

CABRI[®] II Plus



Criador de Ferramentas Matemáticas

APROFUNDAMENTO

BEM-VINDO!

Bem-vindo na parte **Aprofundamento** do manual de utilização do Cabri II Plus.

Esta seção, dividida em três capítulos, apresenta problemas matemáticos de nível superior que os torna, graças à utilização de Cabri II Plus, lúdicos a explorar e simples a resolver. Esses problemas vêm como complemento ao **Tutorial** para os usuários desejosos de prosseguir com a descoberta do software.

Esses exercícios são concebidos para o Ensino Médio e universitário. Eles são independentes uns dos outros, também, o leitor é convidado a se inspirar nos seus métodos de construções e a fazer os exercícios correspondentes. Os exercícios marcados com um asterisco apresentam um grau de dificuldade maior.

ÍNDICE GERAL

APROFUNDAMENTO

CAPÍTULO

1

TRIÂNGULOS PEDAIS

P 4

CAPÍTULO

2

FUNÇÕES

P 9

CAPÍTULO

3

PAVIMENTAÇÃO

P 14



TRIÂNGULOS PEDAIS

Sejam três pontos quaisquer A , B e C , construídos com a ferramenta [Pontos]Ponto . Construímos inicialmente as três retas (AB) , (BC) e (CA) , com a ferramenta [Linhas]Reta . Seja agora um ponto M qualquer do plano, e as respectivas projeções ortogonais C' , A' e B' de M sobre essas três retas. Esses pontos são obtidos construindo as retas perpendiculares a (AB) , (BC) e (CA) passando por M , com a ajuda da ferramenta [Construções]Reta Perpendicular , depois criando os pontos de intersecções de cada uma dessas retas com a perpendicular correspondente utilizando a ferramenta [Pontos]Ponto . A ferramenta [Pontos]Ponto  permite construir implicitamente as intersecções entre objetos. Basta deslocar o cursor perto de uma intersecção, e o programa exibe **Ponto a esta intersecção**, ou **Intersecção de...** e um menu em caso de ambigüidade.

Os três pontos A' , B' e C' definem um triângulo que será traçado utilizando a ferramenta [Linhas]Triângulo . É um triângulo pedal relativo ao triângulo ABC . Podemos colorir o interior do triângulo com a ferramenta [Atributos]Preencher . Interessamo-nos pela área deste triângulo em função da posição do ponto M . A área do triângulo é obtida com a ferramenta [Medida]Área . Esta ferramenta fornece uma área «geométrica» sempre positiva, não levando em conta a orientação do triângulo.

Obtém-se uma medida em cm^2 que podemos posicionar livremente sobre a folha. O menu contextual obtido por um clique-direito sobre o número permite a exibição da área «algébrica» cujo sinal depende da orientação do triângulo.

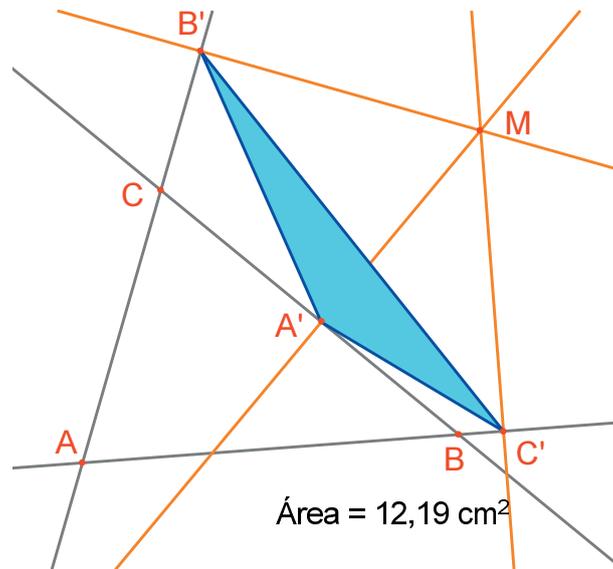


Figura 1.1 - O triângulo pedal correspondendo à M e sua área.

Vamos estudar a variação da área do triângulo $A'B'C'$ em função da posição de M . Para fazer isto, existem várias estratégias. Podemos por exemplo ativar o rastro do ponto M (ferramenta [Texto e Símbolos]Rastro ) , depois o deslocar tentando manter a área do triângulo $A'B'C'$ constante. As posições sucessivas de M permanecerão exibidas, e teremos assim o aspecto geral de uma curva de nível da função associada à área do triângulo $A'B'C'$. Uma outra estratégia consiste em utilizar os lugares geométricos de pontos numa grade para desenhar uma representação visual da área do triângulo $A'B'C'$ para um grande número de posições de M .

Aqui, nós adotaremos esta estratégia, e vamos traçar a circunferência centrada em M tendo uma área proporcional àquela do triângulo $A'B'C'$. Para fazer isto, devemos antes calcular o raio da circunferência, proporcional à raiz quadrada da área do triângulo. Ativemos a ferramenta [Medidas]Calculadora , e selecionemos a expressão `sqrt` (depois selecionemos o número representando a área do triângulo para o incluir na expressão, que passa a ser `sqrt(a)`). Fechemos então a parêntese, e dividamos por 10 para evitar as circunferências muito grandes. A expressão na calculadora é agora `sqrt(a)/10`. É avaliada clicando no botão `=`, depois efetuamos um arrastar-posicionar do resultado para o colocar sobre a folha.

