CABRI™ II PLUS

Ferramentas Matemáticas Inovadoras

MANUAL DO UTILIZADOR

BEM-VINDO !

Bem-vindo ao mundo interactivo do Cabri™!

O Cabri foi inicialmente concebido no laboratório de investigação IMAG, uma parceria entre a CNRS (Centro Nacional de Pesquisa Científica) e a Universidade Joseph Fourier, em Grenoble, França. Jean-Marie LABORDE, o pai do Cabri, começou o projecto em 1985 de forma a tornar mais fácil o ensino da geometria.

Hoje em dia mais de 15 milhões de utilizadores trabalham com o Cabri em computadores e em calculadoras gráficas Texas Instruments.

A construção de objectos geométricos no computador oferece uma nova dimensão, comparada com a realização de exercícios usando os métodos tradicionais com lápis, papel, régua e compasso! O Cabri II Plus oferece um vasto leque de funcionalidades poderosas e fáceis de utilizar. Pode desenhar e manipular figuras no plano e no espaço, das mais simples às mais complexas. Manipule livremente as figuras em qualquer altura para testar a construção, fazer conjecturas, medir ou remover objectos, efectuar cálculos, fazer alterações ou começar tudo de novo. O Cabri II Plus é uma ferramenta de tecnologia de ponta concebida para professores bem como para estudantes de todos os níveis, do ensino básico à universidade.

Algumas funcionalidades do programa são específicas da versão Macintosh/Windows: as teclas `Ctrl` e `Alt` em Windows correspondem aos comandos `Option` e `Alt` no Macintosh; um clique com o botão direito em Windows corresponde a `Ctrl`+clique no Mac.

• **Interface**: Novo, maior, com ícones fáceis de ler. Os menus "pop-up" são mais intuitivos para resolver selecções ambíguas. Altere os atributos de um objecto com apenas alguns cliques.

• **Etiquetas**: Agora pode atribuir nomes a todos os objectos geométricos e colocar as etiquetas em qualquer ponto na vizinhança do objecto.

• **Expressões:** Defina expressões com uma ou mais variáveis e avalie-as dinamicamente.

• **Gráficos imediatos:** Pode desenhar e analisar gráficos de uma ou mais funções facilmente e a manipulação directa permite-lhe explorar a função resultante em relação aos seus parâmetros.

• **Lugares geométricos:** Mostre o lugar geométrico de pontos ou objectos, lugares geométricos de lugares geométricos e intersecções com lugares geométricos. Pode também apresentar as equações de curvas algébricas desenhadas com a ferramenta Lugar geométrico.

• **Rectas inteligentes:** Apenas a porção « útil » de uma recta é desenhada. Pode alterar o comprimento dessa porção com a frequência que desejar.

• **Cores:** Escolha as cores do texto ou dos objectos assim como a cor de preenchimento a partir da nova paleta de cores extendida, ou use a nova funcionalidade cor dinâmica.

• **Imagens (Mapa de Bits, JPEG, GIF):** Junte quaisquer imagens aos objectos da figura (pontos, segmentos de recta, polígonos, fundo). As imagens serão actualizadas durante as animações e quando a figura é manipulada.

• **Texto:** Edite o estilo, tipo de letra e os atributos de caracteres individuais.

• **Janela de descrição da figura:** Agora pode abrir uma janela com todas as etapas seguidas na construção da figura.

• **Guardar uma sessão:** Guarda uma sessão à medida que usa o programa. Apresente-a posteriormente no écran ou imprima-a para monitorizar o progresso dos seus alunos e identificar claramente quaisquer dificuldades que estejam a sentir.

• **Importe/Exporte figuras:** As figuras podem ser transferidas entre o seu computador e o Cabri Junior nas calculadoras gráficas TI (TI-83 Plus e TI-84 Plus).

Todas estas funções únicas podem acrescentar novas dimensões à experiência de aprendizagem dos seus alunos.

Este manual contém duas secções:

A primeira parte, [1] INICIAÇÃO, foi escrita a pensar nos novos utilizadores do Cabri. Permite-lhes a familiarização com o interface do Cabri, e fornece as indicações base sobre a utilização do rato. Contudo, a experiência mostra que as pessoas aprendem a utilizar o Cabri muito rapidamente e que, na sala de aulas, os estudantes começam a « fazer » geometria em apenas meia hora após começar a utilizar o software.

A segunda parte, [2] DESCOBERTA, foi concebida para novos utilizadores e sugere actividades ao nível do ensino secundário para descobrir o mundo da geometria interactiva.

O documento INFORMAÇÃO DE REFERÊNCIA.pdf é o guia completo de referência do programa.

O ficheiro TUTORIAL AVANÇADO.pdf sugere mais actividades para alunos do ensino secundário e universitário. As actividades destes documentos são, em grande medida, independentes umas das outras. Sugere-se que o leitor siga os métodos de construção indicados com todo o detalhe e depois tente os exercícios.

No seguimento do texto o Cabri II Plus será referido somente por Cabri .

Visite o nosso site em *www.cabri.com* para obter actualizações do manual e do programa, bem como notícias sobre o produto. Lá irá encontrar também dezenas de ligações para páginas Internet e informações sobre livros de geometria e sobre o Cabri.

A equipa Cabrilog deseja-lhe muitas horas fascinantes de construção, exploração e descoberta.

Manual do utilizador do Cabri II Plus:
Autores: Sandra Hoath and Chartwell Yorke
Versão Portuguesa: Nelson Sousa
Última actualização: 30 de Julho de 2007
Actualizações: *www.cabri.com*
Para comunicar erros: *support@cabri.com*
Design gráfico, paginação e revisão: Cabrilog

CONTEÚDO

CHAPTER 1

INTRODUÇÃO

1.1 FILOSOFIA

O Cabri foi concebido para providencial o máximo nível de interacção (rato, teclado, etc.) entre o utilizador e o software e, em cada situação, fazer o que o utilizador espera : por um lado respeitar os padrões da indústria e por outro lado seguir o comportamento matemático mais plausível.

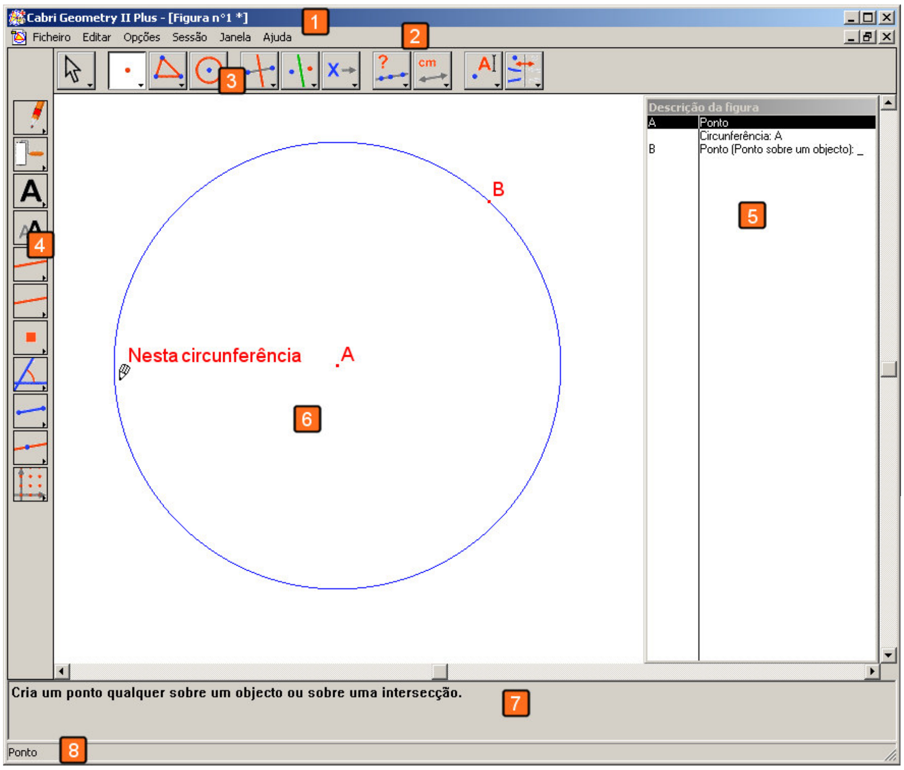
Um ***documento*** do Cabri consiste numa ***figura*** que pode ser desenhada livremente em qualquer ponto de uma folha de papel virtual com 1 metro quadrado. A figura é construída usando objectos matemáticos padrão (pontos, rectas, circunferências, etc.) e outros objectos (números, texto, fórmulas, etc.).

Um documento pode também conter ***macros de construção***, que permitem memorizar e repetir construções intermédias, expandindo assim as capacidades do programa.

Com o Cabri pode abrir vários documentos simultaneamente e copiar, cortar e colar entre eles.

1.2 INTERFACE

A figura da página seguinte mostra a janela principal do Cabri e as suas várias zonas. Quando o Cabri é executado a barra de ferramentas Atributos, a janela de Ajuda e a Descrição da Figura não são mostradas.



