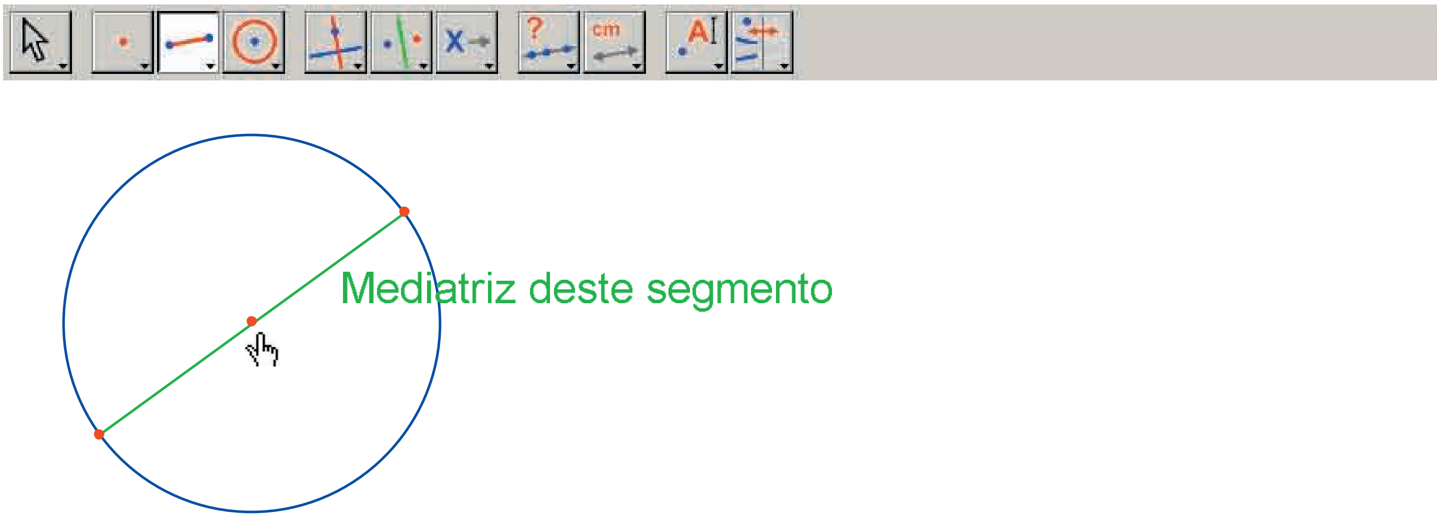


***Figura 1.5** – Construção da circunferência tendo por diâmetro o segmento.*

Podemos ativar a ferramenta [Manipulação]Ponteiro para manipular a figura. Deslocando-se sobre as extremidades do segmento, que são os pontos livres da figura, o cursor tornase e o texto indica este ponto. Pode-se deslocar o ponto por arrastar-posicionar. Neste caso, o conjunto da construção é atualizado: o segmento é redesenhado, seu ponto médio em consequência é deslocado, e a circuferência segue.

Para construir o nosso quadrado, falta encontrar a outra diagonal, que é o diâmetro da circunferência perpendicular ao segmento de partida. Vamos construir a mediatriz do segmento, que é uma reta perpendicular ao segmento e passando pelo seu ponto médio. Ativa-se a ferramenta [Construções]Mediatriz , depois seleciona-se o segmento para construir a mediatriz.





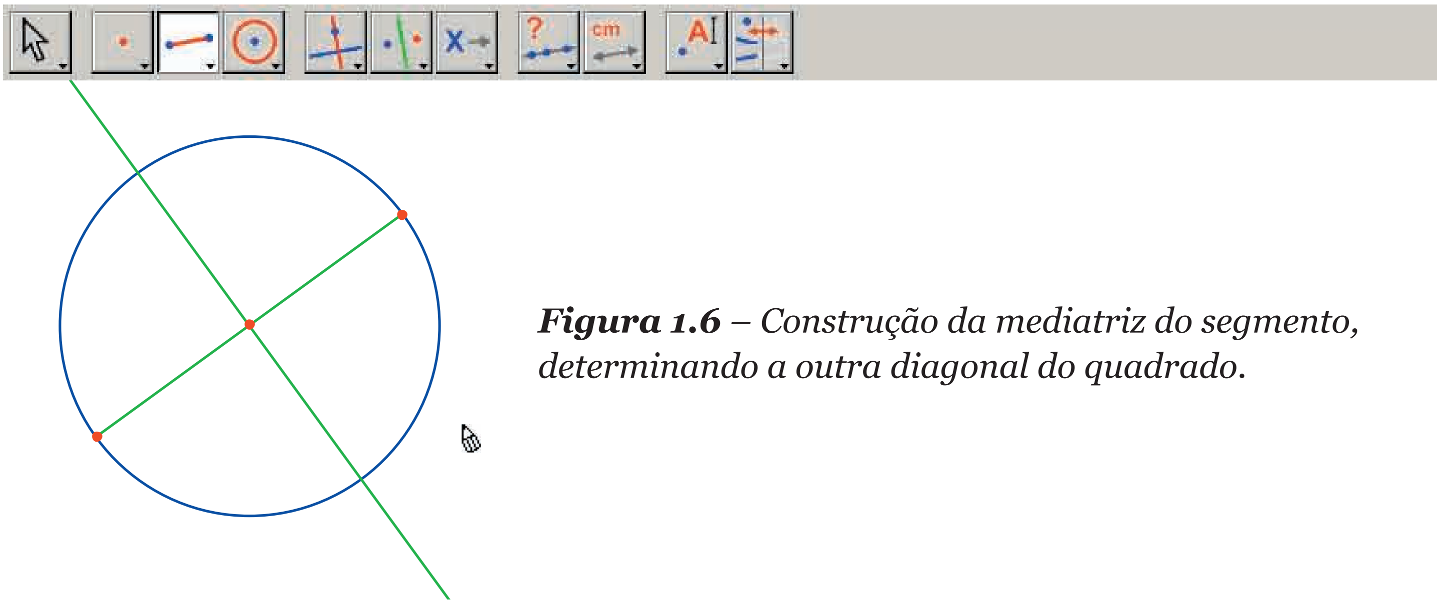
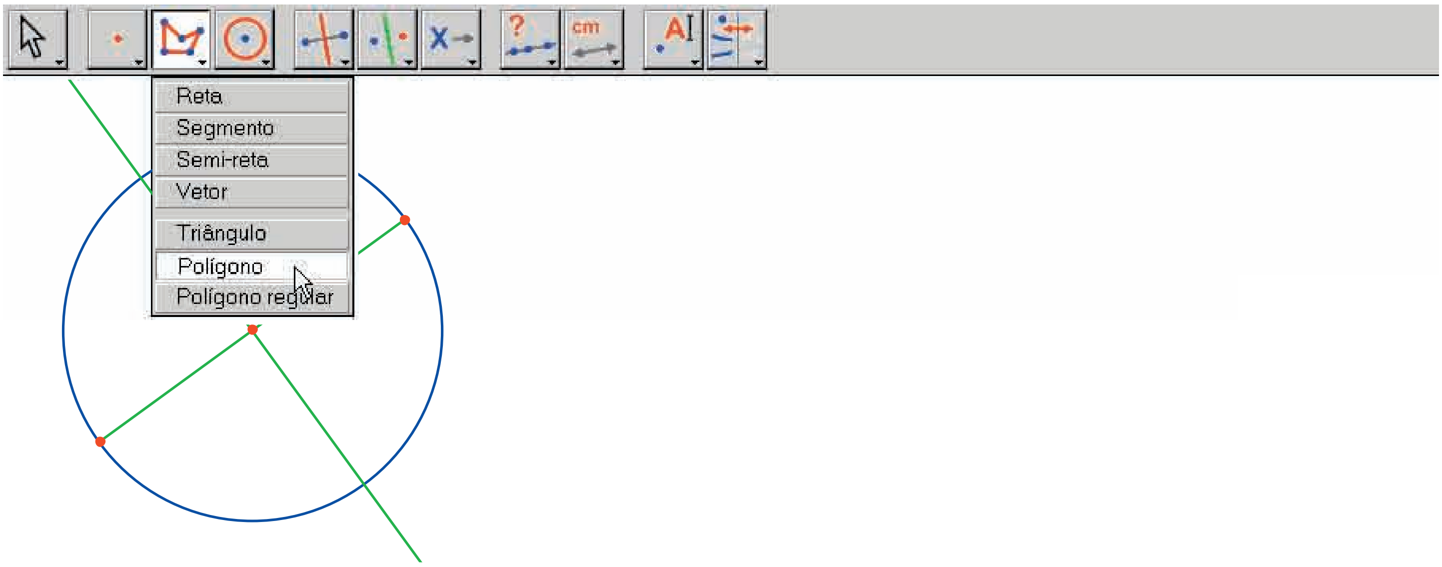
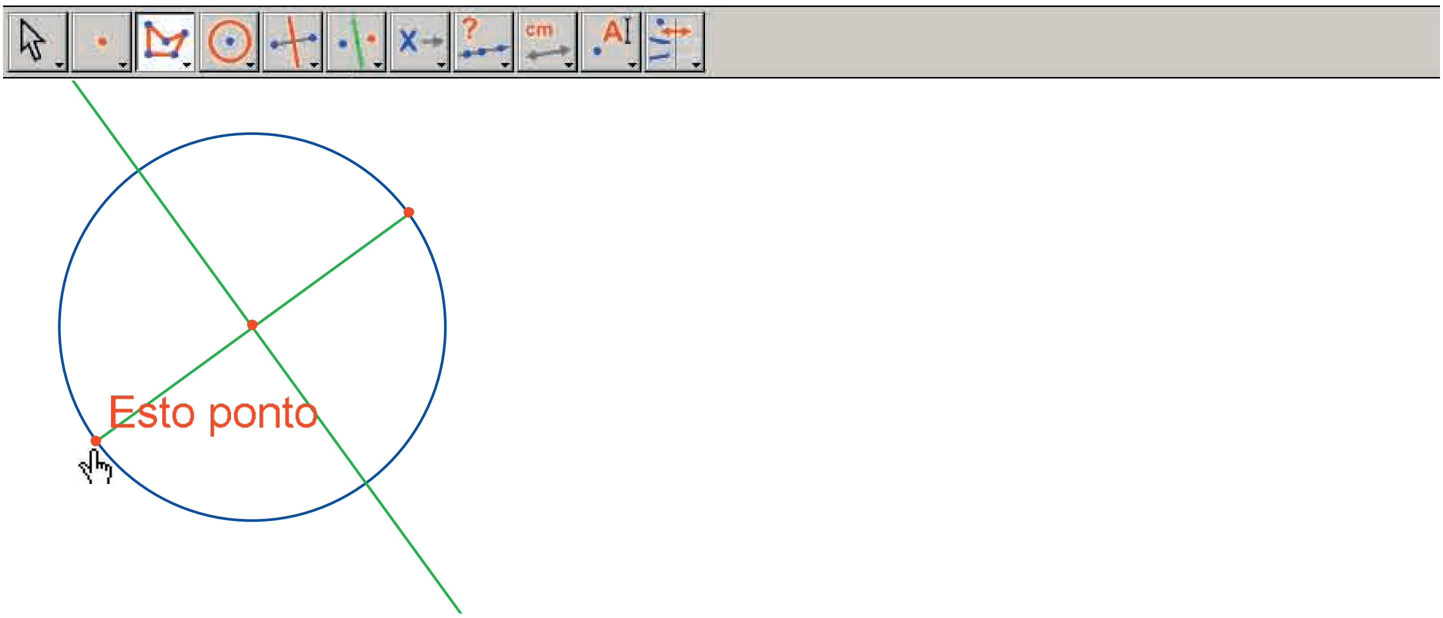