Para traçar uma circunferência centrada em M e tendo o raio calculado anteriormente, ativamos a ferramenta [Construções]Compasso . Selecionamos o número que já estava colocado na folha, depois o ponto M . Obtém-se então a circunferência centrada em M de raio procurado. Já podemos observar visualmente a evolução da área do triângulo em função da posição de M .

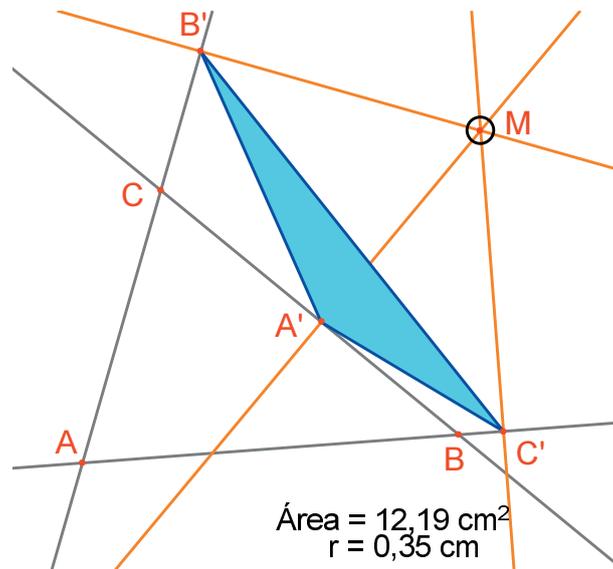


Figura 1.2 - Desenhamos uma circunferência centrada em M com área proporcional àquela do triângulo A'B'C'.

Vamos agora definir uma grade, depois redefinir M como ponto sobre esta grade, e enfim traçar todas as circunferências representando a área do triângulo pedal para M percorrendo todos os pontos da grade. Para definir uma grade, precisamos de um sistema de eixos. Vamos tomar os eixos como default presentes em toda figura. Vamos torná-los visíveis escolhendo a opção [Atributos]Mostrar os Eixos . Em seguida, ativamos a ferramenta [Atributos]Grade  e selecionamos os eixos. Uma grade de pontos aparece.

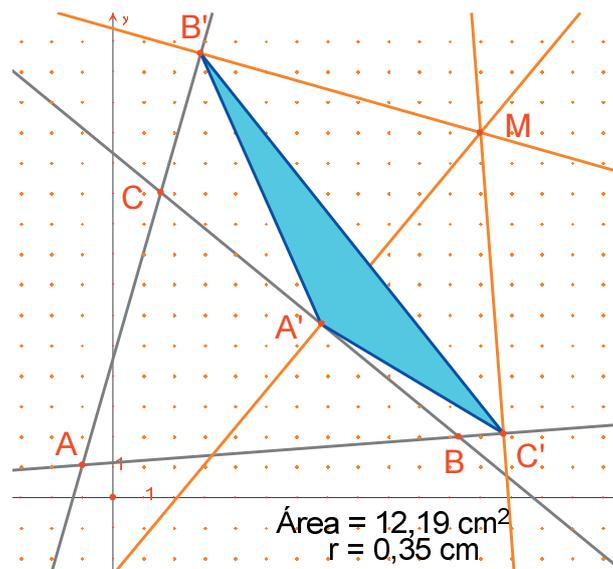


Figura 1.3 - Constroe-se uma grade a partir dos eixos por default da figura, em seguida redefnimos M como ponto livre na grade.

O ponto M é um ponto livre no plano; vamos redefini-lo para obrigá-lo a ficar na grade. Ativemos a ferramenta [Construções]Redefinir um Objeto , depois selecionamos M , escolhemos a opção Ponto sobre um objeto no menu que então aparece, depois selecionamos um ponto da grade. O ponto M só pode agora se mover na grade.

A ferramenta [Construções]Lugar  geométrico permite construir o conjunto de circunferências obtidas deslocando M sobre toda a grade. Selecionamos a circunferência depois o ponto M , para obter o lugar geométrico das circunferências quando M varia na grade.

Demonstra-se (ver por exemplo o livro Géométrie de *Marcel Berger*, edição CEDIC, Paris 1977, item 10.4.5) que as curvas de nível de valores iguais à área do triângulo pedal são circunferências, onde o centro é o mesmo que aquele da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Em particular, a área do triângulo $A'B'C'$ é nula se M está sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , ou ainda, de maneira equivalente, os pontos A' , B' e C' são colineares se e somente se M está sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

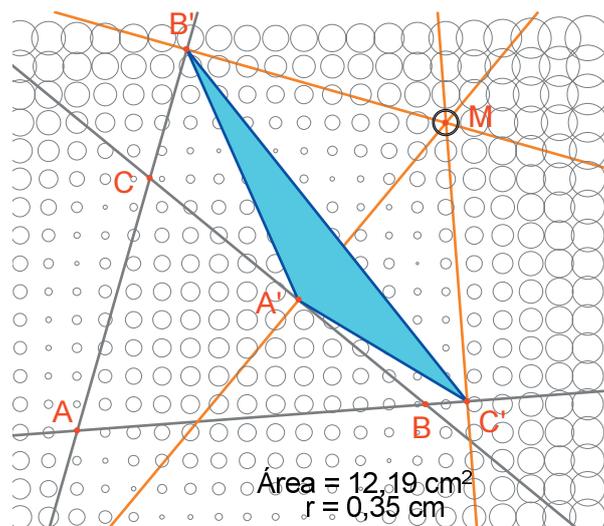


Figura 1.4 - Repartição da área do triângulo pedal em função da posição de M .