1. Barra de título
2. Barra de menu
3. Barra de ferramentas
4. Barra de atributos
5. Janela de descrição da figura
6. Área de desenho
7. Janela de ajuda
8. Barra de estado

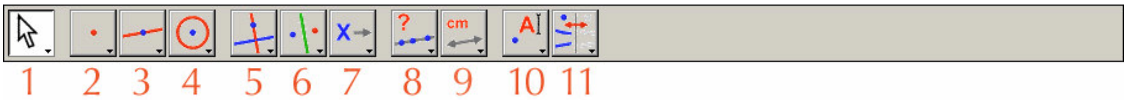
A ***barra de título*** mostra no nome da figura (se já tiver sido guardada antes ou Figura #1,2... se a figura ainda não tiver sido guardada.

A ***barra de*** menu permite ao utilizador manipular documentos, gerir sessões e controlar as definições e comportamento do programa.

Ao longo deste manual todos os comandos serão descritos da seguinte forma : o Item do menu Menu será escrito usando a formação [Menu]Item. Por exemplo, [Ficheiro]Guardar Como... quer dizer o item Guardar Como... do menu Ficheiro.

A ***barra de ferramentas*** mostra as ferramentas que podem ser usadas para criar e modificar uma figura. Consiste de várias caixas de ferramentas, cada uma delas apresentando um ícone de uma ferramenta. Clicando e mantendo premido o botão do rato sobre uma caixa de ferramentas permite abrir a caixa de ferramentas como um menu. Arraste o rato para outra ferramenta para a seleccionar ; é posteriormente apresentada como o ícone da caixa de ferramentas respectiva.

Pode alterar a ***barra de ferramentas***, ou bloqueá-la numa configuração fixa para utilização na aula. Veja o capítulo [8] PREFERÊNCIAS E CUSTOMIZAÇÃO no ficheiro INFORMAÇÕES DE REFERÊNCIA.pdf.



1. Manipulação
2. Pontos
3. Linhas
4. Curvas
5. Construções
6. Transformações
7. Macros
8. Propriedades
9. Medidas
10. Texto e símbolos
11. Atributos

Ao longo deste manual, uma Ferramenta de uma Caixa de Ferramentas é descrita como [Caixa de Ferramentas]Ferramenta e o correspondente ícone é apresentado na margem do texto. Por exemplo, [Linhas]Semi-recta representa a ferramenta Semi-recta da caixa de ferramentas Linhas. (Alguns nomes, demasiado longos para caber na margem foram abreviados).

Os ícones da barra de ferramentas podem ser apresentados em tamanho grande ou pequeno. Para alterar o tamanho dos ícones, mova o cursor para um ponto à direita do último ícone e clique com o botão direito do rato (`Ctrl`-clique no Macintosh) e escolha Ícones pequenos.

A ***barra de estado*** indica-lhe qual a ferramenta activa.

A ***barra de atributos*** permite-lhe alterar os atributos de vários objectos : cor, estilo, tamanho... Use o comando [Opções]Mostrar atributos para mostrar a barra de atributos e o comando [Opções]Esconder atributos para a ocultar. Alternativamente pode usar a tecla `F9` em Windows, `Command-F9` em Macintosh.

A ***janela de ajuda*** fornece uma descriçao resumida da ferramenta activa. Mostra quais são os « objectos requeridos » pela ferramenta e o que será construído. Prima `F1` para mostrar/esconder a janela de ajuda.

A janela da ***descrição da figura*** contém uma descrição em texto da figura. Lista todos os objectos construídos e quais os métodos utilizados. Para abrir esta janela use o comando [Opções]Mostrar a descrição e [Opções]Esconder a descrição para a ocultar. Alternativamente pode premir a tecla `F10` em Windows, `Command-F10` em Macintosh.

Finalmente, a ***área de desenho*** mostra parte da área total disponível. As construções geométricas são feitas nesta área.

1.3 USAR O RATO

A maioria das funções do programa são controladas pelo rato.

- mover o rato move o cursor
- premir um botão do rato
- libertar o botão

Quando o rato é usado para mover o cursor ao longo da área de desenho o Cabri informa-o antecipadamente qual será o resultado ao clicar ou ao ***arrastar*** de três formas :

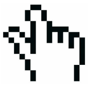
- o cursor muda de forma
- aparece uma mensagem de texto ao lado do cursor
- o objecto a ser construído é parcialmente mostrado

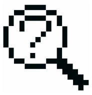
Dependendo da construção a mensagem e a parte do objecto pode ou não ser apresentados.

Veja a lista dos vários cursores:

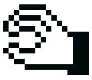
 Um objecto existente pode ser seleccionado.

 Um objecto existente pode ser seleccionado, movido, ou usado numa construção.

 Clicou sobre um objecto existente de modo a seleccioná-lo ou usá-lo numa construção.

 São possíveis diversas selecções de objectos sob o cursor.

Clique com este cursor para aparecer um menu com as possibilidades de objectos a seleccionar.

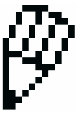
 Um objecto existente está a ser movido.

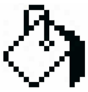
 O cursor está sobre uma zona não utilizada da folha e pode seleccionar uma área rectangular clicando e arrastando o rato.

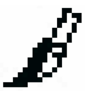
 Este cursor indica o modo panorâmico para deslocar a parte visível da folha. Para entrar neste modo prima e mantenha premida a tecla `Ctrl` em Windows (`Option` em Macintosh). Neste modo, arrastar com o rato desloca a folha na janela.

 A folha está a ser arrastada.

 Ao clicar irá criar um novo ponto independente na folha.

 Ao clicar irá criar um ponto que é móvel sobre um objecto ou na intersecção de dois objectos existentes.

 Ao clicar irá preencher o objecto sob o cursor com a cor actual.

 Ao clicar irá alterar o atriburo (tal como a cor, estilo ou espessura) do objecto sob o cursor.

1.4 PRIMEIRA CONSTRUÇÃO

Para ilustrar o que foi dito no capítulo [1] INTRODUÇÃO, vamos construir um quadrado, dada uma das diagonais. Quando inicia o Cabri uma página virtual nova, em branco, é criada e pode começar a construção imediatamente.

Construa um segmento que será a diagonal do quadrado. Escolha a ferramenta [Linhas]Segmento.

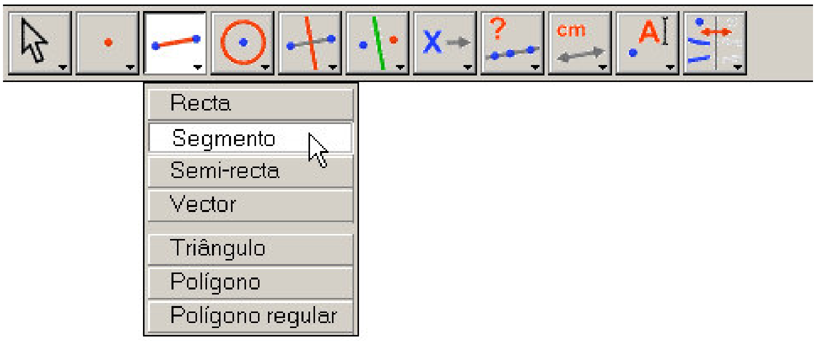


Figura 1.1 *– Escolher a ferramenta [Linhas]Segmento.*

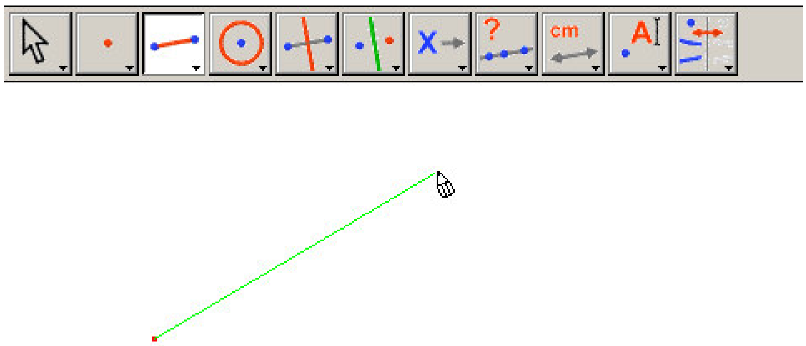


Figura 1.2 *– Construa o primeiro ponto. Uma pré-visualização do segmento final será criada automaticamente e move-se com o cursor até que o segundo ponto seja criado.*

