

# CABRI™ II PLUS



Ferramentas Matemáticas Inovadoras

TUTORIAL AVANÇADO



## BEM-VINDO !

Bem-vindo ao [Tutorial Avançado](#) do manual do utilizador do Cabri.

Este capítulo apresenta alguns exemplos avançados, interessantes de explorar e fáceis de resolver usando o Cabri. Esses exemplos complementam a secção [Descoberta](#) para utilizadores que pretendem aprofundar o seu conhecimento do Cabri.

Os exemplos foram concebidos para o ensino secundário a um nível avançado ou para o ensino universitário. São em grande medida independentes e o leitor deve reproduzir os detalhes das construções e a tentar resolver os exercícios indicados. Os exercícios marcados com um asterisco são mais difíceis.



## CONTEÚDO

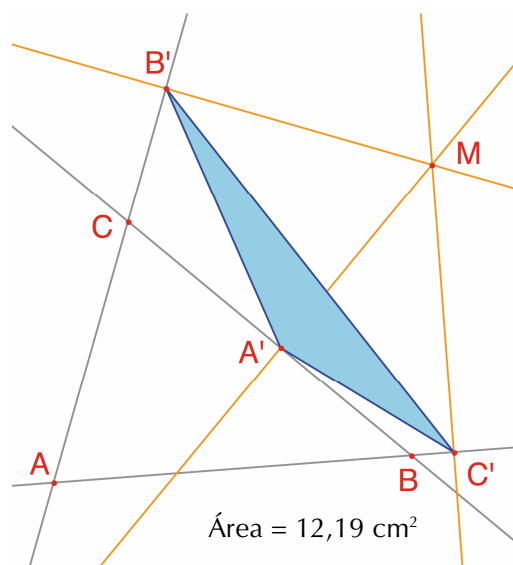
- |                                       |      |
|---------------------------------------|------|
| 1 - APROFUNDAMENTO: TRIÂNGULOS PEDAIS | P 7  |
| 2 - APROFUNDAMENTO: FUNÇÕES           | P 13 |
| 3 - APROFUNDAMENTO: PAVIMENTAÇÕES     | P 19 |



## TRIÂNGULOS PEDAIS

Usando a ferramenta [Pontos]Ponto construa três pontos, A, B e C em qualquer local da área de desenho. Construa primeiro as três rectas, AB, AC e BC, usando a ferramenta [Linhas]Recta. Crie um quarto ponto, M, em qualquer parte do plano e as suas projecções ortogonais, A', B' e C' respectivamente, nas três rectas. Estes pontos são construídos criando em primeiro lugar as rectas que passam por M perpendiculares às três rectas construídas usando a ferramenta [Construções]Recta Perpendicular. Use a ferramenta [Pontos]Ponto para construir os pontos de intersecção entre as três rectas iniciais e as suas respectivas perpendiculares. A ferramenta [Pontos]Ponto constrói implicitamente os pontos de intersecção de dois objectos. Basta colocar o cursor na proximidade de uma intersecção e o Cabri indicará a mensagem Ponto nesta intersecção ou, caso haja ambiguidade na escolha, Intersecção de... seguida de um menu de selecção.

Os três pontos A', B' e C' definem um triângulo que pode ser construído usando a ferramenta [Linhas]Triângulo. O seu nome é triângulo pedal de ABC em relação ao ponto M. O interior do triângulo pode ser colorido usando a ferramenta [Atributos]Preencher.... A propriedade que pretendemos estudar é a área do triângulo em função da posição de M. A área do triângulo pode ser medida com a ferramenta [Medida]Área. O resultado é o valor « aritmético » da área, ignorando a orientação do triângulo. A área é expressa em  $\text{cm}^2$  e pode ser deslocada para qualquer ponto da área de desenho. Clicando no número com o botão direito do rato activa o menu de contexto que oferece a possibilidade de mudar para o valor « algébrico » da área, dependendo o seu sinal da orientação do triângulo.



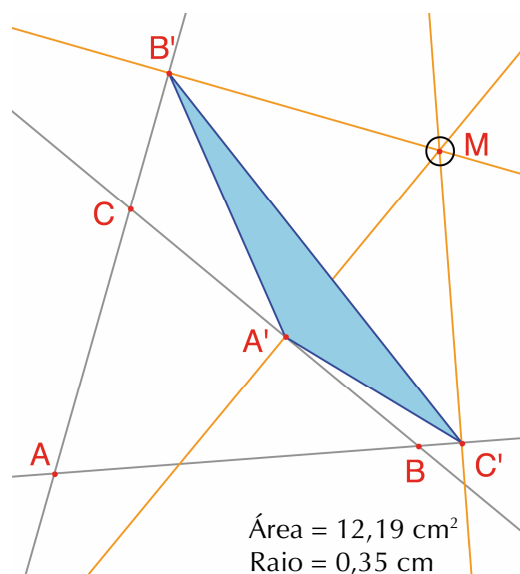
**Figura 1.1** – O triângulo pedal em relação a  $M$  e a sua área.