***Figura 1.6** – Construção da mediatriz do segmento, determinando a outra diagonal do quadrado.*

Para terminar, vamos ativar a ferramenta [Linhas]Polígono . Esta ferramenta espera a seleção de uma seqüência de pontos definindo um polígono qualquer. A execução está terminada quando selecionamos de novo o ponto inicial, ou clicando duas vezes por ocasião da seleção do último ponto. Os dois pontos de intersecção da circunferência e da mediatriz não estão ainda explicitamente construídos, mas Cabri II Plus permite construí-los implicitamente no moment o de sua utilização.





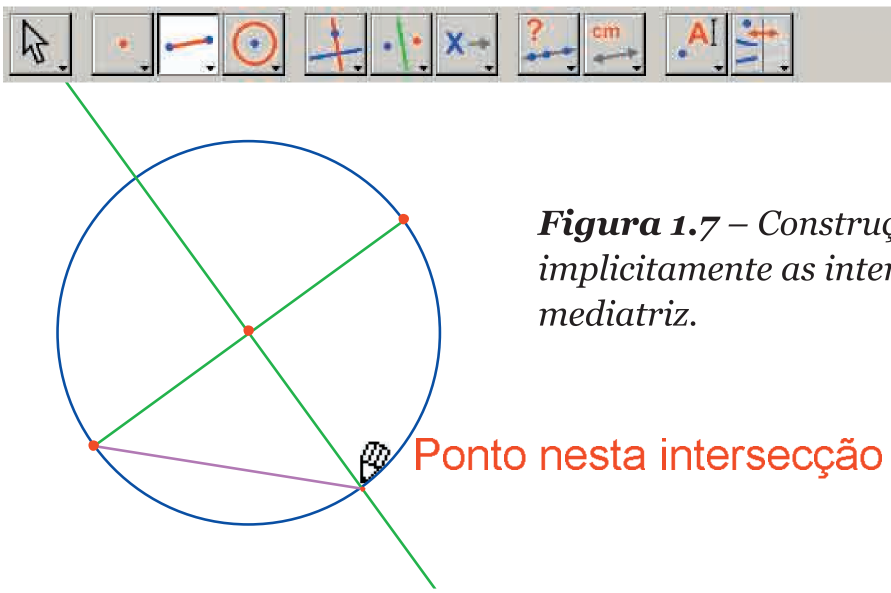


Figura 1.7 *– Construção do quadrado, construindo implicitamente as intersecções entre a circunferência e a mediatriz.*

Selecionamos então uma extremidade do segmento (texto Este ponto) como primeiro vértice do polígono, depois deslocamos o cursor sobre uma das duas intersecções entre a circunferência e a mediatriz. O texto indica então Ponto nesta intersecção para indicar que um clique vai construir o ponto de intersecção e selecioná-lo como vértice seguinte do polígono. Selecionamos então este ponto, depois a outra extremidade do segmento, depois o outro ponto de intersecção, e enfim selecionamos de novo o ponto inicial para terminar a construção do quadrado.