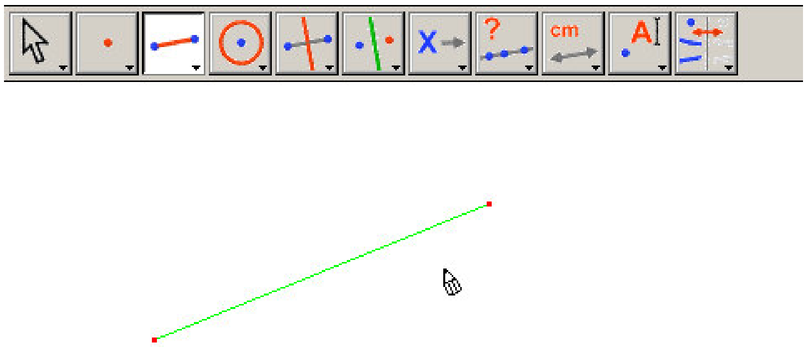
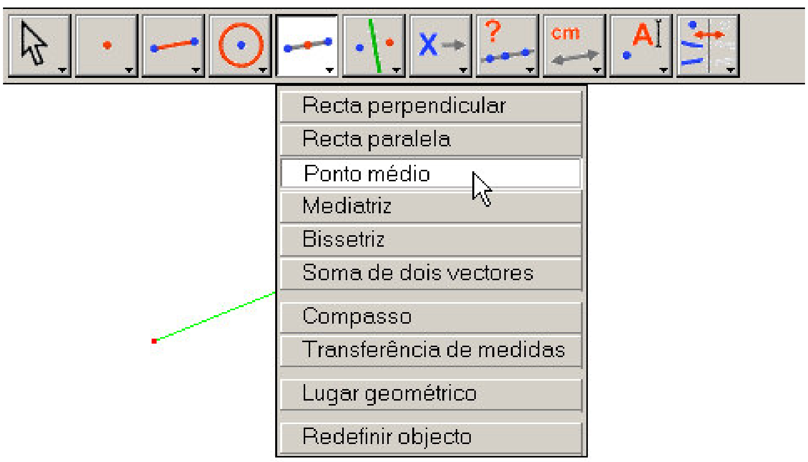


Figura 1.3 *– O segmento fica completo após criar o segundo ponto. A ferramenta [Linhas]Segmento permanece activa, pelo que pode construir outros segmentos.*

Desloque agora o cursor para a área de desenho : o cursor vai tomar a forma . Clique uma vez para criar o primeiro ponto. Prossiga movendo o cursor através da área de desenho. Um segmento de recta entre o pontos construído e o cursor será criado. Clique para criar o segundo ponto. O nosso desenho contém agora dois pontos e um segmento de recta.

Para construir um quadrado, construa primeiro a circunferência com este segmento como diâmetro. O centro da circunferência é o ponto médio do segmento. Para construir o ponto médio escolha a ferramenta [Construções]Ponto médio e coloque o cursor sobre o segmento. Irá aparecer uma mensagem Ponto médio deste segmento ao lado do cursor, que tem agora a forma . Clique para marcar o ponto médio do segmento.



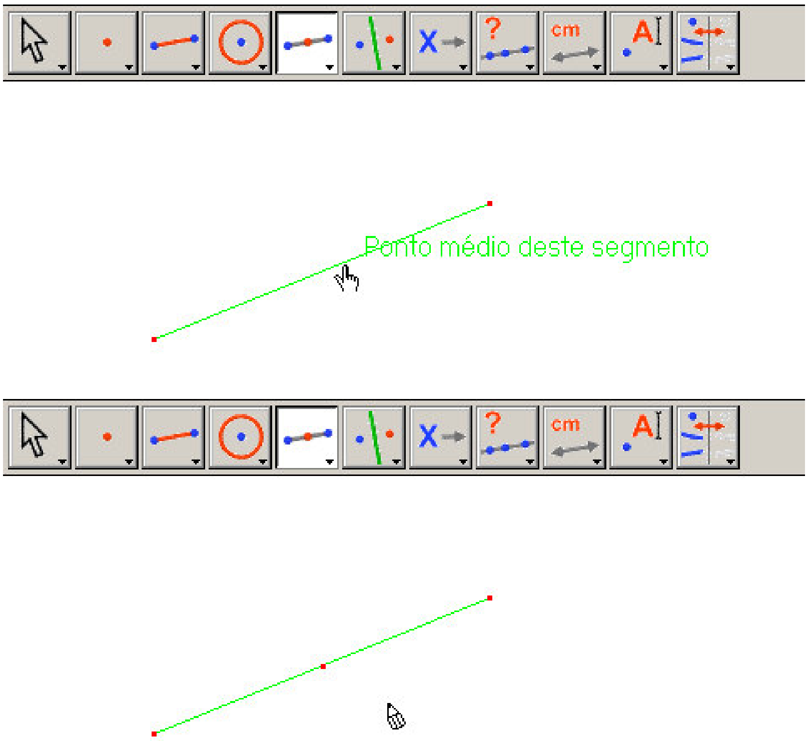
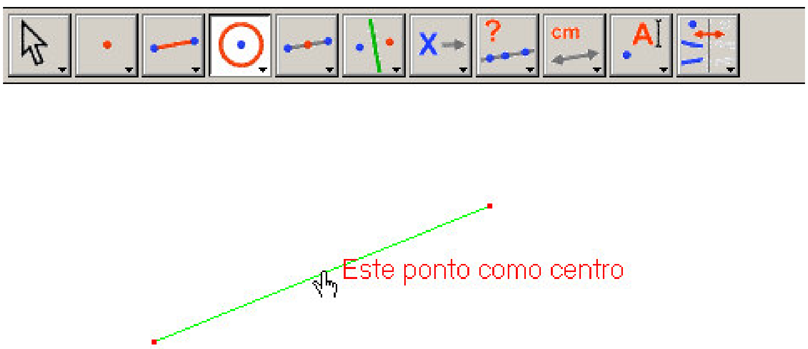


Figura 1.4 – *Construção do ponto médio de um segmento.*

Escolha a ferramenta [Curvas]Circunferência e mova o cursor até à vizinhança do ponto médio. Aparecerá uma mensagem Este ponto como centro, portanto clique para o seleccionar. À medida que desloca o cursor será apresentada uma circunferência. Mova o cursor até à vizinhança de um dos extremos do segmento de recta ; será mostrada a mensagem passando por este ponto. Para terminar a construção do círculo, clique nesse ponto.



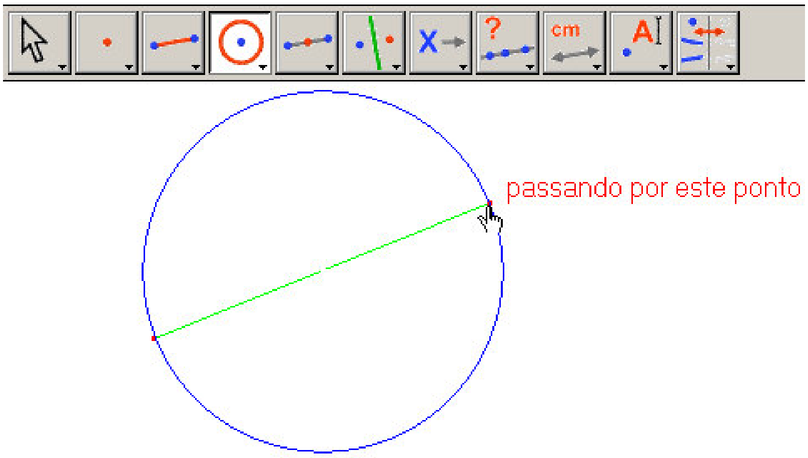


Figura 1.5 *– Construção de uma circunferência com um segmento dado como diâmetro.*

Escolha a ferramenta [Manipulação]Ponteiro para modificar a figura. Os únicos pontos que pode deslocar são os extremos do segmento de recta e o segmento de recta. Se colocar o cursor sobre qualquer um destes objectos a sua forma passa a ser e é apresentada uma mensagem Este ponto ou Este segmento. O ponto ou o segmento podem ser movidos arrastando-os com o rato e a figura será automaticamente actualizada : o segmento é redesenhado e o ponto médio e a circunferência serão alteradas em conformidade.

Para construir o quadrado, primeiro construa a outra diagonal, que é o diâmetro da circunferência perpendicular ao segmento original. Construa a mediatriz do segmento : a recta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio. Seleccione a ferramenta [Construções]Mediatriz e seleccione o segmento clicando sobre ele. O Cabri constrói a mediatriz.