Exercício 1 - Para M sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , os três pontos A' , B' e C' são colineares e a reta passando por $A'B'C'$ chama-se reta de *Simson*¹ ou reta de *Wallace*² associada ao ponto M .

¹ Robert Simson, 1687-1768
² William Wallace, 1768-1843

Este resultado tendo sido durante muito tempo atribuído erroneamente a *Simson*, foi de fato publicado por *Wallace* em 1799. Construir o envelope das retas de *Simson* (utilizar a ferramenta [Construções]Lugar  geométrico). Por default, esta ferramenta fornece, no caso de retas, não o conjunto de retas, mas seu envelope. Esta curva, invariante por uma rotação de ângulo 120° , chama-se uma deltóide, porque ela tem a forma da letra Δ : é a deltóide de *Steiner*³. Ela é tangente às três retas (AB) , (BC) , (CA) . É uma curva algébrica de grau 4. Você pode verificar pedindo a sua equação com a ajuda da ferramenta [Medida]Equação e Coordenadas .

Exercício 2 - Para a deltóide do exercício anterior, construir o centro, os três pontos de tangência com as três retas, os três vértices da curva, assim como a maior circunferência inscrita na curva.

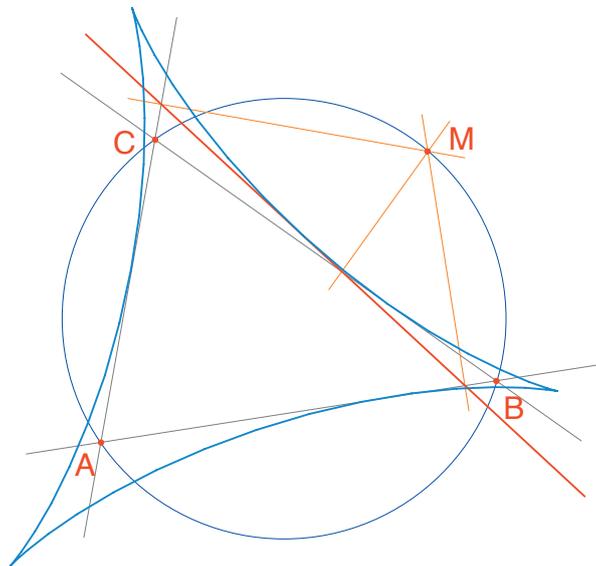


Figura 1.5 - O envelope das retas de Simson de um triângulo ABC é chamado um deltóide. Ele possui as mesmas simetrias que um triângulo equilátero.

³Jakob Steiner, 1796-1863

Graças ao seu sistema de eixos e à ferramenta expressão, Cabri II Plus permite construir facilmente o gráfico de uma função e de utilizar este gráfico para a estudar. Vamos estudar neste capítulo uma função polinomial de grau 3,

$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

Inicialmente, vamos tornar visíveis os eixos coordenados, com [Atributos] **Mostrar os Eixos** . Em seguida, criamos a expressão correspondente na folha. Uma expressão posicionada sobre a folha pode ser depois calculada para diferentes valores de suas variáveis. Aqui, ativamos [Texto e Símbolos] **Expressão** , e entramos com $x^3 - 2 * x + 1/2$. Os nomes das variáveis admitidas nas expressões são as letras a, b, c, \dots, z .

Posicionamos um ponto P sobre o eixo das abscissas (com a ferramenta [Pontos] **Ponto** ). Obtemos suas coordenadas por [Medida] **Coordenadas ou Equação**  selecionando P . O texto exibindo as coordenadas é inicialmente ligado a P , e se deslocará com o ponto. Com a ferramenta [Manipulação] **Ponteiro** , podemos deslocar as coordenadas do ponto P e colocá-las em qualquer lugar da folha. Podemos igualmente ligá-las novamente aproximando-as do ponto.