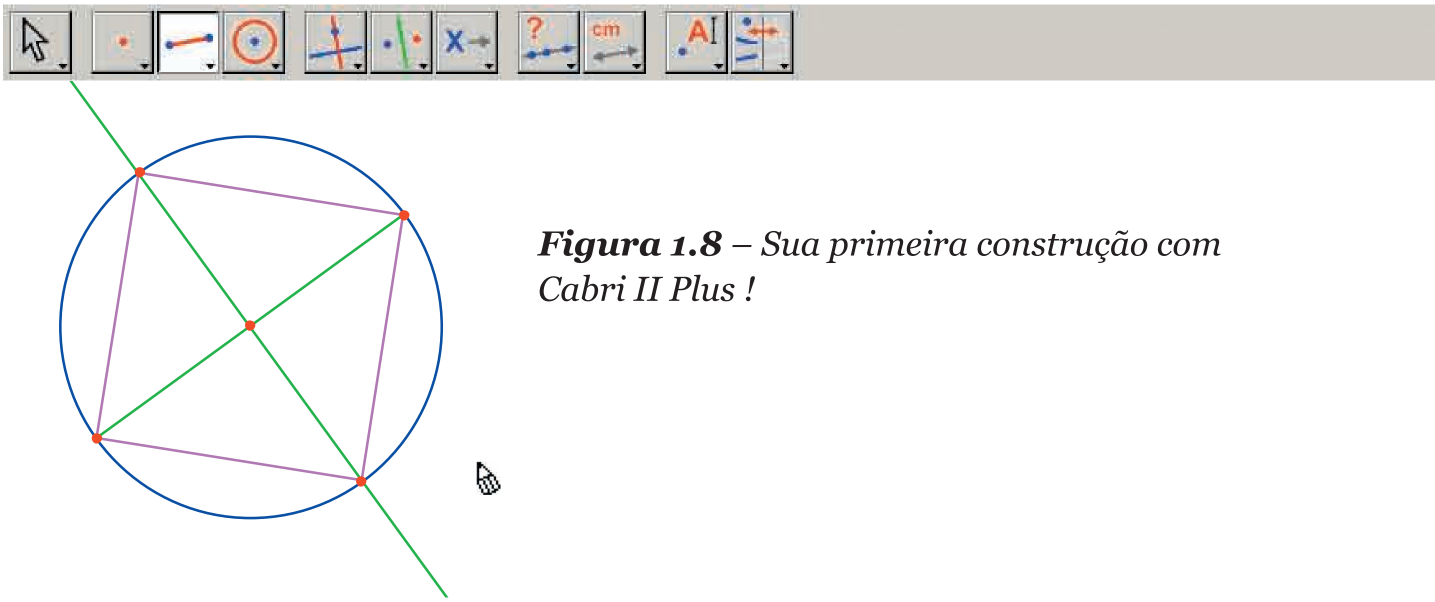
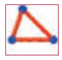


***Figura 1.8** – Sua primeira construção com Cabri II Plus !*

RETA DE EULER DO TRIÂNGULO

Vamos construir um triângulo *ABC* qualquer, depois as três medianas desse triângulo. São as retas ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto. Construiremos em seguida as três alturas do triângulo: as retas perpendiculares a um lado e passando pelo vértice oposto. Enfim, construiremos as três mediatrizes dos lados do triângulo: as retas perpendiculares a um lado e passando pelo seu ponto médio.

Como se sabe, as três alturas, as três medianas, e as três mediatrizes são respectivamente concorrentes, e os pontos de intersecção estão alinhados sobre uma reta chamada reta de *Euler*[1] do triângulo.

Para construir um triângulo, escolheremos a ferramenta [Linhas]Triângulo . A manipulação da barra de ferramentas é descrita na parte **[1] CONTATO INICIAL** desse documento.

Uma vez ativada a ferramenta [Linhas]Triângulo , basta criar então três novos pontos na janela, clicando nas zonas vazias. Podemos nomear os pontos imediatamente após a criação – aproveitando a ocasião – simplesmente digitando seus nomes no teclado. Uma vez o triângulo construído, os nomes podem ser deslocados ao redor dos pontos, por exemplo para posicioná-los no exterior do triângulo.

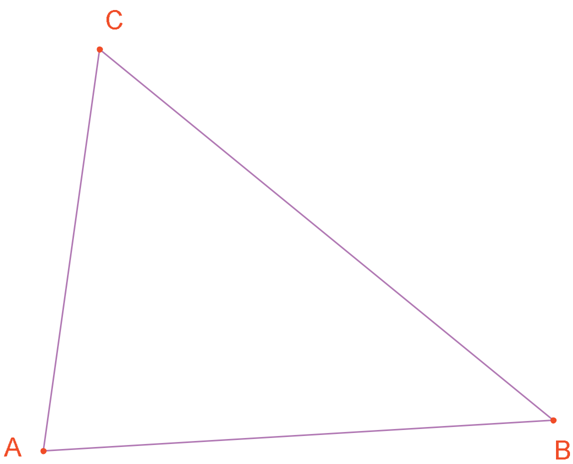
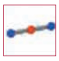


Figura 2.1 *– Triângulo* ABC *construído com a ferramenta [Linhas]Triângulo. Os pontos são nomeados digitando seus nomes no momento da sua criação.*

[1]*Léonard Euler, 1707-1783*

Para deslocar o nome de um objeto, utiliza-se a ferramenta [Manipulação]Ponteiro  arrastando o nome (clica-se e desloca-se o cursor mantendo o botão do mouse pressionado). Para mudar o nome de um objeto, ativa-se a ferramenta [Texto e Símbolos]Etiqueta , depois seleciona-se o nome e uma janela de edição aparece para efetuar as modificações. Os pontos médios são construídos graças à ferramenta [Construções]Ponto Médio . Para construir o ponto médio de $[AB]$, selecionaremos sucessivamente A e B. O ponto médio de um segmento, ou de um lado de um polígono, pode ser construído igualmente clicando diretamente sobre o segmento ou sobre o lado. O novo ponto pode ser nomeado imediatamente, chamemo-lo C′. Procede-se da mesma forma para os outros dois lados construindo o ponto médio A' de $[BC]$ e o ponto médio B' de $[CA]$.

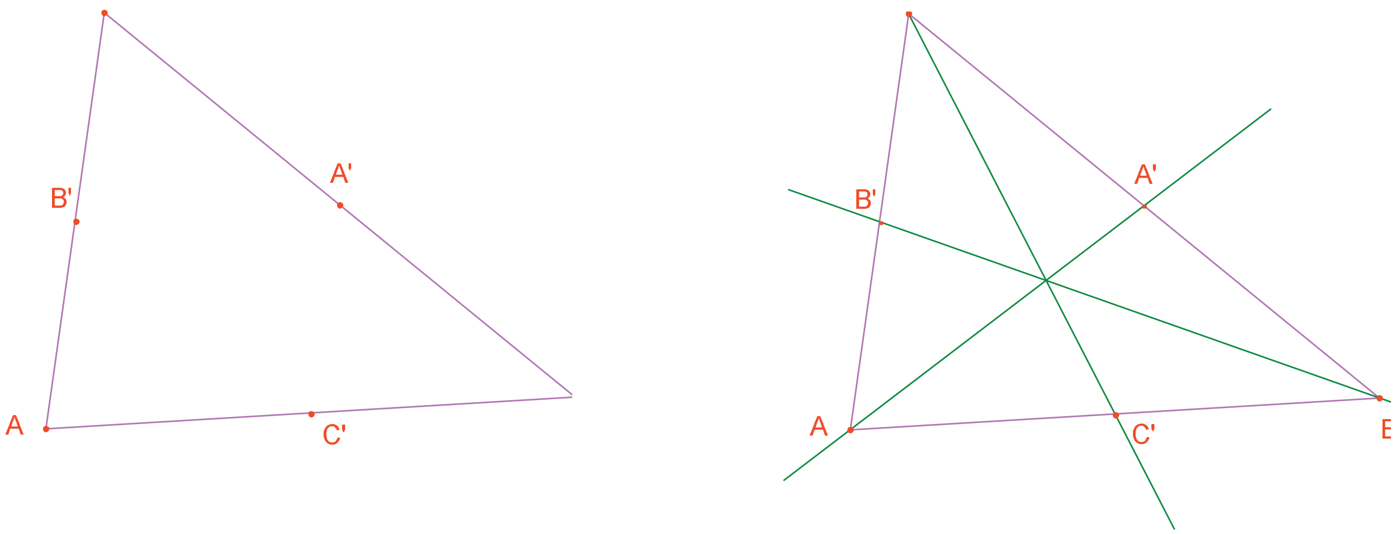
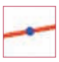


***Figura 2.2** – [A esquerda]. Os pontos médios são construídos com a ferramenta [Construções]Ponto Médio, que aceita seja duas extremidades, seja um segmento, seja ainda o lado do polígono.*
[A direita]. As medianas são construídas com a ajuda da ferramenta [Linhas] Reta, e sua cor é mudada com a ferramenta [Atributos] Cor....