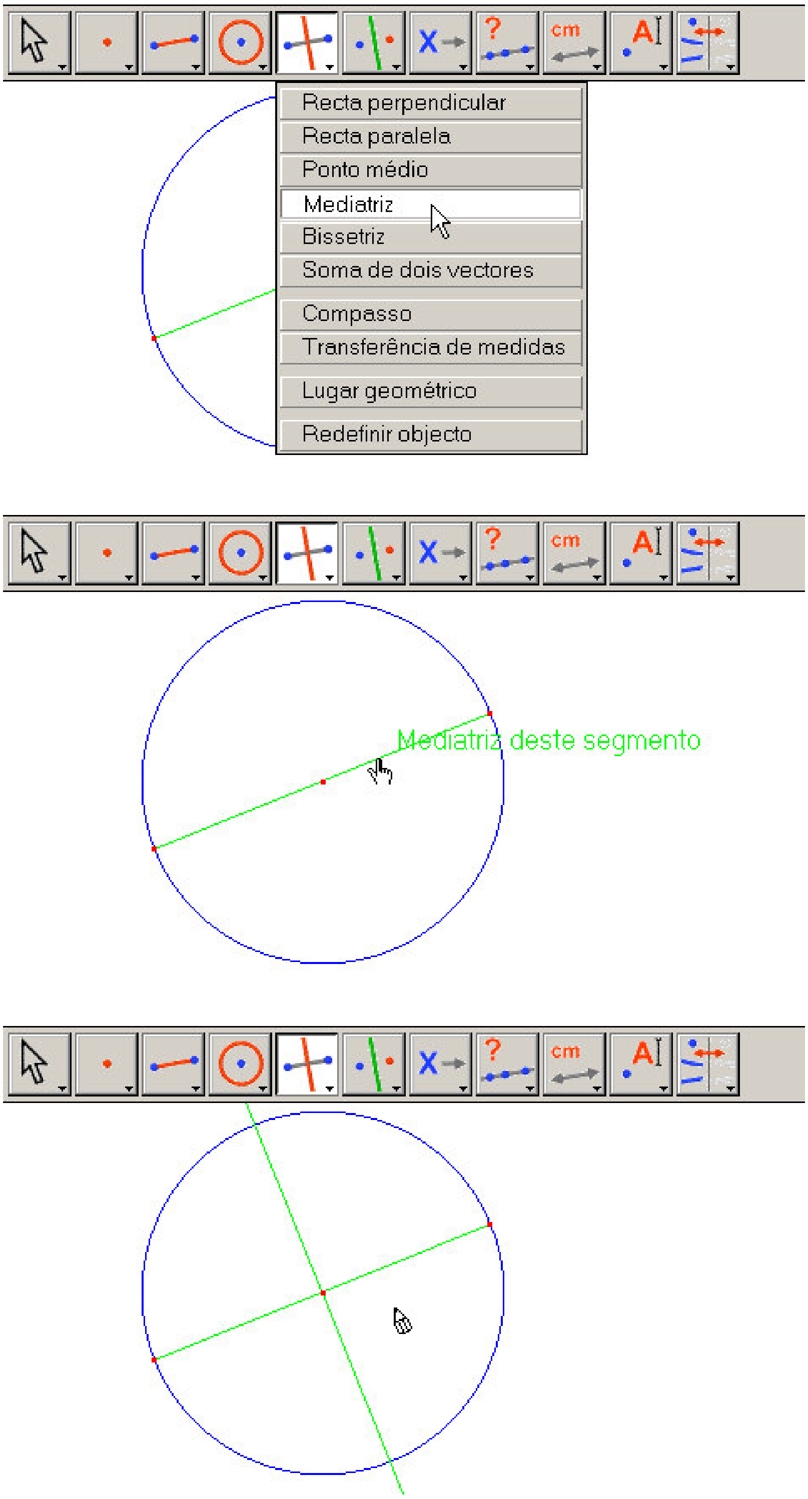
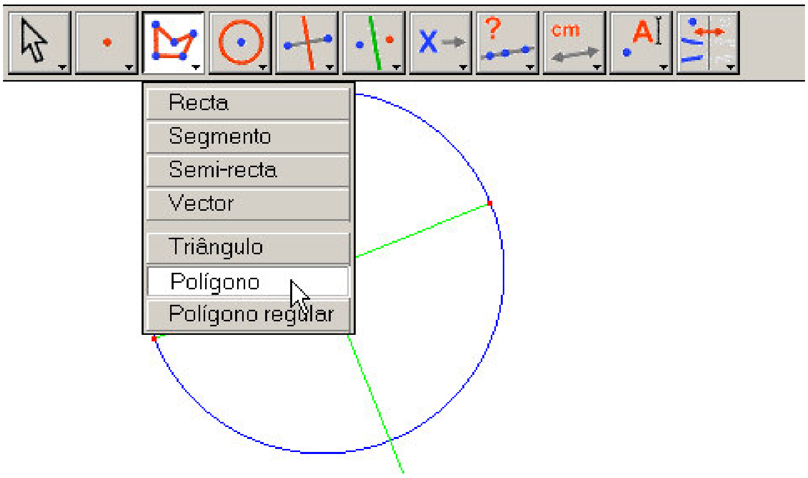
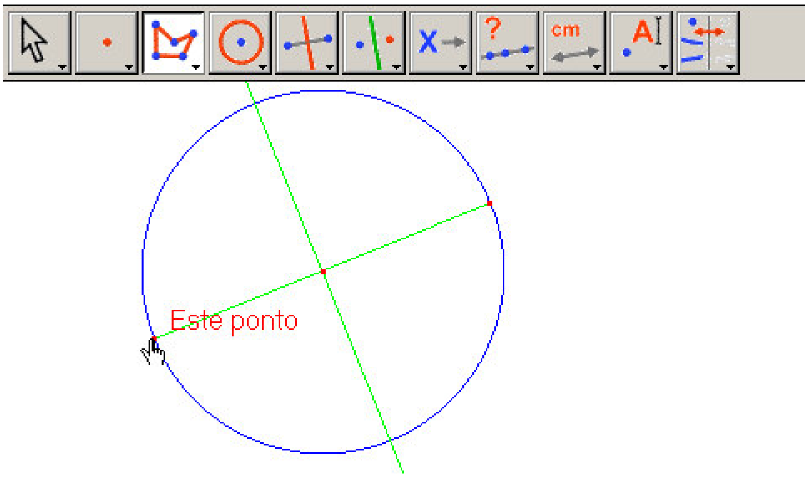


Figura 1.6 *– Construção da mediatriz do segmento para determinar a outra diagonal do quadrado.*

Para terminar a construção seleccione a ferramenta [Linhas]Polígono. Esta ferramenta espera que seleccione uma sucessão de pontos para determinar os vértices do polígono. Para terminar a sucessão seleccione o ponto inicial uma segunda vez ou faça duplo clique ao seleccionar o último ponto da sucessão. Os dois pontos de intersecção da mediatriz com a circunferência não são construídos : o Cabri permite que sejam construídos implicitamente quando forem necessários.





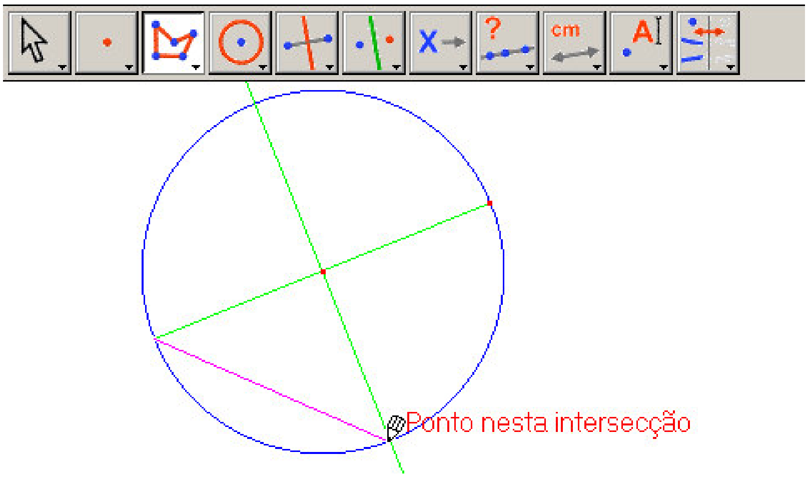


***Figura 1.7** – Construção de um quadrado usando a construção implícita dos pontos de intersecção da mediatriz com a circunferência.*

Por outras palavras, seleccione um dos extremos do segmento como primeiro vértice do polígono, depois mova o cursor até um dos pontos de intersecção da circunferência com a mediatriz.

Será apresentada a mensagem Ponto nesta intersecção para indicar que ao clicar com o rato irá construir o ponto de intersecção e ao mesmo tempo seleccioná-lo como vértice do polígono. Clique nesta posição para criar esse ponto, de seguida seleccione o outro extremo do segmento de recta e depois o outro ponto de intersecção da mediatriz com a circunferência. Finalmente, seleccione o ponto inicial (ou faça duplo clique sobre o último ponto do polígono).

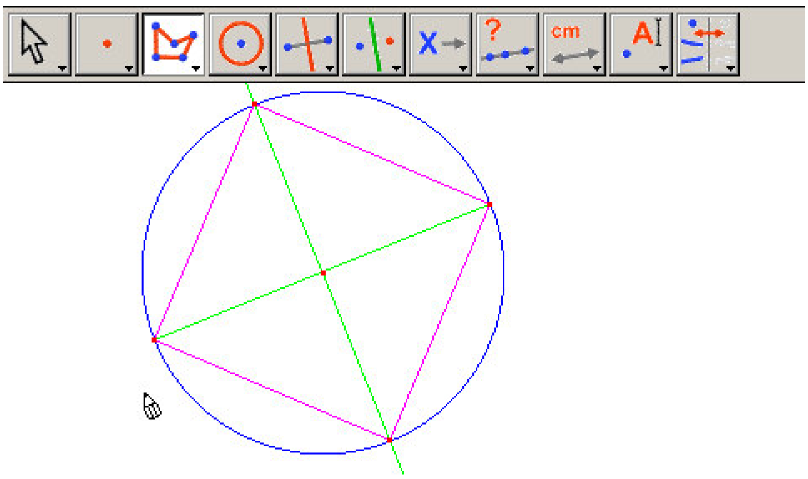


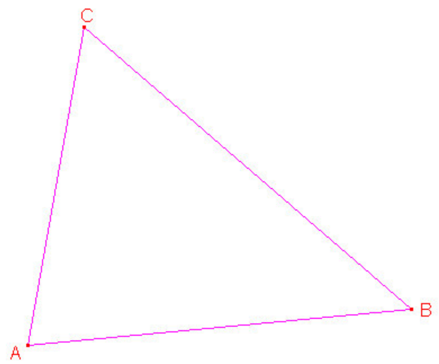
***Figura 1.8** – A sua primeira construção com o Cabri .*

A RECTA DE EULER

Neste capítulo vamos construir um triângulo genérico ABC e as suas três medianas. As medianas são as rectas que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto. De seguida construimos as três alturas : rectas que passam por cada vértice perpendiculares ao lado oposto. Finalmente, construimos as três mediatrizes dos lados do triângulo : as rectas perpendiculares aos segmentos que passam pelo seu ponto médio. É um facto bem conhecido que as três alturas são concorrentes, bem como as três medianas e as três mediatrizes, e que estes pontos de intersecção são colineares. A recta que passa por estes pontos chama-se recta de *Euler*[1] do triângulo.