Vamos estudar como varia a área de  $A'B'C'$  em função da posição de  $M$ . Há várias estratégias possíveis para o fazer. Por exemplo, seleccione a ferramenta [Texto e Símbolos]Rasto Ligado/Desligado (que requer a selecção do objecto a traçar, neste caso  $M$ ). Mova  $M$  tentando manter a área de  $A'B'C'$  constante. As posições sucessivas de  $M$  são assinaladas na área de desenho, mostrando o aspecto aproximado de uma curva de nível de um dado valor da área de  $A'B'C'$ . Outra estratégia possível seria usar uma grelha de pontos para desenhar uma representação visual da área de  $A'B'C'$  para um elevado número de pontos.

Vamos usar a segunda estratégia e desenhar uma circunferência de centro em  $M$  que tem uma área proporcional à do triângulo  $A'B'C'$  para um elevado número de posições de  $M$ . Para o fazer é necessário calcular o raio pretendido da circunferência, proporcional à raiz quadrada da área do triângulo. Seleccione a ferramenta [Medida]Calculadora... e introduza a expressão `sqrt(`, seleccione a área do triângulo  $a$ , sendo apresentada a expressão `sqrt(a`. Prima a tecla `)` para fechar o parêntesis e divida por 10, de modo a evitar que a circunferência seja muito grande. A expressão apresentada é `sqrt(a)/10`. Calcule este valor clicando no botão `=` e arraste o resultado para a área de desenho. Para construir a circunferência de centro em  $M$  e com o raio calculado seleccione a ferramenta

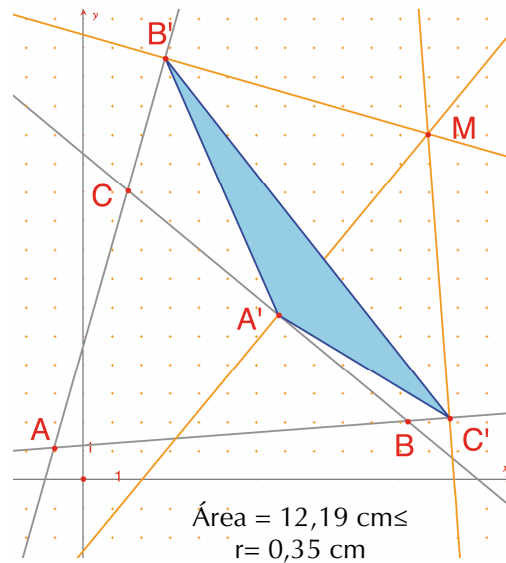


[Construções]Compasso, seleccione o número e depois o ponto M. Agora pode observar as alterações ao tamanho da circunferência em torno de M à medida que o desloca.



**Figura 1.2** – É desenhada uma circunferência com centro em M e área proporcional à do triângulo A'B'C'.

Definimos agora uma grelha e redefinimos M como ponto da grelha e finalmente desenhamos as circunferências que representam a área do triângulo pedal em relação a cada ponto da grelha. Para definir a grelha é necessário um sistema de eixos. Vamos seleccionar o sistema de eixos por defeito que estão disponíveis para qualquer figura. Para mostrar os eixos seleccione a ferramenta [Atributos]Mostrar eixos. Seleccione de seguida a ferramenta [Atributos]Definir grelha e seleccione os eixos. É mostrada a grelha correspondente.

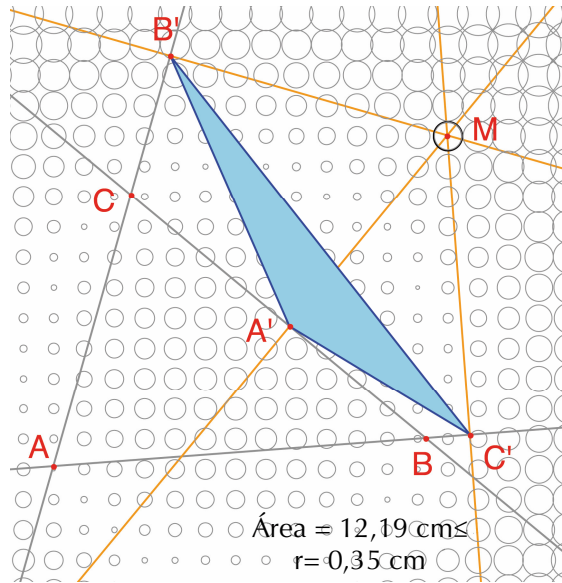


**Figura 1.3** – É construída a grelha, usando os eixos por defeito para a figura. M é posteriormente redefinido como um ponto na grelha.

M é ainda um ponto independente e móvel no plano; vamos redefini-lo de modo a que fique restrito aos pontos da grelha. Selecciona a ferramenta [Construções]Redefinir objecto e depois clique no ponto M. Escolha a opção Ponto sobre um objecto e selecciona um qualquer ponto da grelha. M fica agora restrito aos pontos da grelha.