A ferramenta [Manipulação]Ponteiro  nos permite deslocar livremente os objetos livres da figura, aqui os três pontos A, B e C. Vemos que o conjunto da construção é atualizado automaticamente por ocasião do deslocamento de um desses pontos. Podemos assim explorar a construção em numerosas configurações. Para revelar os objetos livres de uma figura, basta ativar a ferramenta [Manipulação]Ponteiro  e depois clicar sobre um espaço vazio da folha mantendo o botão do mouse pressionado. Os objetos livres começam então a piscar.

A ferramenta [Linhas]Reta  permite construir as três medianas. Para construir a reta (AA'), designaremos sucessivamente A e A'.

A ferramenta [Atributos]Cor... permite mudar a cor dos traços. Escolhe-se a cor na paleta, depois selecionam-se os objetos a colorir.

Depois de ter ativado a ferramenta [Pontos]Ponto , aproximemos o ponteiro do ponto de intersecção das três medianas. Nesse ponto, Cabri II Plus procura criar o ponto de intersecção de duas retas. Como há ambigüidade (temos três retas concorrentes), um menu aparece permitindo escolher qual das duas retas utilizar para a construção do ponto. Por ocasião do deslocamento do cursor sobre as entradas do menu, a reta correspondente é colocada em evidência na figura. Depois de selecionar duas retas, o ponto de intersecção é criado. Chamemos imediatamente de *G* o ponto de intersecção das medianas.

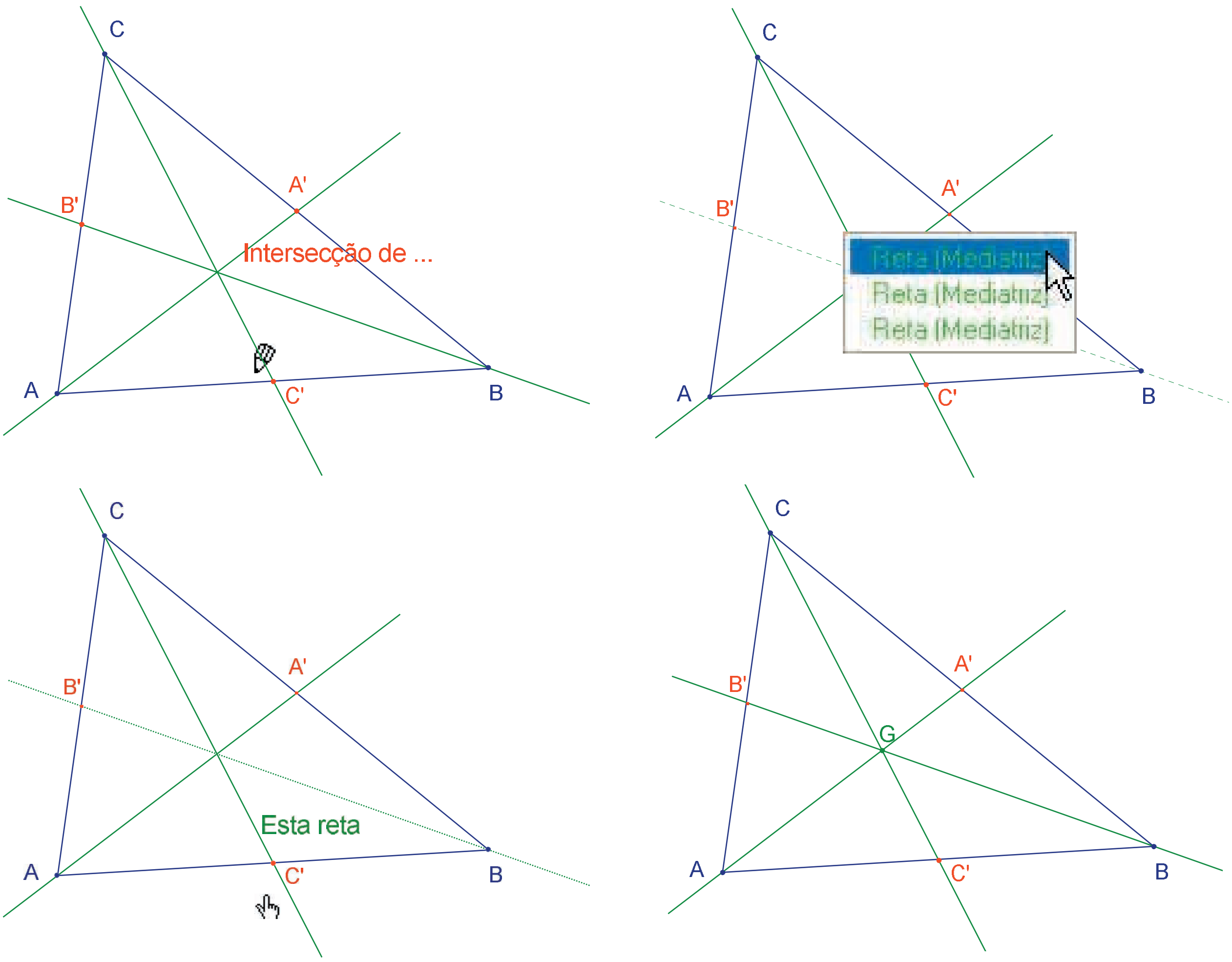


***Figura 2.3** – Construção do ponto de intersecção das medianas e resolução das ambigüidades de seleção.*

As alturas são construídas com a ferramenta [Construções]Reta Perpendicular .
 Esta ferramenta cria a única reta perpendicular a uma direção dada e passando por um ponto dado. Ela necessita da seleção de um ponto e de uma reta, ou de um segmento, ou de uma semi-reta ou de um lado de um polígono. A ordem da seleção não tem importância. Para construir a altura partindo de *A*, selecionaremos então *A*, e o lado *BC*. Fazemos o mesmo para as alturas partindo de *B* e de *C*.
Do mesmo modo que para as medianas, escolheremos uma cor para as alturas, e construiremos seu ponto de intersecção *H*.

A ferramenta [Construções]Mediatriz permite construir a mediatriz de dois pontos, de um segmento ou de um lado de um polígono. Basta selecionar o segmento ou suas extremidades. Chamaremos *O* o ponto de intersecção das três mediatrizes.