Para construir um triângulo escolha a ferramenta [Linhas]Triângulo. Para informações sobre a utilização da barra de ferramentas consulte o capítulo **[1] INTRODUÇÃO** na secção anterior.

Após activar a ferramenta [Linhas]Triângulo clique numa área vazia para criar três pontos na área de desenho. Pode atribuir nomes a estes pontos imediatamente após a sua criação, simplesmente escrevendo o nome pretendido no teclado. Após construir o triângulo pode mover as etiquetas com os nomes em torno dos pontos para os colocar no exterior do triângulo, por exemplo.



[1]Léonard Euler, 1707-1783

Figura 2.1 *– O triângulo ABC é construído usando a ferramenta [Linhas]Triângulo. São dados nomes aos vértices imediatamente, carregando na tecla respectiva ao criá-los.*

Para mover a etiqueta com o nome de um objecto use a ferramenta [Manipulação]Ponteiro. Arraste o nome colocando o cursor sobre ele até aparecer a mensagem Esta etiqueta. Depois prima e mantenha premido o botão do rato enquanto e arraste o nome para a posição desejada. Para alterar o nome de um objecto escolha a ferramenta [Texto e símbolos]Etiqueta e seleccione a etiqueta; é mostrada uma janela de edição.

Use a ferramenta [Construções]Ponto médio para construir os pontos médios. Para construir o ponto médio do segmento AB seleccione o ponto A e depois B.

Outra forma de construir o ponto médio de um segmento é seleccionar o segmento. Pode atribuir um nome ao ponto médio, por exemplo, C′. Construa os pontos médios dos outros dois segmentos e dê-lhes nomes da mesma forma : A′ em BC e B′ em CA.

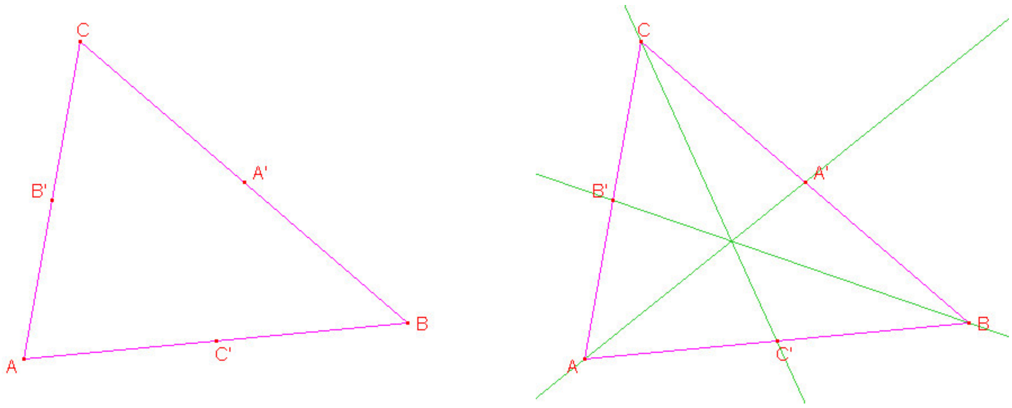


Figura 2.2 – *[Esquerda]. Para construir os pontos médios use a ferramenta [Construções]Ponto médio que aceita como argumentos dois pontos, um segmento ou o lado de um polígono.*
[Direita] Para construir as medianas use a ferramenta [Linhas]Recta e para alterar a sua cor use a ferramenta [Atributos]Cor.

A ferramenta [Manipulação]Ponteiro permite-lhe mover livremente os objectos independentes, móveis, numa construção. Neste caso, os pontos A, B e C são independentes. A construção é automaticamente actualizada quando move um destes pontos. Assim pode experimentar diferentes configurações da construção. Para ver quais são os objectos móveis numa figura escolha a ferramenta [Manipulação]Ponteiro e mantenha o botão do rato premido num ponto vazio da área de desenho. Após algum tempo os objectos móveis ficam a piscar. Use a ferramenta [Linhas]Recta para construir as três medianas. Para construir a recta AA′ seleccione A e depois A′.

Com a ferramenta [Atributos]Cor... altere a cor da recta. Seleccione uma das cores da paleta clicando na cor desejada e depois no objecto que pretende colorir.

Seleccione a ferramenta [Pontos]Ponto e desloque o cursor para a proximidade do ponto de intersecção das medianas. O Cabri tenta determinar o ponto de intersecção de duas rectas, mas como há uma ambiguidade na escolha (há três rectas concorrentes num ponto), aparece um menu para que seleccione quais as rectas cujo ponto de intersecção pretende construir. Ao deslocar o rato pelas várias opções disponíveis o objecto respectivo é realçado. Chame G ao ponto de intersecção das medianas.

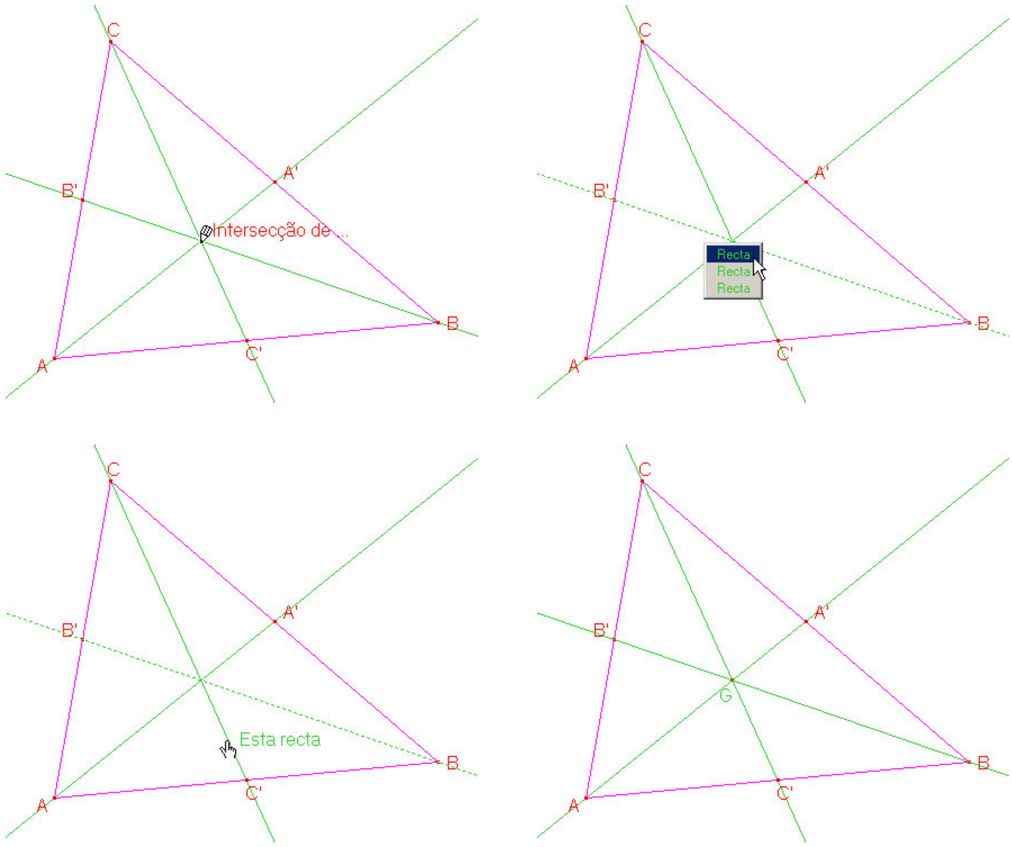


Figura 2.3 *– Construção do ponto de intersecção das medianas e resolução da ambiguidade de selecção.*

Use a ferramenta [Construções]Recta perpendicular para construir as três alturas do triângulo. Esta ferramenta cria a única recta perpendicular a uma dada direcção passando por um ponto dado. Portanto, seleccione um ponto e : uma recta, um segmento, uma semi-recta, etc. A ordem da selecção é irrelevante. Para construir a altura que passa por A seleccione o ponto A e depois o lado BC. Use o mesmo método de construção para as alturas a partir de B e de C. Tal como para as medianas, escolha uma cor diferente para as alturas e construa o seu ponto de interseçcão, H.