A ferramenta [Construções]Lugar geométrico pode ser utilizada para construir o conjunto de circunferências obtidas movendo M ao longo da grelha. Selecciona a circunferência e depois o ponto M para obter o lugar geométrico da circunferência para as várias posições possíveis para M.

Mostra-se (veja, por exemplo, *Geometry Revisited*, H.M.S. Coxeter e S.L. Greitzer, *Mathematical Association of America*, secção 1.9) que as curvas de nível da área do triângulo pedal são circunferências com centro no ortocentro de ABC. Em particular, o triângulo A'B'C' tem área nula se M estiver sobre a circunferência circunscrita de ABC, ou, equivalentemente, A', B' e C' são colineares se e só se M estiver na circunferência circunscrita do triângulo ABC.



**Figura 1.4** – Representação da área do triângulo pedal de ABC em função da posição de M.

**Exercício 1** – Com M na circunferência circunscrita de ABC os pontos A', B' e C' são colineares e A'B'C' é chamada recta de *Simson*<sup>1</sup> de M (ou recta de *Wallace*<sup>2</sup> – esta recta foi incorrectamente atribuída a Simson durante muito tempo, uma vez que foi de facto publicada em 1799 por Wallace). Construa o incólucro das rectas de Simson (use a ferramenta [\[Construções\]Lugar geométrico](#)). Esta curva, que é invariante por rotações de 120° chama-se deltoide (ou tricúspica ou hipocicloide 3 de *Steiner*<sup>3</sup>) uma vez que a sua forma assemelha-se à letra grega Δ.

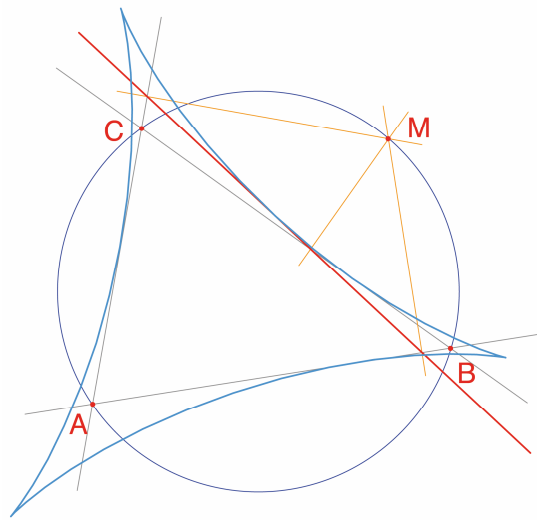
Esta curva é tangente às três rectas, AB, BC e CA. É uma curva algébrica de grau 4. Pode verificar este facto com a ferramenta [\[Medida\]Equação ou coordenadas](#).

**Exercício 2\*** - Para o deltoide do exercício anterior construa o seu centro, os pontos de intersecção com as rectas e a maior circunferência que pode ser inscrita na curva.

<sup>1</sup> Robert Simson,  
1687-1768

<sup>2</sup> William Wallace,  
1768-1843

<sup>3</sup> Jakob Steiner,  
1796-1863



**Figura 1.5** – O invólucro das rectas de Simson do triângulo  $ABC$  é um deltoide. Tem as mesmas simetrias de um triângulo equilátero.

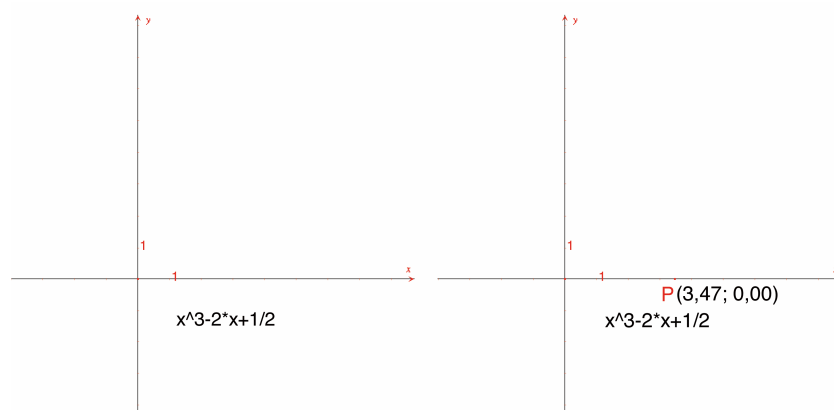
## FUNÇÕES

É fácil construir gráficos de funções no Cabri, graças ao seu sistema de eixos e às ferramentas de expressões algébricas. O gráfico pode ser depois usado para estudar as propriedades da função. Neste capítulo vamos estudar a função polinomial de grau 3:

$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

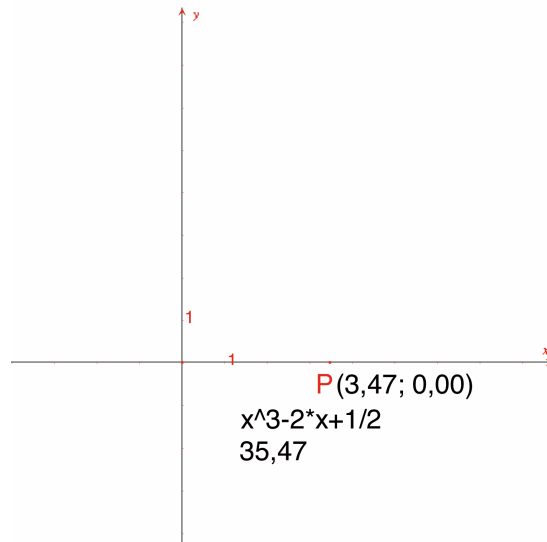
Exiba primeiro os eixos com a ferramenta [Atributos]Mostrar eixos. De seguida crie a expressão correspondente na área de desenho. Uma vez inserida na área de desenho o valor de uma expressão pode ser calculado para vários valores das suas variáveis. Para esta função active a ferramenta [Texto e Símbolos]Expressão e escreva  $x^3-2*x+1/2$ . Os nomes de variáveis permitidos são as letras: a, b, c... z.

Crie um ponto P no eixo das abcissas com a ferramenta [Pontos]Ponto. Determine as suas coordenadas com a ferramenta [Medida]Equação ou coordenadas e seleccionando o ponto P. Com a ferramenta [Manipulação]Ponteiro pode mover as coordenadas para qualquer local da figura. Para voltar a anexá-las ao ponto P basta arrastá-las para a sua vizinhança.



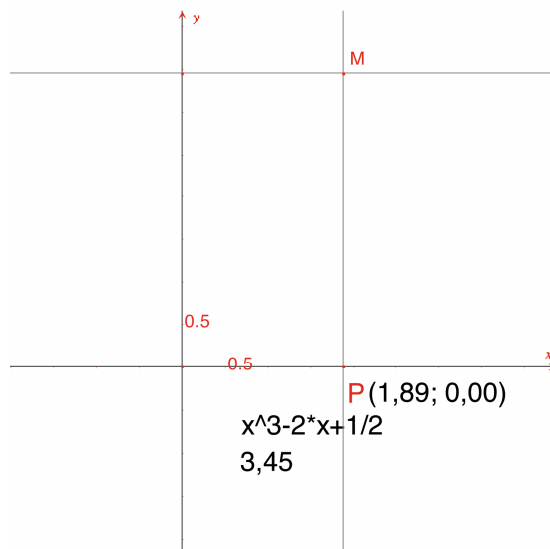
**Figura 2.1** - [Esquerda]. A expressão correspondente à função é introduzida na figura. [Direita]. O ponto P é marcado no eixo das abcissas e as suas coordenadas determinadas usando a ferramenta [Medida]Equação ou coordenadas.

De seguida pretendemos determinar o valor de  $f(x)$  onde  $x$  é a abcissa de P. Selecciona a ferramenta [Medida]Aplicar uma expressão, clique na expressão e depois na coordenada x do ponto P. A ordem aqui é importante.



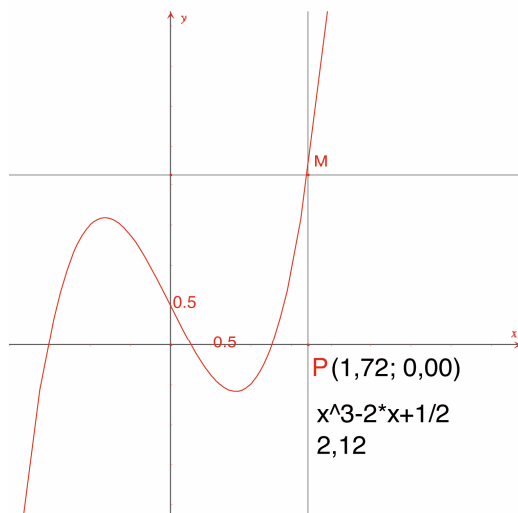
**Figura 2.2** – A ferramenta [Medida]Aplicar uma expressão é usada para calcular o valor de  $f(x)$  para o valor da abcissa de P.

Pode transferir este valor para o eixo das ordenadas usando a ferramenta [Construções]Transferência de medidas e seleccionando o valor seguido do eixo. Depois disto basta construir as rectas paralelas aos eixos que passam pelos pontos usando a ferramenta [Linhas]Recta paralela. O seu ponto de intersecção, que designamos por M, tem coordenadas  $(x, f(x))$ . Na figura da página seguinte movemos o ponto P para uma posição mais próxima da origem para que o ponto M seja visível na área de desenho.