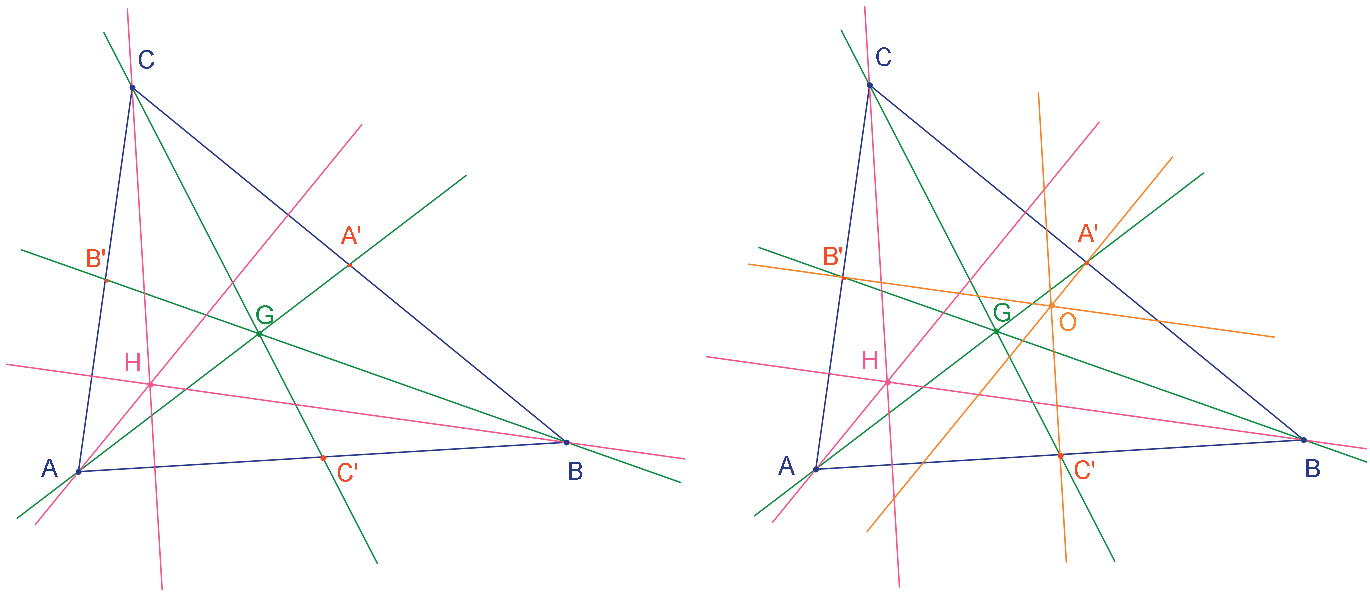


Figura 2.4 *– [A esquerda]. As alturas são construídas com a ajuda da ferramenta [Construções]Reta.*
[A direita]. Finalmente, as mediatrizes são construídas com a ajuda da ferramenta [Construções]Mediatriz.

A ferramenta [Propriedades]Colinear? nos dá a possibilidade de verificar se os três pontos *O, H,* e *G* estão alinhados. Selecionamos sucessivamente esses pontos, depois designamos um lugar na folha para colocar o resultado. O resultado é um texto indicando se os pontos são ou não alinhados. Quando a figura é manipulada, este texto aparece ao mesmo tempo que os outros elementos da figura.

Com a ferramenta [Linhas]Retas , construímos a reta de *Euler* do triângulo que passa pelos três pontos *O, H,* e *G*, selecionando por exemplo *O* e *H*. A ferramenta [Atributos]Espessura... será utilizada para colocar esta reta em evidência.

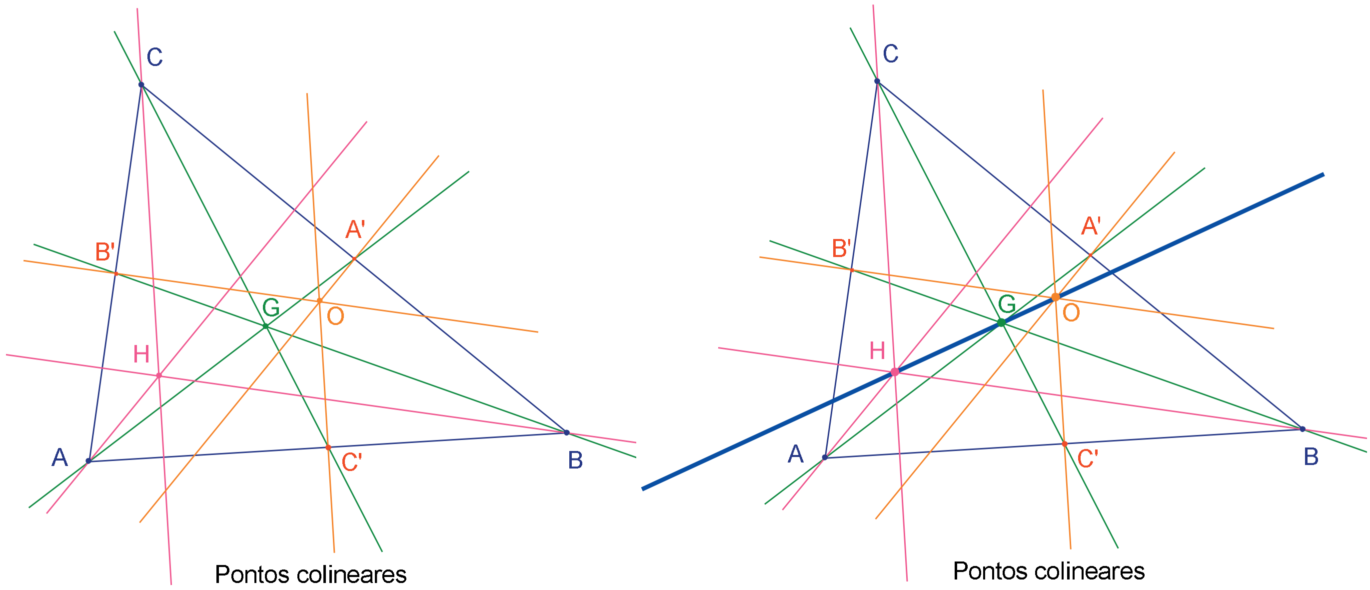


Figura 2.5 *– [A esquerda]. Verificação do alinhamento dos três pontos* O, H, *e* G. *A ferramenta [Propriedades]Colinear? constrói um texto Pontos colineares ou Pontos não colineares segundo o estado corrente da figura*.
[A direita]. A reta de Euler *do triângulo, posta em evidência pela sua espessura, modificada com a ferramenta [Atributos]Espessura.*

Constatamos manipulando a figura que o ponto *G* parece permanecer entre *O* e *H*, e mesmo que sua posição relativa sobre o segmento [*OH*] não muda. Podemos verificá-lo medindo os comprimentos *GO* e *GH*. Ativamos a ferramenta [Medida]Distância e Comprimento cm.
Esta ferramenta permite medir a distância entre dois pontos, ou o comprimento de um segmento, segundo os objetos selecionados. Selecionemos então *G* depois *O* ; a distância *GO* aparece, medida em cm. Fazemos o mesmo para *GH*. Uma vez a medida efetuada, pode-se editar o texto correspondente, por exemplo acrescentando os caracteres GO= antes do número.

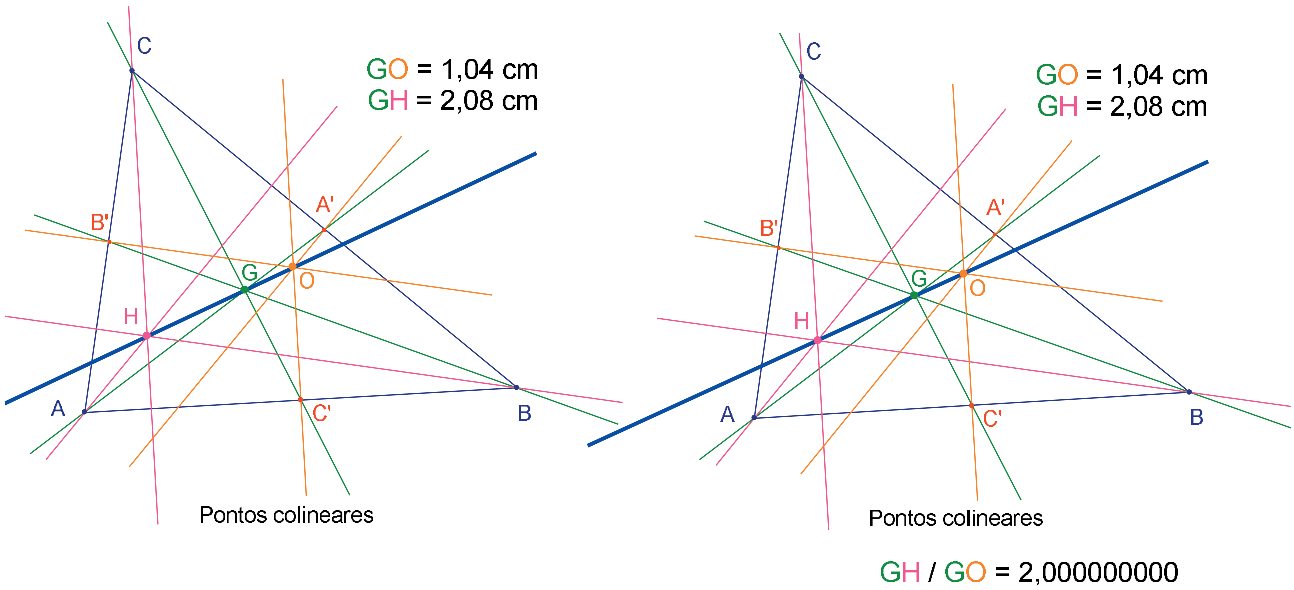


Figura 2.6 *– [A esquerda]. A ferramenta [Medida]Distância ou Comprimento permite obter as distâncias* GO *e* GH.
[A direita]. Com a ajuda da calculadora – ferramenta [Medida]Calculadora – calculamos a razão GH/GO *e verificamos numéricamente que é igual a 2.*