Use a ferramenta [Construções]Mediatriz para construir a recta perpendicular a um segmento. Seleccione o segmento ou os seus extremos. Designe por O o ponto de intersecção das três mediatrizes.

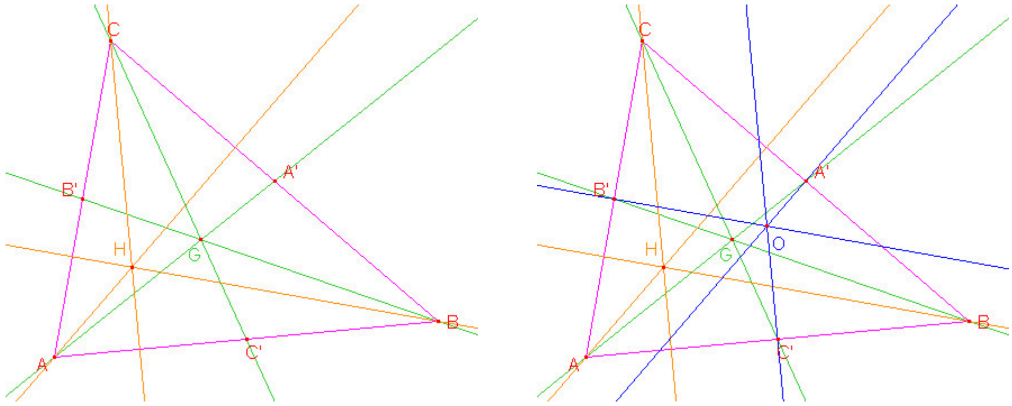


Figura 2.4 – *[Esquerda]. Construçao das alturas usando a ferramenta [Construções]Recta perpendicular.*
[Direita]. Construção das mediatrizes usando a ferramenta [Construções]Mediatriz.

Pode usar a ferramenta [Propriedades]Colinear ? para verificar se estes pontos, O, H e G, são colineares. Seleccionando sucessivamente estes três pondot e depois clicando em qualquer ponto da área de desenho, o Cabri irá indicar que os pontos são colineares.

Se deslocar pontos independentes da figura, este texto será actualizado, tal como os restantes elementos da construção.

Para construir a recta de Euler do triângulo, passando pelos pontos O, H e G, use a ferramenta [Linhas]Recta e seleccione, por exemplo, O e H. Use a ferramenta [Atributos]Espessura... para destacar esta recta.

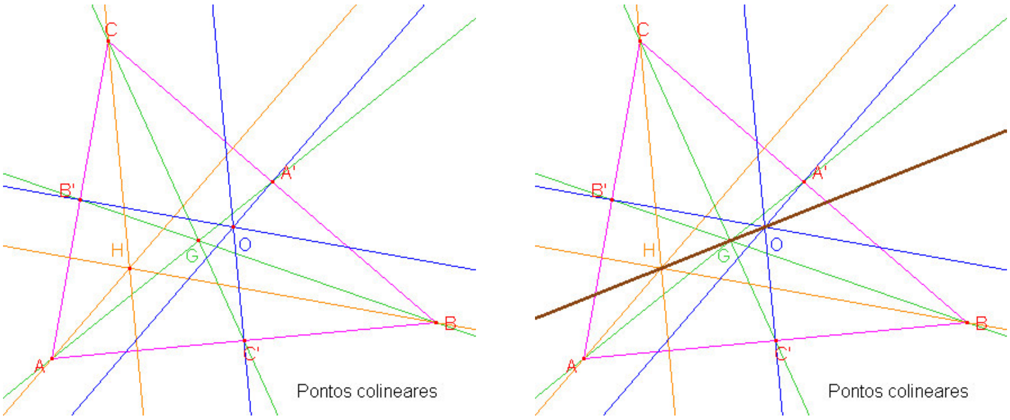


Figura 2.5 - *[Esquerda] A colinearidade é verificada para os três pontos G, H e O. A ferramenta [Propriedades]Colinear? cria uma mensagem de texto Pontos colineares ou Pontos não colineares.*
[Direita] A recta de Euler do triângulo, mostrada de forma clara aumentando a sua espessura com a ferramenta [Atributos]Espessura.

Se alterar a forma do triângulo, alterando a posição relativa dos seus vértices é visível que G está sempre entre O e H e que a sua posição relativa no segmento OH não é alterada. Podemos verificar esta propriedade medindo os comprimentos de GO e GH. Escolha a ferramenta [Medida]Distância ou comprimento. Esta ferramenta permite medir a distância entre dois pontos ou o comprimento de um segmento de recta, dependendo do objecto seleccionado. Seleccione G e depois O : é mostrada a distância entre os dois pontos, medida em centímetros. Faça o mesmo para os pontos G e H. Após feitas as medidas pode editar as mensagens de texto acrescentando GO= à frente do número, por exemplo.

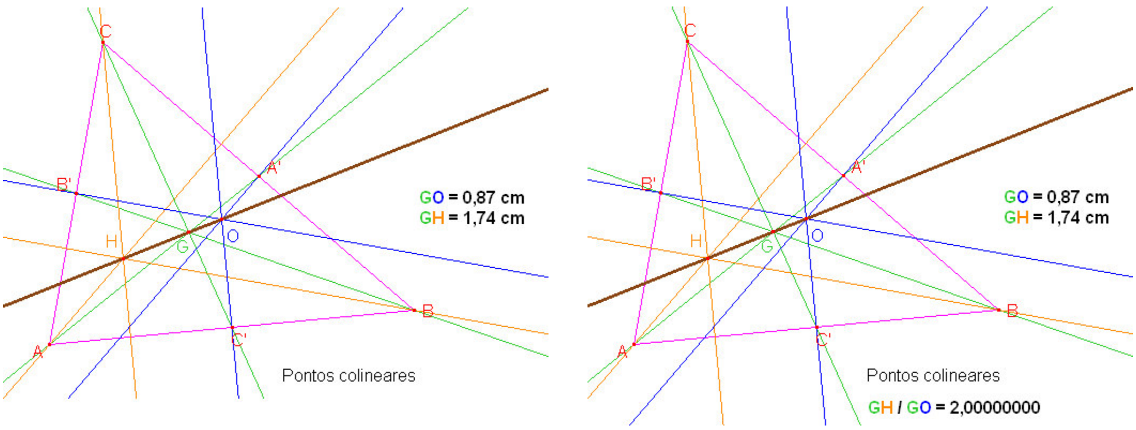


Figure 2.6 - *[Esquerda]. Usando a ferramenta [Medida]Distância ou*

comprimento para medir o comprimento dos segmentos GO e GH. [Direita]. Com a calculadora – [Medida]Calculadora – determine o quociente GH(GO e verifique que é sempre igual a 2.

Modificando a figura pode constatar que GH é sempre o dobro de GO. Para verificar esta propriedade use a ferramenta [Medida]Calculadora. Seleccione a mensagem de texto que indica o comprimento de GH, o operador / e finalmente a mensagem de texto que indica o comprimento de GO. Clique na tecla = da calculadora para obter o resultado que pode ser arrastado para qualquer ponto da área de desenho. Se seleccionar um número (com a ferramenta [Manipulação]Ponteiro) pode aumentar ou diminuir o número de casas decimais apresentadas usando as teclas + e - do teclado. Pode mostrar o resultado com 10 ou mais dígitos verificando que a razão entre os dois comprimentos é constante e igual a 2.

Exercício 1 - Construa a circunferência circunscrita ao triângulo, com centro em O, passando por A, B e C, usando a ferramenta [Curvas]Circunferência.

Exercício 2 - De seguida, construa a circunferência dos nove pontos do triângulo. Esta circunferência tem centro no ponto médio de OH e passa pelos pontos médios, A′, B′ e C′, pelos pés das três alturas e pelo ponto médio dos segmentos HA, HB e HC.

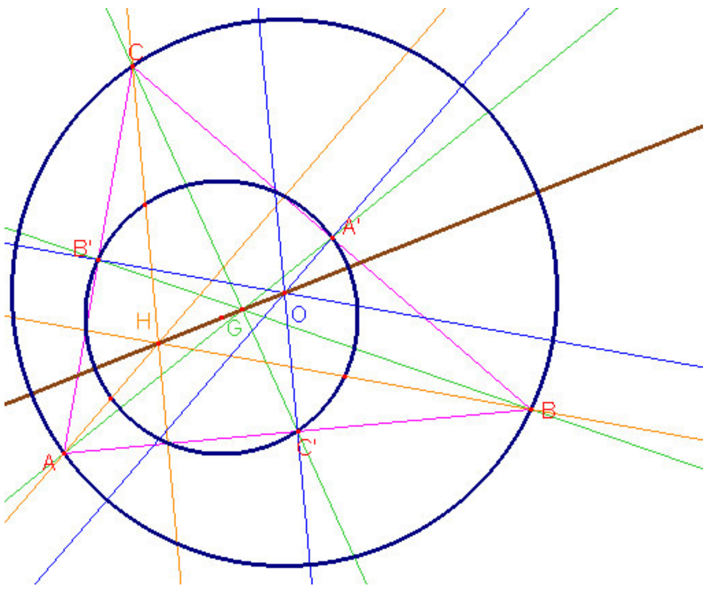


Figura 2.7 *- A construção final mostrando o triângulo, a sua circunferência circunscrita e a circunferência dos nove pontos.*

CAÇA AO PONTO MISTERIOSO

A actividade seguinte mostra várias formas de explorar construções geométricas com o Cabri. Tendo como ponto de partida três pontos, A, B e C, encontre um ponto M tal que a seguinte equação vectorial é verificada:

$$MA + MB + MC = 0$$

Em primeiro lugar construa quatro pontos em posições aleatórias usando a ferramenta [Pontos]Ponto e dê-lhes os nomes A, B, C e M.