**Figura 2.3** – Construção do ponto  $M(x, f(x))$  usando a transferência de medidas.

O gráfico da função é o lugar geométrico das posições assumidas por  $M$  à medida que  $P$  se move ao longo do eixo das abcissas. Constrói-se com a ferramenta [Construções]Lugar geométrico seleccionando primeiro o ponto  $M$  e depois  $P$ . De modo a observar uma região em particular do gráfico pode deslocar a origem dos eixos (arrastando-a) e alterar a escala (arrastando uma das marcas de escala assinaladas).



**Figura 2.4** – O gráfico da função é finalmente criado com a ferramenta [Construções]Lugar geométrico. O sistema de eixos pode ser deslocado e dimensionado de modo a observar a parte do gráfico que pretende.

Podemos agora construir uma aproximação à tangente a esta curva num ponto dado. Para pequenos valores de  $h$  temos

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

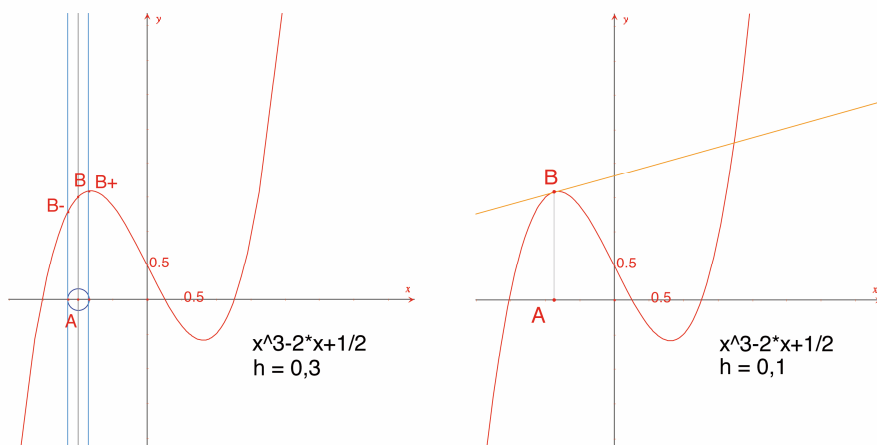
Do ponto de vista geométrico esta aproximação toma o declive da tangente como sendo igual ao declive da recta que une os pontos de abscissas  $x-h$  e  $x+h$ . Usando a ferramenta [Texto e símbolos]Número defina o valor de  $h$ , por exemplo 0.3 para mais fácil visualização da construção. O valor de  $h$  pode ser posteriormente alterado para um valor mais pequeno, dando uma aproximação mais correcta do declive da tangente. De seguida construa um ponto A no eixo X e uma circunferência de centro A e raio  $h$ .

Esta circunferência é obtida com a ferramenta [Construções]Compasso seleccionando o valor de  $h$  e depois o ponto A. Os dois pontos de intersecção com o eixo das abcissas têm abcissas  $x-h$  e  $x+h$ , onde  $x$  é a abcissa do ponto A. Construa três rectas paralelas ao eixo das ordenadas (com a ferramenta [Construções]Recta paralela) que passam por estes pontos de intersecção e pelo ponto A.

Os pontos de intersecção destas linhas com a curva são os pontos  $B^-$ , B e  $B^+$ , respectivamente, e são pontos na curva com abcissas  $x-h$ ,  $x$  e  $x+h$  respectivamente.

Como a figura vai ficando cada vez mais preenchida pode esconder os elementos que já não são necessários. Selecciona a ferramenta [Atributos]Esconder/Mostrar e seleccione os objectos que quer ocultar. Neste exemplo optámos por ocultar os pontos M e P, as duas rectas usadas para a construção de M, as coordenadas de P e o valor da função em P. Os objectos ocultos apenas podem ser vistos como pontilhados e apenas quando a ferramenta [Atributos]Esconder/Mostrar estiver activada. Para tornar visível um objecto oculto active novamente a ferramenta e seleccione o objecto.





**Figura 2.5** - [Esquerda] São construídos os três pontos na curva,  $B^-$ ,  $B$  e  $B^+$  com abcissas  $x-h$ ,  $x$  e  $x+h$ . [Direita] A aproximação à tangente em  $B$  é construída e os elementos usados na construção são escondidos.

A aproximação à recta tangente é a recta paralela a  $B^-B^+$  que passa por  $B$ . Construa esta recta com a ferramenta [Linhas]Recta e a recta paralela que passa por  $B$  com a ferramenta [Construções]Recta paralela. Agora oculte a recta  $B^-B^+$  e os restantes elementos usados na construção, até que apenas  $h$ ,  $A$ ,  $B$  e a recta tangente são visíveis. Pode ver que o valor  $h=0.3$  já nos fornece uma boa aproximação à tangente. Contudo, esta aproximação pode ser melhorada diminuindo o valor de  $h$ , por exemplo tomando  $h=0.0001$ .

Ao deslocar o ponto  $A$  sobre o eixo permite identificar as três raízes da equação  $f(x)=0$ , os extremos relativos de  $f$  e o ponto de inflexão da curva.