Deslocando a figura, vemos que *GH* parece permanecer o dobro de *GO*. Vamos calcular a razão *GH*/*GO* para o verificar. Ativamos a ferramenta [Medida]Calculadora. Selecionamos então a distância *GH*, depois o operador /,(a barra da divisão) e a distância *GO*. Clicamos no botão = para obter o resultado, que podemos arrastar-posicionar sobre a folha. Quando um número é selecionado (ferramenta [Manipulação]Ponteiro), podemos aumentar e diminuir o número de decimais exibidos com a ajuda das teclas + e -.
Exibimos a razão com uma dezena de números após a vírgula, para constatar que permanece igual a 2.

Exercício 1 - Completar a figura construindo a circunferência circunscrita ao triângulo (centrada em *O* e passando por *A*, *B*, e *C*). Utilizaremos a ferramenta [Curvas]Circunferência.

Exercício 2 - Construir em seguida a «circunferência dos nove pontos» do triângulo. Trata-se da circunferência centrada no ponto médio de [*OH*], e passando pelos pontos médios *A'*, *B'*, *C'* dos lados, os pés das alturas, e os pontos médios dos segmentos [*HA*], [*HB*] e [*HC*].

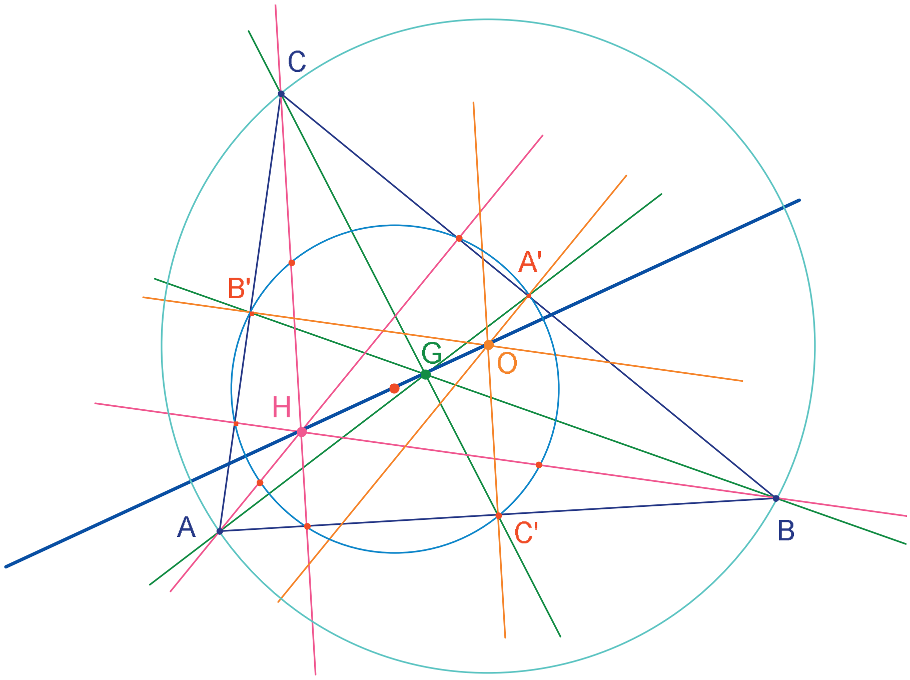


***Figura 2.7** – A figura final, com a circunferência circunscrita ao triângulo e a circunferência dos nove pontos do triângulo.*

A PROCURA DO PONTO MISTERIOSO

Neste capítulo, apresentamos uma atividade colocando em prática as possibilidades de exploração oferecidas por Cabri II Plus. A partir de três pontos *A, B, C* dados, vamos procurar os pontos M verificando a igualdade vetorial.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

Vamos então em primeiro lugar construir quatro pontos quaisquer com a ferramenta [Pontos]Ponto, chamando-os *A, B, C, M* no mesmo instante, isto é digitando seus nomes no teclado logo após a sua criação. Cabri II Plus permite criar vetores. Cada vetor é, classicamente representado por um segmento com uma flecha. Construamos agora um representante do vetor , com a ferramenta [Linhas]Vetor, selecionando em primeiro lugar *M* depois *A*. Este representante tem a sua origem em *M*. Fazemos o mesmo para $\overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{MC}$.

Construímos então um representante da soma +, ativando a ferramenta [Construções]Soma de dois Vetores, a quem apresentamos os dois vetores e em seguida a origem do representante da soma, aqui escolheremos *M*. Chamemos *N* a extremidade deste representante. Construímos enfim um representante da soma dos três vetores com *M* como origem da mesma maneira, somando $\overrightarrow{MN}$ (igual a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$) e $\overrightarrow{MC}$. Chamemos *P* a extremidade deste representante.

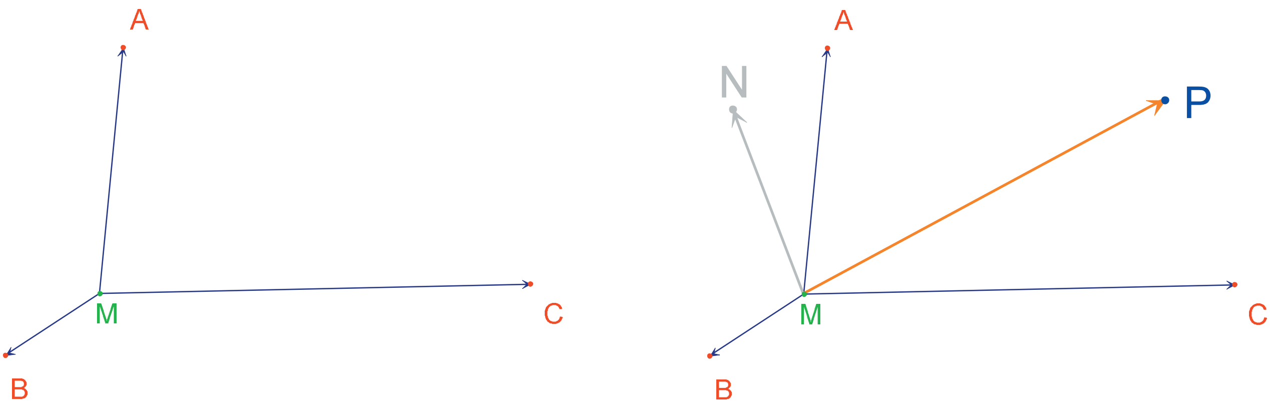


Figura 3.1 *– [À esquerda]. A partir de três pontos quaisquer* A, B, *e* C *e de um ponto* M, *construímos representantes dos vetores,* $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, *e* $\overrightarrow{MC}$.
[A direita]. Com a ajuda da ferramenta [Construções]Soma de dois Vetores, construímos $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, *e* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Podemos agora procurar as soluções do problema por manipulação. Para fazê-lo, ativa-se a ferramenta [Manipulação]Ponteiro e desloca-se o ponto M. A soma dos três vetores aparece a todo instante por ocasião do deslocamento. Em função da posição de M em relação aos pontos A, B, e C, observamos a norma e a orientação do vetor $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Podemos então fazer as seguintes conjecturas (entre outras):

- Uma única posição de M permite anular a soma dos três vetores: o problema tem uma única solução. Esta solução está no interior do triângulo ABC.