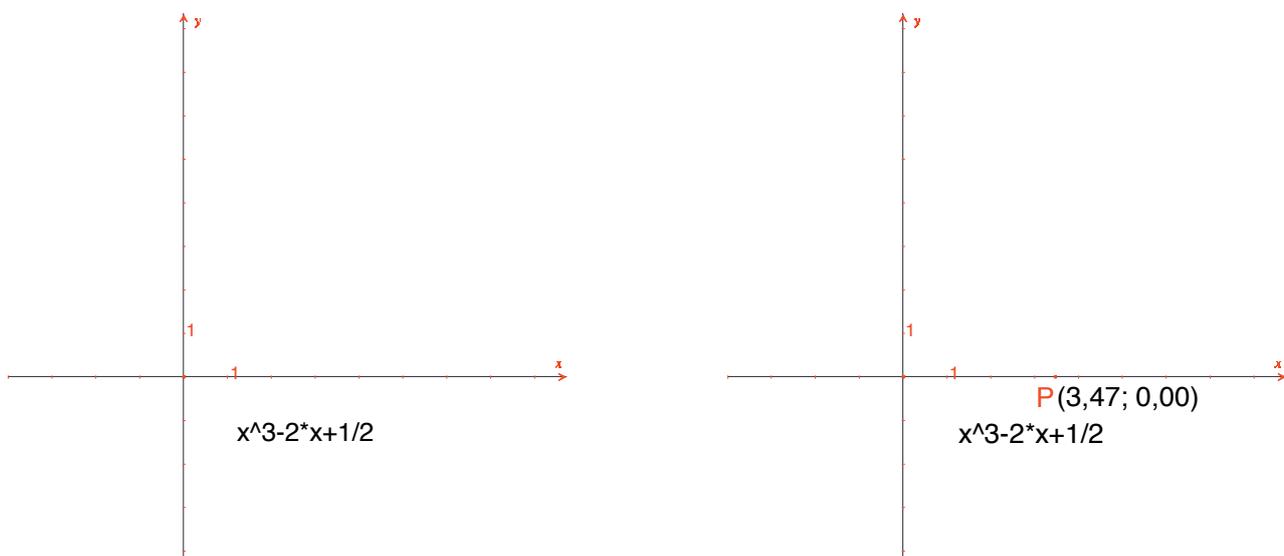


Figura 2.1 - [A esquerda] Digita-se a expressão correspondente à função a estudar. [A direita] Posiciona-se um ponto P sobre o eixo das abscissas, e exibe-se suas coordenadas com [Medida] **Coordenadas ou Equação**.

Calculamos em seguida o valor de $f(x)$ onde x representa a abscissa de P . Para isso, ativamos a ferramenta [Medida]Aplicar uma Expressão , e selecionamos a abscissa de P no texto representando suas coordenadas.

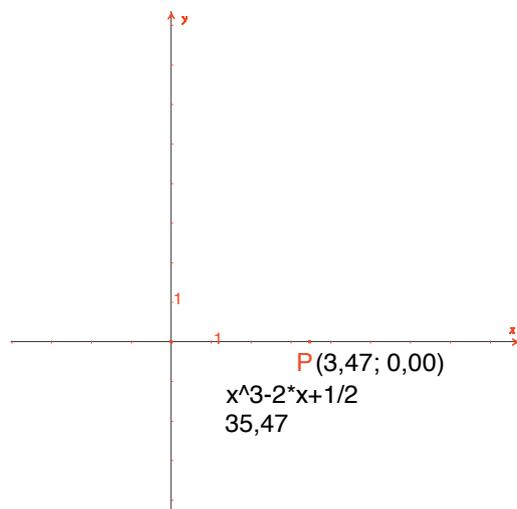


Figura 2.2 - A ferramenta [Medida]Aplicar uma Expressão é utilizada para calcular o valor de $f(x)$ quando x é a abscissa de P .

Transferimos em seguida este valor sobre o eixo das ordenadas com a ferramenta [Construções]Transferência de Medida , selecionando o valor a transferir e em seguida o eixo das ordenadas. Em seguida, basta construir paralelas aos eixos passando por esses dois pontos ([Construções]Reta Paralela , e obtém-se na sua intersecção o ponto M de coordenadas $(x, f(x))$. Na **figura 2.3**, deslocamos P em relação à posição da **figura 2.2** para trazer o ponto do eixo das ordenadas obtido por transferência de medida na parte visível da folha.

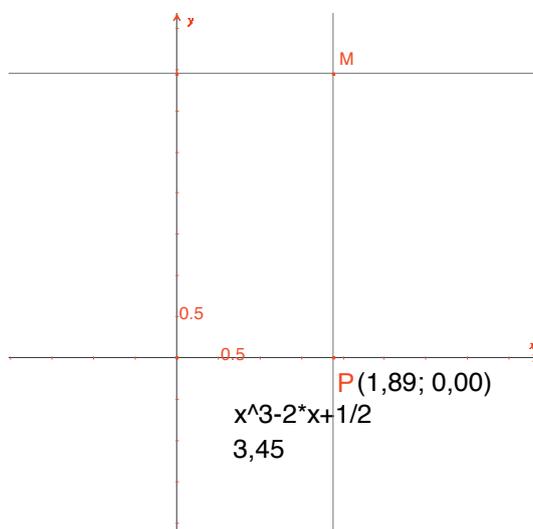


Figura 2.3 - Construção do ponto $M(x, f(x))$.

O gráfico da função é obtido exibindo o lugar geométrico do ponto M quando P descreve o eixo das abscissas. É construído com a ferramenta [Construções]Lugar geométrico selecionando M depois P . A fim de melhor enquadrar a parte interessante do gráfico da função, pode-se deslocar a origem do referencial e as graduações, por arrastar-posicionar da origem do referencial ou de uma graduação qualquer.