O Cabri permite o uso de vectores. Cada vector é representado por um segmento de recta com uma seta. Construa o vector MA usando a ferramenta [Linhas]Vector seleccionando primeiro o ponto M e de seguida o ponto A. Este vector tem como origem o ponto M. Usando o mesmo método construa os vectores MB e MC.

De seguida construa o vector resultante MA + MB usando a ferramenta [Construções]Soma de dois vectores. Clique primeiro nos dois vectores e depois na origem do vector resultadnte, escolhendo M neste exemplo. Atribua à outra extremidade a letra N.

Finalmente, usando o mesmo método construa o vector soma dos três vectores, com origem em M. Some MN (que é igual a MA + MB) e MC. Designe a outra extremidade deste vector por P.

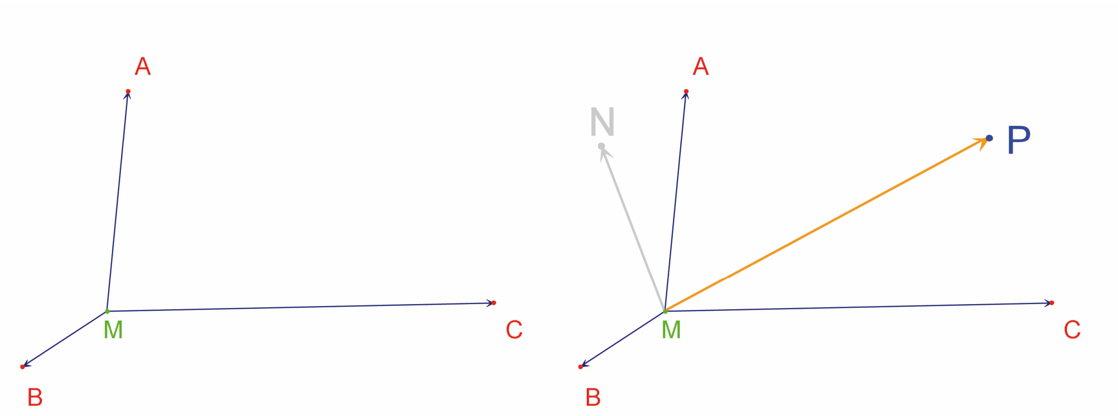


Figura 3.1 - *[Esquerda]. Começando com três pontos quaisquer: A, B e C e um quarto ponto, M, desenham-se os vectores MA, MB e MC. [Direita]. Os vectores MN = MA + MB e MP = MA + MB + MC são construídos usando a ferramenta [Construções]Soma de dois vectores.*

Procure a solução ao problema movendo o ponto M. Para o fazer escolha a ferramenta [Manipulação]Ponteiro e mova o ponto M livremente. O vector soma dos três vectores é actualizada continuamente à medida que desloca o ponto M. Pode observar que o comprimento e a direcção do vector MP dependem da posição de M relativamente aos três pontos A, B e C. Com base nestes factos podem observar-se as seguintes conjecturas :

- Existe uma única posição de M tal que o vector resultante da soma dos três vectores é nula. Este ponto está no interior do triângulo ABC.
- O quadrilátero MANB é um paralelogramo.
- O quadrilátero MCPN é um paralelogramo.
- Para que a resultante seja nula os vectores MN e MC têm de ter a mesma direcção e sentidos opostos.
- MP passa por um ponto fixo e esse ponto é a solução do problema.
- A posição do ponto P depende de M. Com base neste facto podemos definir uma transformação que liga P a M e a solução do problema é um ponto invariante desta transformação.

Suponhamos, por exemplo, que verificámos que MN e MC têm de ter direcções opostas. Surge outra questão: para que posições de M é que estes vectores são colineares? Desloque M de modo a que os dois vectores sejam colineares. Observe que M tem de se deslocar segundo uma recta e que esta passa pelo ponto C e pelo ponto médio de AB. A recta é portanto a mediana do triângulo ABC que passa por C. Uma vez que M tem a mesma dependência de A, de B e de C, M tem também de pertencer às outras duas medianas do triângulo. O ponto pretendido é portanto o ponto de intersecção das medianas do triângulo.

Como actividade para a aula os estudantes podem continuar a desenvolver a construção do ponto solução e provar assim a conjectura que foi elaborada durante a investigação.

Uma construção dinâmica é muito mais convincente que uma figura estática desenhada em papel. De facto, por manipulação da figura pode verificar-se a conjectura em muitos casos diferentes. Uma conjectura que permanece válida após manipulação será correcta na grande maioria dos casos.

Na aula, coloque as seguintes questões (entre outras) aos estudantes:

- Será que uma figura dinâmica e visualmente correcta é correcta ?
- É a construção dinamicamente correcta a solução do problema?
- Quando pode um argumento matemático ser considerado uma prova?
- O que falta a uma construção dinâmica para ser considerada prova?
- Deve a prova ser inspirada no procedimento usado para a construção?

Exercício 3 - Extenda o problema para quatro pontos, encontrando os pontos M tais que MA + MB + MC + MD = 0

Exercício 4* - Faça uma lista com todos os « caminhos de investigação » e demonstrações necessárias para o problema inicial (com três pontos) acessíveis para um aluno do 12º ano.

Exercício 5* - Investigue e construa os pontos M que minimizam a soma das distâncias a três pontos: MA + MB + MC. A solução é o ponto de *Fermat*[1] do triângulo ABC.

[1]*Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

O QUADRILÁTERO DE VARIGNON

A actividade seguinte mostra algumas construções baseadas no Teorema de *Varignon*[1].

Primeiro, construa um quadrilátero qualquer, ABCD. Escolha a ferramenta [Linhas]Polígono, seleccione quatro pontos e designe-os A, B, C e D respectivamente. Para terminar a construção seleccione novamente o ponto A depois de construir D.

De seguida construa os pontos médios: P, Q, R e S os pontos médios de AB, BC, CD e DA respectivamente, usando a ferramenta [Construções]Ponto médio.

Finalmente, construa o quadrilátero PQRS com a ferramenta [Linhas]Polígono.

Modificando a figura com a ferramenta [Manipulações]Ponteiro, pode ver que o quadrilátero PQRS parece ser um paralelogramo. Podemos verificar se os segmentos [PQ] e [RS] são paralelos e depois fazer o mesmo para os segmentos [PS] e [QR] com a ferramenta [Propriedades]Paralelo?. Para o fazer, seleccione primeiro o segmento [PQ] e depois [RS]: aparece uma mensagem de texto confirmando que os dois lados são de facto paralelos. Use o mesmo procedimento para verificar que [PS] e [QR] são paralelos .

[1]*Pierre Varignon, 1654-1722*

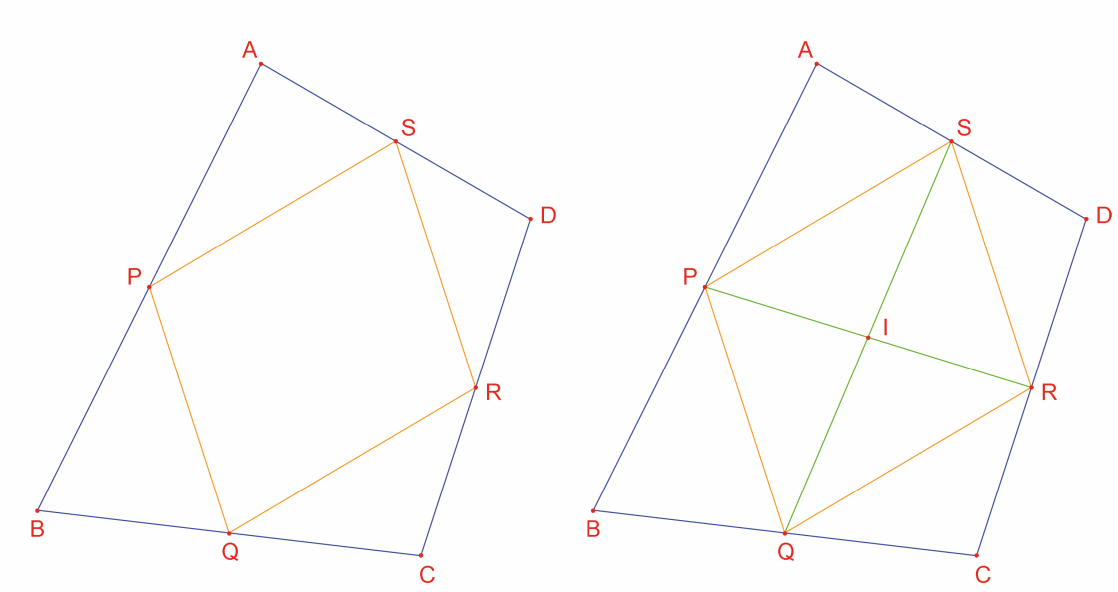


Figure 4.1 - *[Esquerda]. Tendo como ponto de partida um quadrilátero qualquer ABCD, construa o quadrilátero PQRS com vértices nos pontos médios de ABCD.*
[Direita]. Construção das diagonais de PQRS e demonstração que se bissectam.