- O quadrilátero $MANB$ é um paralelogramo.

- O quadrilátero $MCPN$ é um paralelogramo.

- Para que a soma seja nula, os vetores, $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{MC}$, devem ser colineares, de normas iguais e de sentidos contrários, quer dizer opostas.

- $\overrightarrow{MP}$, passa sempre por um mesmo ponto, e este ponto é a solução do problema.

- A extremidade P do representante da soma é um ponto dependente de M. Definimos assim uma transformação que associa P ao ponto M. A solução do problema é um ponto invariante desta transformação.

Seguindo as constatações feitas, a pesquisa se orientará em uma ou outra direção. Suponhamos por exemplo ter observado que os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{MC}$, devam ser opostos. Surge então um outro problema: para quais posições de M estes dois vetores são colineares? Desloquemos M de tal maneira que os dois vetores sejam colineares. Observamos que M percorre uma reta, e que esta reta passa por C e igualmente pelo ponto médio de $[AB]$. Esta reta contém então a mediana em C do triângulo. A, B e C desempenhando papéis simétricos, o ponto procurado está também nas duas outras medianas e portanto finalmente na intersecção das três medianas.

Para uma atividade em classe, restaria ainda aos alunos propor uma construção do ponto solução, e demonstrar esta conjectura elaborada por exploração.

O poder de convicção de uma construção dinâmica é muito mais elevado que aquele de uma figura estática realizada sobre uma folha de papel. De fato, basta manipulá-la para verificar a conjectura num grande número de casos. Uma conjectura que permanece válida após manipulação será correta na maioria dos casos.

Para uma melhor utilização em classe, seria interessante abordar os seguintes pontos com os alunos (entre outros):

- Uma construção dinâmica visualmente correta está correta?

- Uma construção dinâmica correta constitui uma resposta ao problema?

- Em que momento um raciocínio pode ser qualificado de demonstração?

- O que falta a uma construção dinâmica correta para tornarse uma demonstração?

- A demonstração deve ser baseada no processo de elaboração da figura?

Exercício 3 - Estender o problema a quatro pontos, procurando os pontos M tais que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 0$

Exercício 4 - Enumerar o conjunto dos «caminhos de exploração» e das demonstrações para o problema inicial (três pontos) acessíveis a um aluno da 2a série do Ensino Médio.

Exercício 5 - Estudar e construir o ponto M que minimiza a soma ($MA+MB+MC$) das distâncias a três pontos A, B e C dados. Trata-se do ponto de *Fermat*[1] do triângulo ABC.

[1]*Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

CAPÍTOLO 4

O QUADRILÁTERO DE VARIGNON

Neste capítulo apresentamos algumas construções ao redor do teorema de *Varignon*[1].

Vamos inicialmente construir um quadrilátero qualquer *ABCD*. Ativa-se a ferramenta [Linhas]Polígono, depois selecionamos quatro pontos, chamados imediatamente *A, B, C* e *D*. Para terminar o polígono, selecionamos novamente *A* depois de ter construído *D*.

Construímos em seguida os pontos médios *P* de [*AB*], *Q* de [*BC*], *R* de [*CD*], e *S* de [*DA*] com a ferramenta [Construções]Ponto Médio. Essa ferramenta aguarda a seleção de *A* depois *B* para construir o ponto médio de [*AB*]. Podemos igualmente selecionar diretamente o segmento *AB* se este já existe, seja como segmento, ou como lado de um polígono como é o caso aqui.

Construímos enfim o quadrilátero *PQRS* com a ferramenta [Linhas]Polígono.

Manipulando a construção, com a ferramenta [Manipulação]Ponteiro, observamos que *PQRS* parece ser ainda um paralelogramo. Vamos interrogar Cabri II Plus sobre o paralelismo de [*PQ*] e [*RS*], assim como de [*PS*] e [*QR*], utilizando a ferramenta [Propriedades]Paralela?. Selecionamos os lados [*PQ*] depois [*RS*], e um texto é exibido, confirmando que os dois lados são paralelos. Verificamos da mesma forma que [*PS*] e [*QR*] são paralelos.

[1]*Pierre Varignon, 1654-1722*

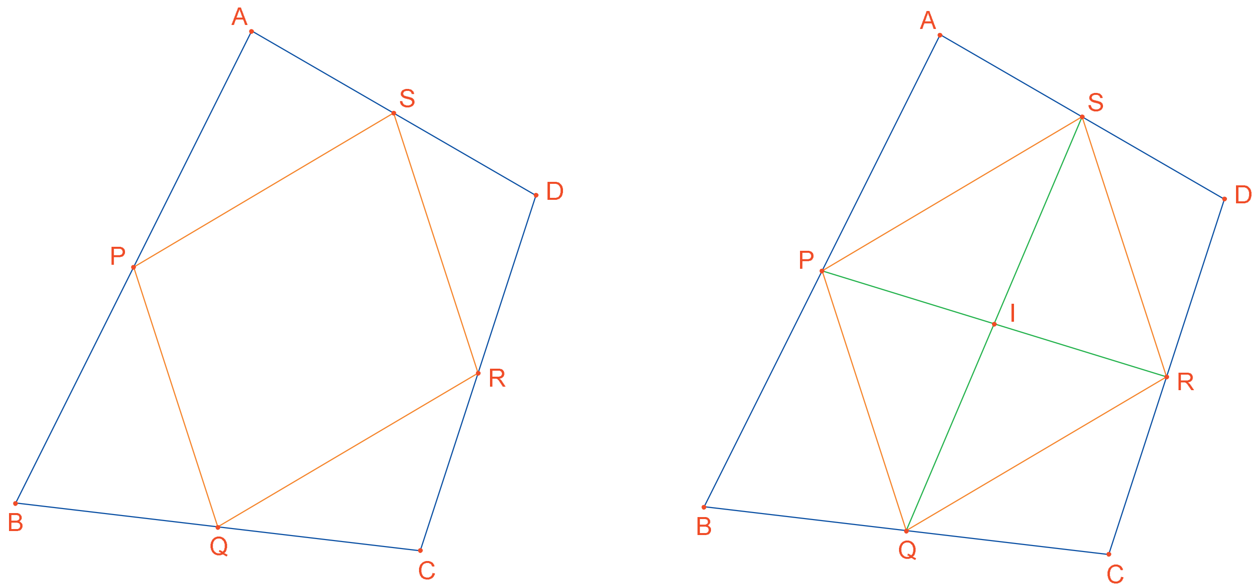


***Figura 4.1** – [A esquerda]. A partir de um quadrilátero qualquer* ABCD, *construímos o quadrilátero* PQRS *cujos vértices são os pontos médios dos lados de* ABCD.
[A direita]. Construção das diagonais de PQRS, *das quais mostramos que as mesmas cortam-se em seus pontos médios.*

Construímos então as duas diagonais [PR] e [QS] com a ajuda da ferramenta [Linhas]Segmento, e seu ponto de intersecção I com a ferramenta [Pontos]Ponto. Existem várias maneiras de demonstrar que I é o ponto médio de [PR] e igualmente de [QS], e então que $PQRS$ é um paralelogramo. Por exemplo com um cálculo baricêntrico: P é o baricentro de $\{(A,1),(B,1)\}$ e R de $\{(C,1),(D,1)\}$, e então o ponto médio de [PR] é o baricentro de $\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$, e o mesmo se dá para o ponto médio de [QS]. Então os dois pontos médios se confundem em um ponto: o ponto de intersecção I.