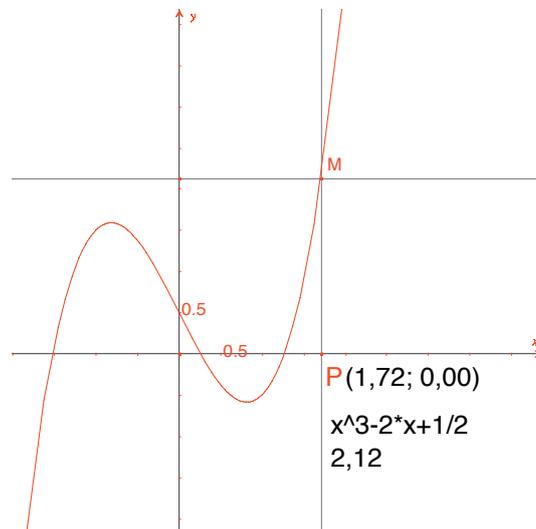


Figura 2.4 - A ferramenta [Construções]Lugar geométrico permite finalmente construir o gráfico da função.

Vamos construir uma aproximação da tangente à curva em um ponto. Para h pequeno, sabemos que

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

do ponto de vista geométrico, esta aproximação equivale a tomar como direção da tangente ao ponto da curva de abscissa x a direção da reta ligando os pontos de abscissas $x - h$ e $x + h$.

Com a ferramenta [Texto e Símbolos]Número 2.1, digita-se um valor para h , por exemplo aqui $0,3$ que convém aqui para essas construções. Poderemos depois editá-lo para substituí-lo por um valor menor dando uma melhor aproximação. Construimos em seguida um ponto A sobre o eixo das abscissas, e a circunferência de centro A e de raio h . Esta circunferência é obtida com a ferramenta [Construções]Compasso selecionando h depois A . As duas intersecções da circunferência de centro A e de raio h com o eixo das abscissas têm por abscissas $x - h$ e $x + h$, se x for abscissa de A . Tracemos as três retas paralelas ao eixo das ordenadas ([Construções]Reta paralela) e passando pelos dois pontos de intersecção, e o ponto A .

Como a figura começa a ficar um pouco complexa, vamos ocultar os elementos que não servem mais. Ativamos a ferramenta [Atributos]Esconder/Mostrar , e selecionamos os elementos a ocultar. Aqui, vamos ocultar P , M , as duas retas de construção de M , as coordenadas de P e a imagem da abscissa de P pela função. Os objetos ocultos só serão visíveis em pontilhados quando a ferramenta [Atributos]Esconder/Mostrar  estiver ativa. Para tornar visível um objeto oculto, basta selecioná-lo novamente com esta mesma ferramenta.

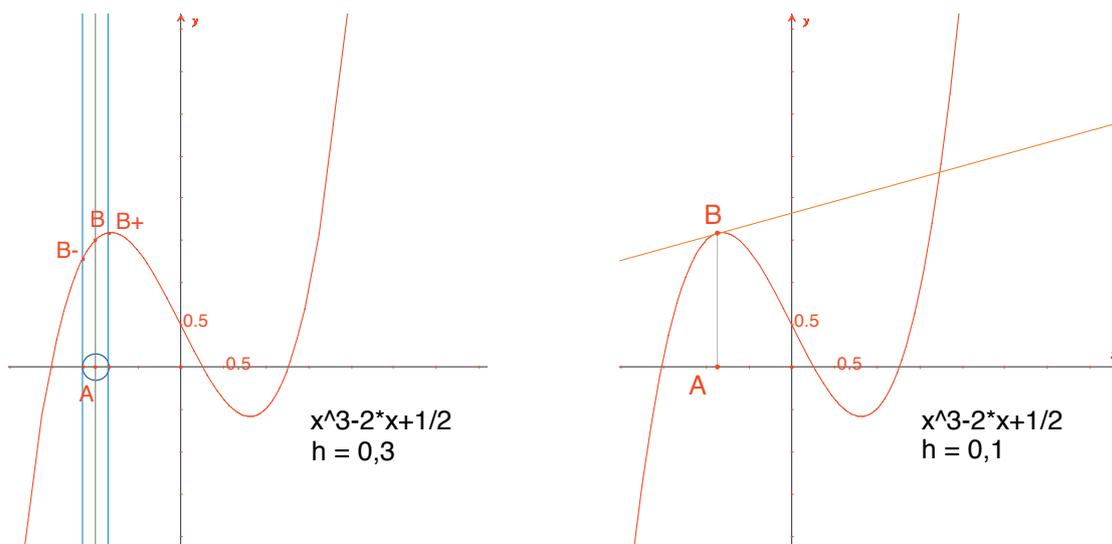


Figura 2.5 - [A esquerda] Considerando a intersecção da circunferência de centro A e de raio h , construímos os três pontos da curva de abscissas $x-h$, x , e $x+h$. [A direita] A aproximação da tangente em B é então a paralela à reta $(B^- B^+)$ passando por B .