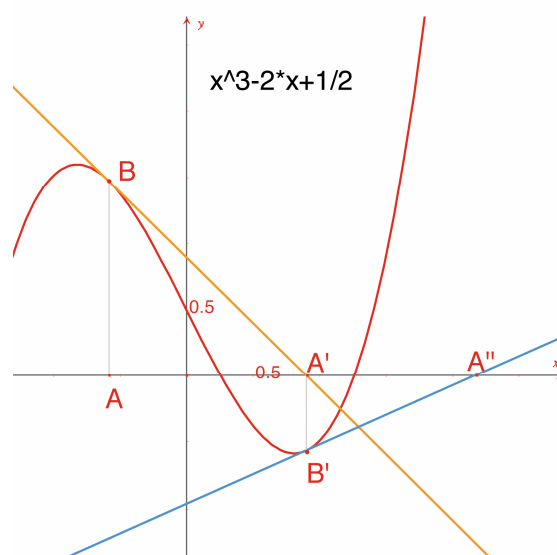
A título informativo, as três soluções da equação  $f(x)=0$  são aproximadamente  $r_1=-1.52568$ ,  $r_2=0.25865$  e  $r_3=1.26703$ .

As abcissas dos extremos relativos são aproximadamente  $e_1=-0.81649$  e  $e_2=0.81649$  (as duas raízes quadradas de  $2/3$ ).

A função  $f(x)$  tem um ponto de inflexão em  $(0,1/2)$ .

**Exercício 3** – Usando o declive da tangente desenhe o gráfico aproximado da derivada da função.

**Exercício 4 \*** - A tangente intersecta o eixo das abcissas num ponto  $A'$  com abcissa  $x'$  que é, em geral, uma melhor aproximação de uma raiz da função, desde que  $A$  se encontre já numa vizinhança dessa raiz. Esta afirmação está na base do método iterativo conhecido como método de *Newton*<sup>1</sup> - *Raphson*<sup>2</sup> para determinar a raiz de uma equação. Construa o ponto  $A'$  e de seguida construa a iterada  $A''$  pelo mesmo método e compare a posição de  $A''$  em relação à posição de  $A$ . Em particular, pode determinar duas posições de  $A$  tais que  $A$  e  $A''$  coincidam, em vez das três raízes visíveis da equação. A título informativo, estes dois valores são as duas raízes reais de um polinómio de grau 6 cujos valores são aproximadamente 0.56293 e 0.73727. Também pode observar que uma má escolha de  $A$  pode fazer com que o método divirja, escolhendo  $A$  tal que  $A'$  é um ponto de derivada nula.



**Figura 2.6** – As duas primeiras iteradas do método de Newton-Raphson, começando no ponto  $A$ .

**Nota:** o mesmo gráfico pode ser obtido de forma difecta usando a ferramenta *[Medida]Aplicar uma expressão*.

<sup>1</sup> Sir Isaac Newton,  
1643-1727

<sup>2</sup> Joseph Raphson,  
1648-1715

## PAVIMENTAÇÕES

Neste capítulo vamos construir várias pavimentações do plano, usando polígonos. Começamos com algumas definições algo simplificadas mas que serão suficientes para o trabalho que pretendemos realizar. O leitor interessado pode consultar *Tilings and Patterns*, Branko Grünbaum e G.C. Shepherd, Freeman 1987. Um elevado número de páginas na Internet disponibiliza informações sobre pavimentações e grupos de simetria.

Dizemos que um conjunto de figuras planas fechadas é uma pavimentação do plano se os seus interiores não se intersectam e a sua reunião cobre a totalidade do plano. Estas figuras planas chamam-se ladrilhos. A intersecção de dois ladrilhos, que é um segmento de recta ou parte de uma curva chama-se aresta e a intersecção de dois ou mais ladrilhos num único ponto é um vértice.

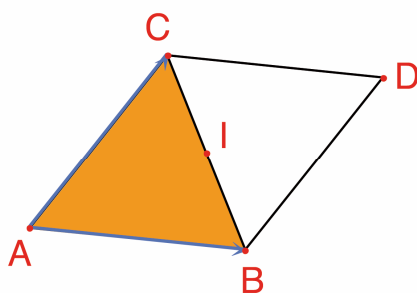
Para a pavimentação  $P$  escrevemos  $S(P)$  para designar o conjunto das suas isometrias,  $f$ , do plano, tais que a imagem de qualquer ladrilho de  $P$  por  $f$  é um ladrilho de  $P$ .  $S(P)$  é um grupo, chamado grupo de simetrias da pavimentação. Há vários casos a considerar para um tal grupo:

- $S(P)$  não contém translações.  $S(P)$  é então isomorfo a um grupo cíclico (possivelmente trivial) gerado por rotações de  $2/n$  ou a um grupo diedral, o grupo de simetrias de um polígono regular de  $n$  lados.
- $S(P)$  só contém translações colineares.  $S(P)$  é então isomorfo a um dos sete grupos de friso.
- $S(P)$  contém duas translações não colineares. Então  $S(P)$  é isomorfo a um dos 17 grupos de papel de parede (ou grupos cristalográficos planos) e a pavimentação é dita periódica.