Agora construímos as diagonais [PR] e [QS] usando a ferramenta [Linhas]Segmento e o seu ponto de intersecção, I, com a ferramenta [Pontos]Ponto. Há várias formas de demonstrar que I é o ponto médio de [PR] e de [QS], e que, portanto, PRQS é um paralelogramo. Por exemplo, pode usar o conceito de centro de massa: P pode ser visto como o centro de massa do sistema constituido por duas massas iguais em A e B, {(A,1),(B,1)}. Analogamente, R é o centro de massa do sistema {(C,1),(D,1)}, constituido por duas massas iguais em C e D. Como tal, o centro de massa do sistema {(A,1), (B,1),(C,1),(D,1)} é o ponto médio de PR. Analogamente, o ponto médio de QS é o mesmo centro de massa. Portanto os pontos médios coincidem, logo o centro de massa é o ponto I.

Teorema de Varignon. O quadrilátero PQRS cujos vértices são os pontos médios dos lados de um quadrilátero ABCD é um paralelogramo cuja área é metade da área de ABCD.

Exercício 6 - Mostre a segunda parte do teorema, relativamente à área de PQRS. Sugestão: use o diagrama mostrado na *Figura 4.2*.

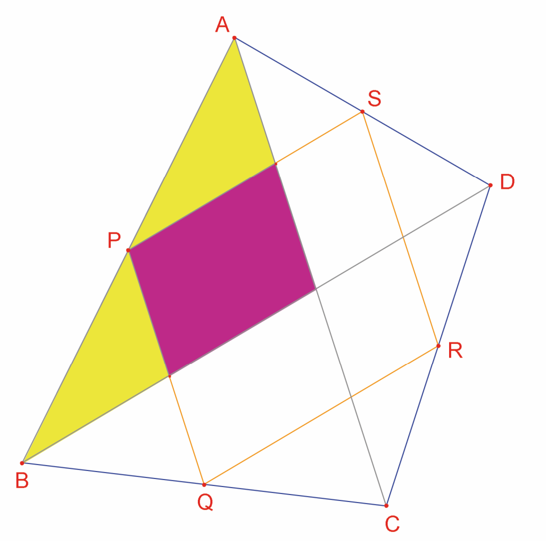


Figura 4.2 *– A construção para demonstrar a segunda parte do teorema.*

Sem modificar os pontos A, B e C, desloque o ponto D de forma a que PQRS seja aproximadamente um rectângulo. Uma vez que já sabemos que PQRS é um paralelogramo, basta mostrar que um dos ângulos é recto. Portanto, meça o ângulo em P com a ferramenta [Medida]Medida de ângulo. Esta ferramenta espera que se indiquem 3 pontos, sendo o segundo ponto o vértice do ângulo. Por exemplo, seleccione os pontos S, P e Q, por esta ordem.

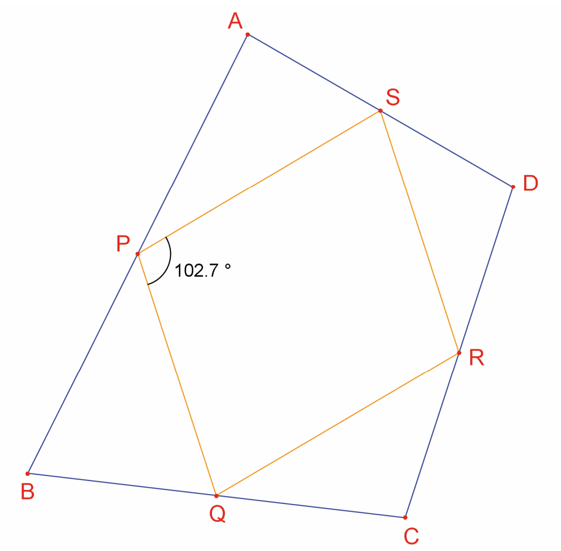


Figura 4.3 *- Medição da amplitude do ângulo em P.*

Também pode usar a ferramenta [Medida]Medida de ângulo para determinar a amplitude de um ângulo previamente marcado com a ferramenta [Texto e símbolos]Marca de ângulo. Para utilizar esta ferramenta tem de seleccionar também três pontos, na mesma ordem que a usada para a ferramenta [Medida]Medida de ângulo. Deslocando D de forma a que PQRS seja um rectângulo pode observar que há um número infinito de soluções, desde que D se desloque segundo uma determinada recta. De facto, se desenhar as diagonais AC e BD de ABCD pode verificar que os lados de PQRS são paralelos a estas diagonais e portanto PQRS é um rectângulo se e só se AC e BD forem perpendiculares. Para garantir que PQRS é sempre um rectângulo é necessário definir a posição de D. Desenhe a recta AC com a ferramenta [Linhas]Recta seleccionando A e depois C e depois construa a recta perpendicular a esta que passa por B com a ferramenta [Construções]Recta perpendicular, seleccionando o ponto B e a recta AC.

D é um ponto independente e móvel em toda a figura. Pode alterar este facto de forma a que D fique restringido a mover-se sobre a recta perpendicular a AC que passa por B. Escolha a ferramenta [Construções]Redefinir objecto e seleccione D. Aparece um menu listando as várias possibilidades de redefinição. Escolha Ponto sobre um objecto e depois seleccione um ponto qualquer sobre a recta perpendicular. D passa a ser esse ponto e a partir deste momento apenas pode ser deslocado sobre a recta.

A ferramenta de redefinição é uma ferramenta poderosa de investigação. Permite aumentar ou diminuir o número de graus de liberdade de partes de uma construção sem ter de redesenhar tudo de novo.

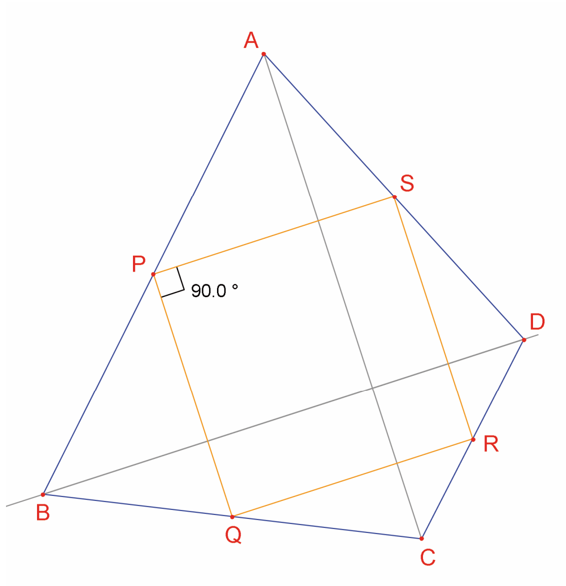


Figura 4.4 - *O ponto D foi redefinido de forma a que PQRS seja sempre um rectângulo. D ainda tem um grau de liberdade, podendo ser deslocado ao longo de uma recta.*

Exercício 7 - Encontre uma condição necessária e suficiente para que PQRS seja um quadrado. Redefina D novamente para que a construção apenas produza quadrados.

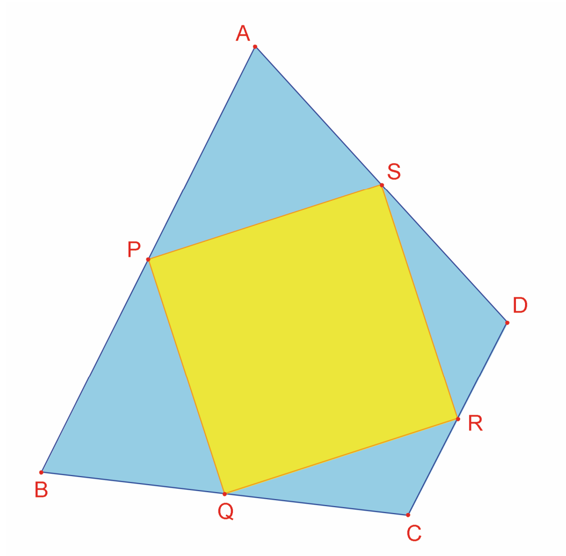


Figura 4.5 - *Nesta figura D não tem graus de liberdade e PQRS é sempre um quadrado.*