Construímos esta reta com a ferramenta [Linhas]Reta  depois a paralela com [Construções]Reta Paralela . Em seguida ocultamos a reta $(B^- B^+)$ e os outros elementos de construção para só deixar visível h , A , B e a tangente em B . Vemos que o valor $h= 0,3$ já fornece uma aproximação muito boa da tangente. Podemos entretanto melhorá-la diminuindo h , por exemplo tomando $0,0001$.

O deslocamento do ponto A sobre o eixo permite determinar visualmente as três raízes da equação $f(x) = 0$, os dois extremos locais de f , e o ponto de inflexão da curva.

Para informação, as três soluções de $f(x) = 0$ são aproximadamente $r_1 = -1,52568$, $r_2 = 0,25865$ e $r_3 = 1,26703$.

As abscissas dos extremos são $e_1 = -\sqrt{6}/3 \approx -0,81649$ e $e_2 = \sqrt{6}/3 \approx 0,81649$. O ponto de inflexão tem por coordenadas.

Exercício 3 - Utilizando o coeficiente angular da tangente, traçar o gráfico da função derivada.

Exercício 4 - A tangente corta o eixo em um ponto A' da abscissa x' , que é geralmente uma melhor aproximação da raiz que x se A já estiver na vizinhança de uma raiz de $f(x) = 0$. Esta constatação é a base do método iterativo de *Newton*¹ - *Raphson*² para encontrar uma raiz de uma equação. Construir A' , depois seu iterado A'' pelo mesmo método, depois estudar a posição de A'' em função daquela de A . Em particular, podemos encontrar duas posições de A , além das três raízes, para as quais A'' volta em A .

Para informação, são as duas raízes reais de um polinômio de grau 6, valendo aproximadamente -0,56293 e 0,73727. Vemos também que uma escolha errada de A pode fazer divergir o método, levando A' sobre um dos dois pontos onde a derivada é nula.

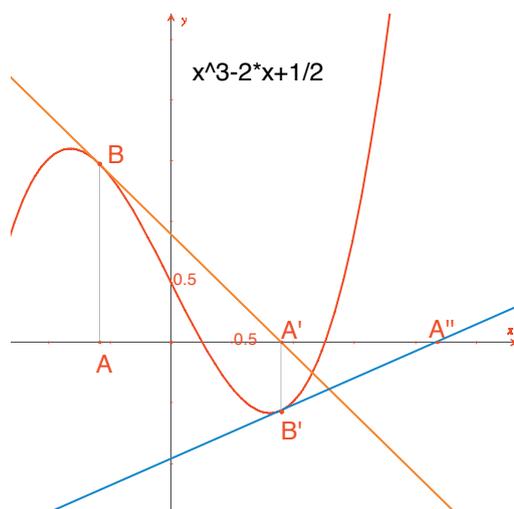


Figura 2.6 - As duas primeiras iterações do método de Newton-Raphson a partir do ponto A .

Nota: O mesmo gráfico é obtido diretamente com a ajuda da ferramenta [\[Medida\]Aplicar uma Expressão](#) $\frac{3x+}{2y} =$. Selecionar inicialmente a expressão e depois um dos dois eixos.

¹ Sir Isaac Newton, 1643-1727

² Joseph Raphson, 1648-1715



PAVIMENTAÇÃO

Vamos construir algumas pavimentações do plano por polígonos. Começemos por algumas definições simplificadas, mas suficientes para a seqüência. O leitor interessado pode reportar-se à obra de referência *Tilings and Patterns* de *Branko Grünbaum e Geoffrey C. Shephard, Freeman 1987*. Existe igualmente um grande número de sites Internet sobre as pavimentações e os grupos de simetria.

Dizemos que um conjunto de partes fechadas do plano é uma pavimentação do plano se os interiores das partes são disjuntos dois a dois, e a reunião de todas as partes é o plano inteiro. Estas partes são chamadas de ladrilhos da pavimentação. A intersecção não reduzida a um ponto de dois ladrilhos é chamada uma aresta da pavimentação, e a intersecção reduzida a um ponto de dois ou mais ladrilhos é chamada um vértice da pavimentação.

Para uma pavimentação P , notamos $S(P)$ o conjunto das isometrias f do plano tais que a imagem de todo ladrilho de P por f é um ladrilho de P . $S(P)$ é um grupo, chamado o grupo das simetrias da pavimentação. Vários casos devem ser considerados para este grupo:

- $S(P)$ não contém nenhuma translação. $S(P)$ é então isomorfo a um grupo cíclico, eventualmente reduzido à identidade, gerado por uma rotação de ângulo $2\pi/n$, ou a um grupo diedral, grupo de simetrias de um polígono regular de n lados.
- $S(P)$ contém translações de vetores todos colineares. $S(P)$ é então isomorfo a um dos 7 grupos de frisos.
- $S(P)$ contém duas translações de vetores não colineares. Então $S(P)$ é isomorfo a um dos 7 grupos cristalográficos, e a pavimentação é dita periódica.

Se todos os ladrilhos da pavimentação podem ser obtidos por isometria a partir de um só ladrilho, dizemos que a pavimentação é monoedral. Nós nos interessaremos aqui somente no caso de pavimentações monoedrais onde os ladrilhos são polígonos. Vamos inicialmente construir uma pavimentação monoedral da qual um ladrilho é um triângulo qualquer.