Se todos os ladrilhos da pavimentação podem ser obtidos como isometrias de um único ladrilho a pavimentação diz-se monoédrica. No seguimento do texto vamos considerar apenas pavimentações monoédricas em que os

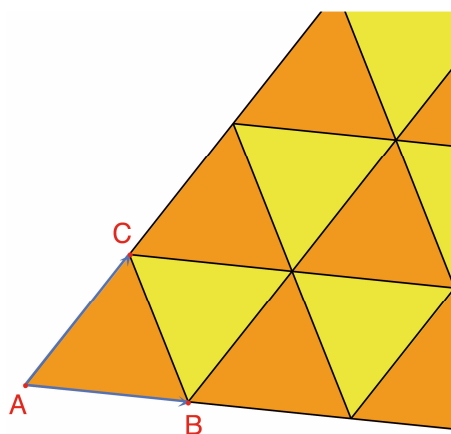
ladrilhos são polígonos. Vamos em primeiro lugar construir uma pavimentação monoédrica do plano usando um triângulo.

Construa um triângulo ABC usando a ferramenta [Linhas]Triângulo e depois marque o ponto médio de um dos seus lados, BC, por exemplo, com a ferramenta [Construções]Ponto médio. Seja D a imagem de A por uma rotação de  $180^\circ$  (simetria central), usando a ferramenta [Transformações]Simetria central, seleccionando primeiro o ponto a transformar, A e depois o seu centro, I.



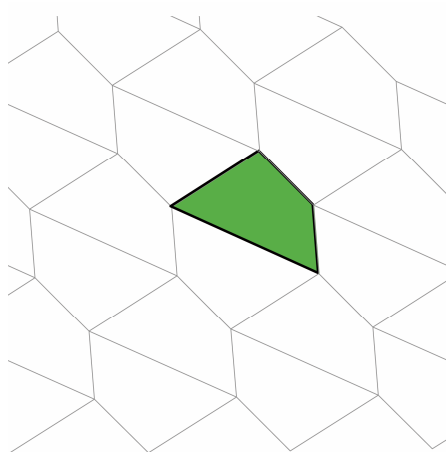
**Figura 3.1** – A imagem do triângulo ABC é criada por uma rotação de  $180^\circ$  em relação ao ponto médio de um dos seus lados (BC neste exemplo). Construimos assim o paralelogramo ABDC.

O quadrilátero ABDC é um paralelogramo e pode ser usado para pavimentar o plano. Crie os vectores AB e AC usando a ferramenta [Linhas]Vector. Estes vectores serão usados para criar imagens dos triângulos ABC e BCD usando a ferramenta [Transformações]Translação



**Figura 3.2** – Com a ferramenta [Transformações]Translação crie as imagens dos dois triângulos por translações segundo os vectores AB e AC.

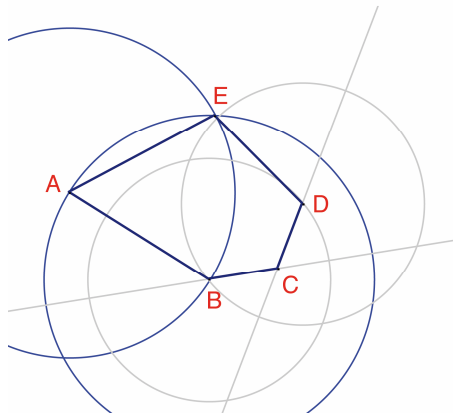
Pode ser usada a mesma abordagem para pavimentar o plano com qualquer quadrilátero, seja ou não convexo, desde que os seus lados não se intersectem. A imagem do quadrilátero é criada por rotação segundo o ponto médio de um dos lados. Isto produz um hexágono cujos lados são paralelos dois a dois, que pode ser usado para pavimentar o plano por translações.



**Figura 3.3** – O mesmo tipo de construção é usada para pavimentar o plano com qualquer quadrilátero, convexo ou côncavo, desde que os seus lados não se intersectem.

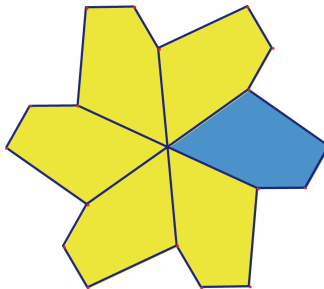
Para outros polígonos convexos a situação é muito mais complexa. Pode mostrar-se que é impossível pavimentar o plano com polígonos com mais de 6 lados. Há três tipos de hexágonos que podem ser usados para pavimentar o plano e pelo menos 14 tipos de pentágonos convexos, cada tipo de pentágono dado por um determinado conjunto de restrições aos seus ângulos. Actualmente não se sabe se os 14 tipos conhecidos são a solução completa do problema. A última das 14 pavimentações foi descoberta em 1985. Tanto quanto sabemos a questão dos polígonos côncavos ainda não foi resolvida.