O ***teorema de Varignon*** é o seguinte: o quadrilátero $PQRS$ construído a partir dos pontos médios de um quadrilátero $ABCD$ qualquer é um paralelogramo, e sua área é a metade daquela de $ABCD$.

Exercício 6 - Já estabelecemos acima a primeira parte do teorema. Demonstrar a segunda parte relativa à área de $PQRS$. Poderemos obter uma ajuda pela ***figura***.

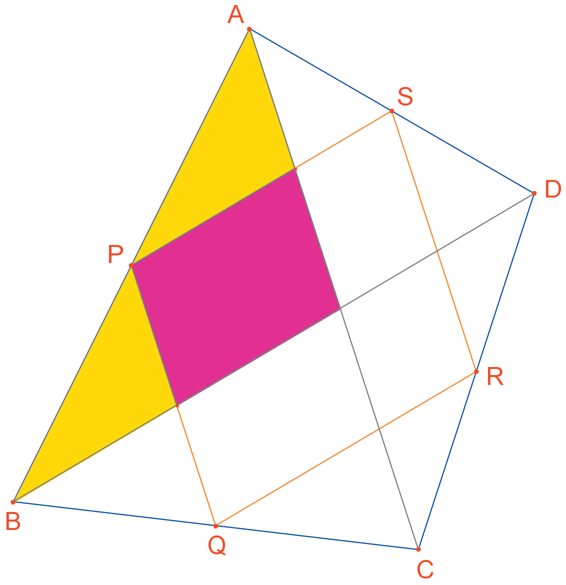


Figura 4.2 *– Construção permitindo estabelecer a segunda parte do teorema.*

Deixemos agora *A, B* e *C* fixos, e desloquemos *D* de maneira a tornar *PQRS* um retângulo. Como já sabemos que é um paralelogramo, basta que um de seus ângulos seja reto para poder afirmar que é um retângulo. Medimos então o ângulo em *P*, com a ajuda da ferramenta [Medida]Medida de Ângulo . Esta ferramenta aguarda a seleção de três pontos definindo um ângulo, o vértice sendo o segundo ponto. Por exemplo aqui selecionaremos os pontos *S, P* (o vértice do ângulo) e *Q*.

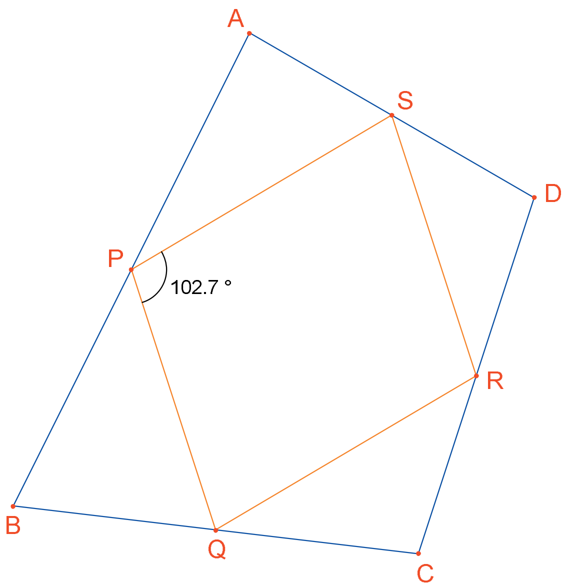
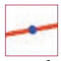
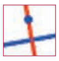
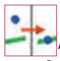


Figura 4.3 *– Medimos o ângulo em* P *do paralelogramo* PQRS.

A ferramenta [Medida]Medida de Ângulo pode igualmente fornecer a medida de um ângulo anteriormente marcado com a ferramenta [Texto e Símbolos]Marcar um Ângulo. Esta ferramenta aguarda três pontos definindo o ângulo, na mesma ordem que para a ferramenta [Medida]Medida do Ângulo .

Deslocando *D* de maneira que *PQRS* seja um retângulo, as soluções encontradas parecem sensivelmente alinhadas. De fato se construímos as diagonais [*AC*] e [*BD*] do quadrilátero inicial, veremos que os lados de *PQRS* são paralelos a estas diagonais, e então que *PQRS* é um retângulo se e somente se [*AC*] e [*BD*] forem perpendiculares. Vamos agora redefinir *D* para que *PQRS* seja sempre um retângulo. Tracemos a reta (*AC*) com a ferramenta [Linhas]Reta  selecionando *A* e *C*, depois a perpendicular a essa reta passando por *B*, com a ferramenta [Construções]Reta Perpendicular  selecionando *B* e a reta (*AC*).

D é atualmente um ponto livre no plano. Vamos modificar sua definição, e torná-la um ponto livre sobre a perpendicular a (*AC*) que passa por *B*. Ativa-se a ferramenta [Construções]Redefinir um Objeto , depois seleciona-se *D*. Um menu aparece indicando as diferentes opções de redefinição para *D*. Escolhemos Ponto sobre um objeto, depois selecionamos um ponto sobre a perpendicular. *D* se desloca então neste ponto, e é a partir de agora obrigado a ficar sobre a reta. A redefinição é uma maneira de exploração muito poderosa, que permite retirar ou acrescentar graus de liberdade aos elementos de uma figura sem ter de recriá-la inteiramente.

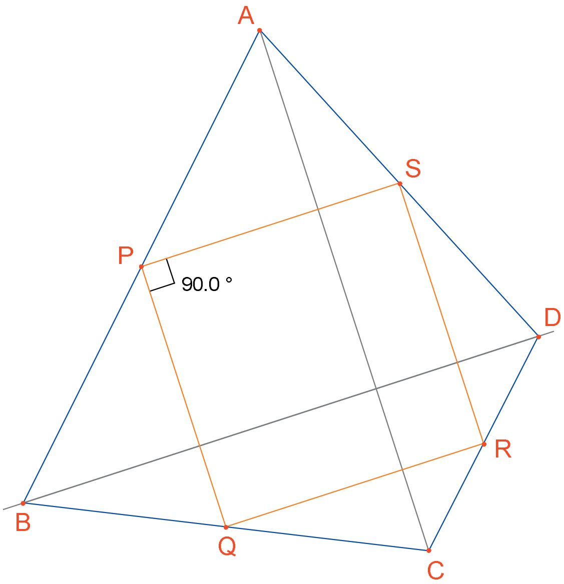


Figura 4.4 – *O ponto* D *está agora redefinido de tal maneira que* PQRS *seja sempre um retângulo. Este ponto conserva ainda um grau de liberdade; ele é móvel sobre uma reta.*

Exercício 7 - Encontrar uma condição necessária e suficiente para que *PQRS* seja um quadrado. Redefinir mais uma vez *D* para que a construção forneça apenas quadrados.

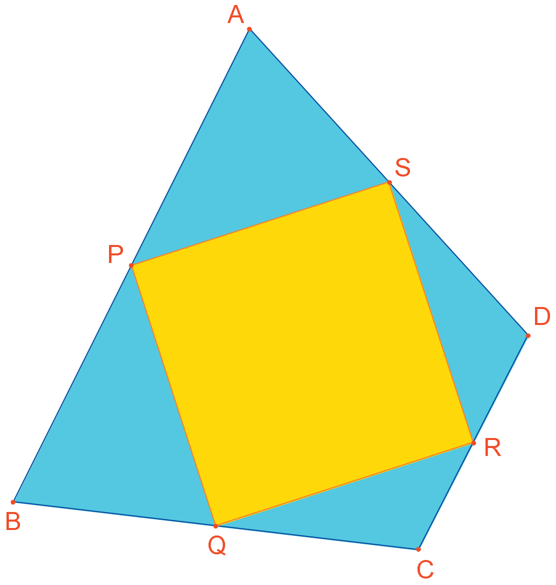


Figura 4.5 *– Aqui, o ponto* D *não tem mais nenhum grau de liberdade, e* PQRS *é agora sempre um quadrado.*