Construímos um triângulo qualquer ABC com a ajuda da ferramenta [Linhas]Triângulo , depois o ponto médio I de um dos lados, por exemplo $[BC]$, com a ferramenta [Construções]Ponto Médio . Seja D o simétrico de A em relação a I , obtido com a ferramenta [Transformações]Simetria Central  selecionando em primeiro lugar o objeto a transformar A , depois o centro de simetria I .

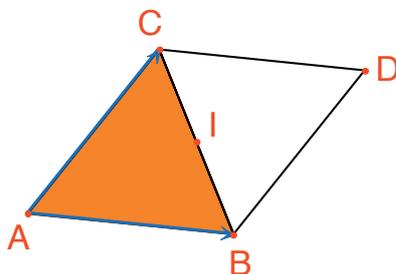


Figura 3.1 - Construímos o simétrico de um triângulo ABC em relação ao ponto médio de um de seus lados (aqui $[BC]$). Obtemos então um paralelogramo $ABDC$.

O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, e podemos utilizá-lo para pavimentar o plano. Construímos os dois vetores \vec{AB} e \vec{AC} , com a ferramenta [Linhas]Vetor , depois os utilizamos para duplicar os triângulos ABC e BCD por translação, com a ferramenta [Transformações]Translação .

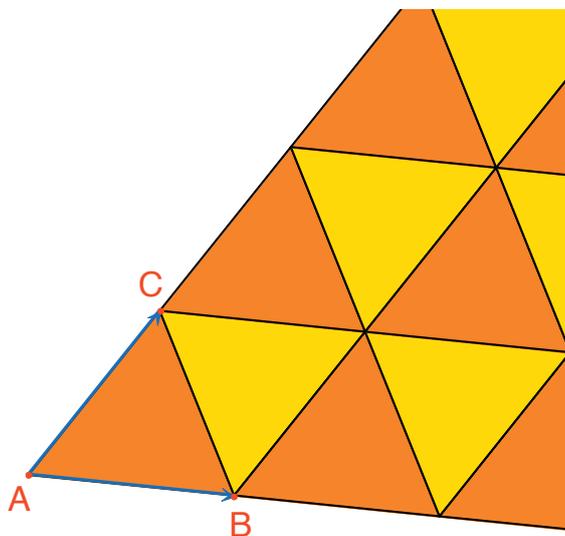


Figura 3.2 - Construção das imagens dos dois triângulos pelas translações de vetores \vec{AB} e \vec{AC} .

A mesma abordagem permite pavimentar o plano com um quadrilátero qualquer convexo ou não, mas não cruzado. Consideramos o simétrico do quadrilátero em relação ao ponto médio de um lado, e obtemos um hexágono com os lados paralelos dois a dois, que pavimenta o plano por translação.

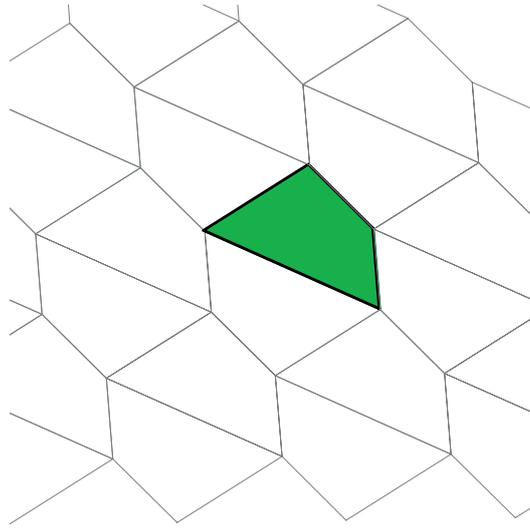


Figura 3.3 - O mesmo tipo de construção permite pavimentar o plano com um quadrilátero qualquer, eventualmente não convexo desde que não seja cruzado.

O caso dos outros polígonos convexos é bem mais complexo. A partir de 7 lados, podemos demonstrar que nenhum polígono convexo pode pavimentar o plano. Há 3 tipos de hexágonos convexos que pavimentam o plano, e pelo menos 14 tipos de pentágonos convexos pavimentando o plano, cada tipo sendo definido por um conjunto de restrições sobre os ângulos e os comprimentos dos lados. No caso dos pentágonos, não se sabe até o momento se os 14 tipos conhecidos fornecem todas as soluções ao problema. O último tipo conhecido foi descoberto em 1985. Pelo que sabemos, a questão dos polígonos não convexos também não está resolvida.

Exercício 5 - Construir um pentágono convexo $ABCDE$ verificando as seguintes restrições: o ângulo A é $\hat{A} = 60^\circ$, o ângulo em C é $\hat{C} = 120^\circ$, $AB = AE$, $CB = CD$. Estas restrições não determinam um único pentágono, mas uma família de pentágonos. O número de pontos livres da construção será então de pelo menos três.