**Exercício 5** - Construa um pentágono convexo ABCDE, sujeito às seguintes restrições: o ângulo em A é de  $60^\circ$ , o ângulo em C é de  $120^\circ$ ,  $AB=AE$  e  $CB=CD$ . Estas condições não definem um único pentágono, mas uma família de pentágonos. Na construção há pelo menos três pontos independentes.



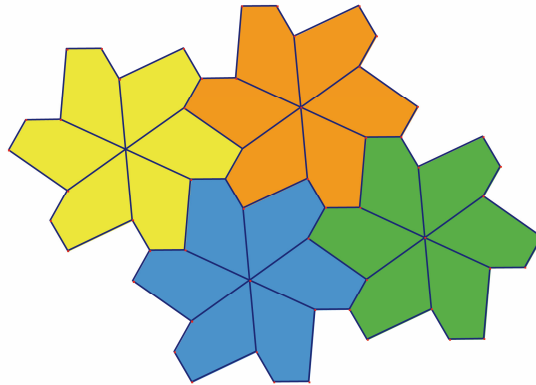
**Figura 3.4** – Construção de um pentágono com as seguintes restrições: ângulo em A de  $60^\circ$ , ângulo em C de  $120^\circ$ ,  $AB=AE$  e  $CB=CD$ . A, B e C são pontos independentes.

Faça rotações sucessivas em torno de A com um ângulo de  $60^\circ$  usando a ferramenta [Transformações]Rotação. Esta ferramenta requer a selecção de: um objecto a transformar, um ângulo e o centro da rotação. Construa a « flor » de 6 pétalas pentagonais. O ângulo requerido pela rotação é um número na área de desenho que pode ser introduzido usando a ferramenta [Texto e Símbolos]Número.



**Figura 3.5** – O pentágono inicial é transformado por rotações centradas em A com um ângulo de 60 graus para dar origem a uma « flor » de 6 pétalas.

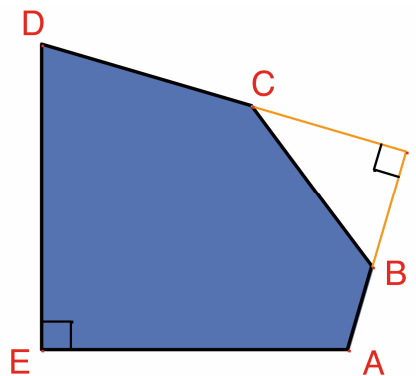
Estas flores podem agora ser coladas usando translações para pavimentar o plano. Esta pavimentação é de tipo 5, de acordo com a classificação de *Tilings and Patterns*. Foi publicada em primeiro lugar por *K. Reinhardt* em 1918. Esta pavimentação é monoédrica (ou seja todos os ladrilhos são idênticos a menos de uma isometria) mas também isoédrica (todos os pentágonos são rodeados pelo mesmo padrão de pentágonos na pavimentação).



**Figura 3.6** – Pavimentação do plano usando as flores construídas antes.

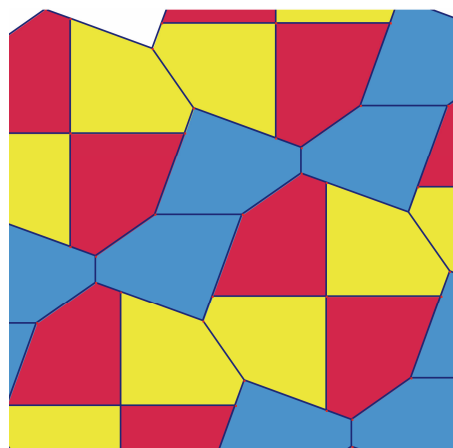
**Exercício 6** - Construa um pentágono ABCDE com as restrições:

$$\hat{E} = 90^\circ, \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ, 2\hat{B} - \hat{D} = 180^\circ, 2\hat{C} + \hat{D} = 360^\circ, \\ EA = ED = AB + CD .$$



**Figura 3.7** – Um pentágono de tipo 10 de acordo com a classificação de *Tilings and Patterns*. Este pentágono é a base de uma pavimentação monoédrica do plano. Os pontos A e E são independentes e o ponto I pode mover-se num arco de circunferência

Esta pavimentação é construída fazendo inicialmente três cópias do ladrilho, usando rotações sucessivas de  $90^\circ$  em torno de E para obter um quadrado truncado. Estes quadrados podem depois ser copiados em tiras usando translações segundo uma direção. As tiras são depois separadas umas das outras por tiras de pentágonos, como mostra a próxima figura.



**Figura 3.8** – Uma pavimentação monoédrica do plano usando pentágonos convexos. Esta pavimentação foi descoberta por Richard E. James III após a publicação de um artigo de Martin Gardner na *Scientific American* em 1975. O artigo completo pode ser descoberto em *Time travel and other mathematical bewildermments*, Martin Gardner, Freeman 1987.