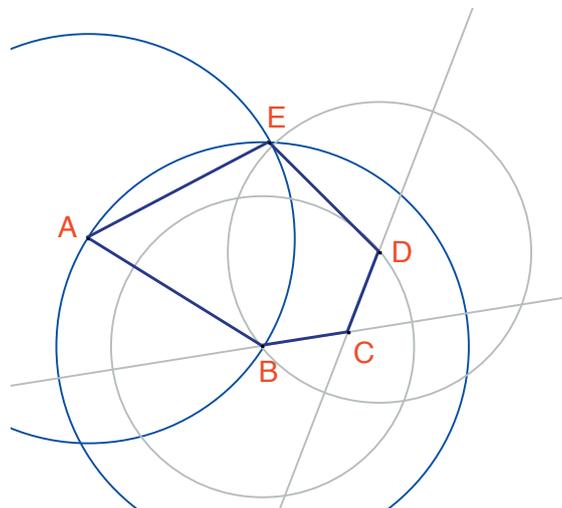


Figura 3.4 - Construção de um pentágono verificando as restrições $\hat{A}=60^\circ$, $\hat{C}=120^\circ$, $AB=AE$ e $CB=CD$. Os pontos A , B , e C são livres no plano.

Por rotações sucessivas de centro A e de ângulo 60° (ferramenta [Transformações] Rotação  aguardando o objeto a transformar, um ângulo e um centro) construir uma «flor» de 6 pentágonos. O ângulo é um número digitado na folha com a ferramenta [Texto e Símbolos] Número  2.1).

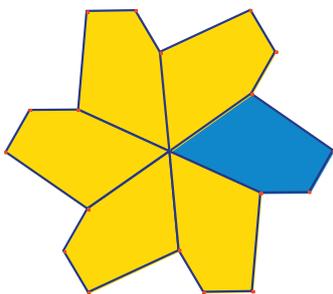


Figura 3.5 - O pentágono de base é reproduzido pela rotação de centro A e de ângulo 60° , para formar uma «flor» de seis pétalas.

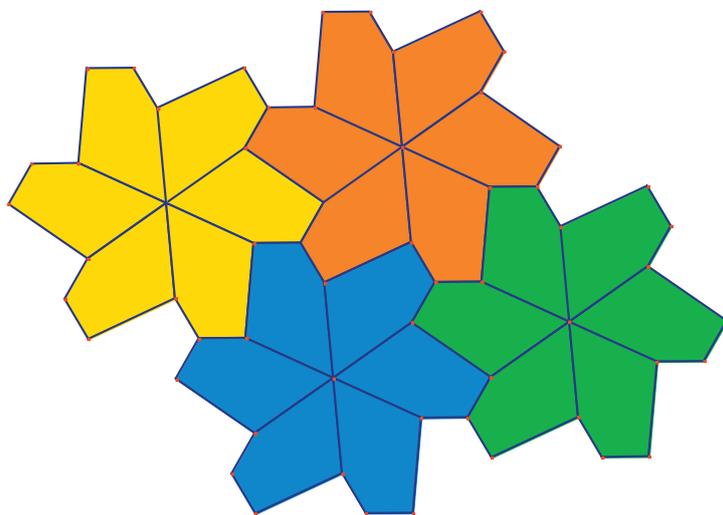


Figura 3.6 - As flores são reunidas por translação para cobrir o plano.

Exercício 6 - Construir um pentágono $ABCDE$ verificando as restrições $\hat{E} = 90^\circ$, $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$, $2\hat{B} - \hat{D} = 180^\circ$, $\hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$, $EA = ED = AB + CD$.

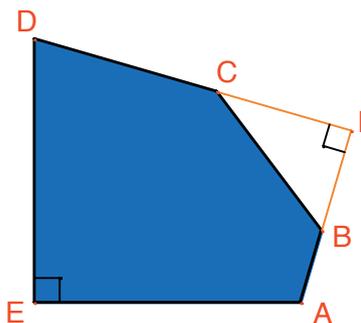


Figura 3.7 - Pentágono do tipo 10 segundo a classificação de Tilings e Patterns. Este pentágono serve de base a uma pavimentação monoedra do plano. Os pontos E e A são livres no plano e o ponto I é livre sobre um arco de circunferência.

A pavimentação é realizada fazendo inicialmente três cópias do ladrilho por rotações sucessivas de 90° ao redor de E , para obter um quadrado truncado. Em seguida estes quadrados são anexados em fitas por translação numa direção. As fitas de quadrados são separadas por fitas de pentágonos, como na figura abaixo.

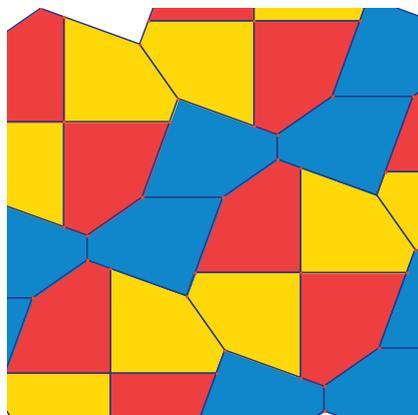


Figura 3.8 - Pavimentação monoedral por pentágonos convexos. Esta pavimentação é devida a Richard E. James III, depois da publicação de um artigo de Martin Gardner em *Scientific American* em 1975. Podemos encontrar este artigo completado no *Time travel and other mathematical bewilderments*, Martin Gardner, *Freeman* 1987.