CABRI® II PLUS

CABRILOG

Creator de Instrumente Matematice

MANUAL DE UTILIZARE

BINE ATI VENIT !

Bine aţi venit în lumea dinamică a lui Cabri!

Creat la sfârşitul anilor 80 la IMAG, un laborator de cercetare asociat CNCS (Centrul Naţional al Cercetării Ştiinţifice) şi la Universitatea Joseph Fourier din Grenoble, Cabri Geometre numără astăzi mai mult de o sută de milioane de utilizatori, pe computere şi calculatoare grafice Texas Instruments, din întreaga lume. Cabri II Plus este acum dezvoltat şi distribuit de societatea Cabrilog, fondată în martie 2000 de Jean-Marie LABORDE, director de cercetare la CNCS şi tată spiritual al Cabri II Plus.

Construcţia de figuri geometrice pe computer aduce o nouă dimensiune în raport cu construcţiile clasice utilizând hârtie, creion, riglă şi compas. Cabri II posedă un mare număr de funcţionalităţi, solide şi uşor de utilizat. Figurile, de la cele mai simple la cele mai complicate pot fi mânuite liber. In orice moment, se poate testa construcţia unei figuri, se pot emite ipoteze, se poate măsura, calcula, şterge, se pot ascunde/arăta obiecte, se pot pune culori, linii punctate, text, sau se poate lua totul de la început.

Cabri II Plus este cel mai bun software pentru învăţarea şi predarea geometriei. Se adresează cadrelor didactice şi studenţilor, şi poate fi utilizat de la şcoala primară la universitate.

Unele funcţionalităţi ale software-ului sunt specifice versiunilor Macintosh/Windows: tastele Ctrl şi Alt de la Windows corespund comenzii ⌘ şi opţiunii Alt ⌥ pe Mac OS. Click dreapta în Windows corespunde lui Ctrl+click pe Mac OS.

- **Interfaţă**: Noile pictograme sunt mai mari şi mai lizibile. Meniurile contextuale fac şi mai intuitivă utilizarea lui Cabri II Plus, rezolvând uşor situaţiile de ambiguitate de selecţie sau schimbând atributele oricărui obiect prin câteva click-uri.

- **Nume**: Numiţi toate obiectele şi poziţionaţi numele oriunde în jurul unui obiect.

- **Expresii**: Definiţi şi evaluaţi dinamic expresii cu una sau mai multe variabile.

- **Grafic instantaneu**: Trasaţi şi studiaţi uşor graficele uneia sau ale mai multor funcţii.

- **Locuri:** Construiţi locuri pentru puncte sau obiecte, locuri pentru locuri sau intersecţii cu locuri. Ecuaţiile unor curbe algebrice, construite datorită instrumentului Loc, pot fi afişate.

- **Drepte inteligente**: Afişaţi numai partea utilă a unei drepte. Lungimea acestei porţiuni de dreaptă poate fi modificată după voie.

- **Culori**: Alegeţi culorile obiectelor şi textelor precum şi culorile de umplere cu ajutorul noii palete lărgite de culori sau folosind culorile variabile dinamic.

- **Imagini (Bitmaps, JPEG, GIF)**: Ataşaţi o imagine anumitor obiecte ale unei figuri (puncte, segmente, poligoane, fond). Imaginile sunt recalculate în timpul animaţiilor şi manipulării figurii.

- **Text**: Stilul, caracterele şi atributele de text ale oricărui obiect pot fi schimbate în mod liber.

- **Fereastră de descriere**: Se poate deschide o fereastră pentru a înşirui toate etapele construcţiei unei figuri.

- **Înregistrare a unei sesiuni**: Înregistraţi o sesiune în timpul utilizării software-ului. O sesiune poate fi citită pe ecran sau imprimată mai târziu, pentru a studia progresul elevilor şi a identifica în mod clar dificultăţile întâlnite în timpul experimentelor.

- **Importare/Exportare de figuri**: Se pot transfera figuri spre sau provenind de la un calculator grafic utilizând Cabri Junior (TI-83 Plus şi TI 84 Plus).

Toate aceste funcţii inovatoare pot aduce o nouă dimensiune practicii dumneavoastră de predare.

Acest document este împărţit în două părţi:

Partea [1] INIŢIERE este destinată utilizatorilor care descoperă software-ul pentru prima oară. Ea le permite să se familiarizeze cu interfaţa lui Cabri II Plus şi convenţiile de utilizare ale mouse-ului. Totuşi, experienţa demonstrează că iniţierea este foarte rapidă şi că în clasă, elevii „fac” deja geometrie în prima lor jumătate de oră de utilizare a software-ului.

Partea [2] DESCOPERIRE este destinată noilor utilizatori şi propune activităţi de nivel gimnaziu şi liceu. Alte documente sunt disponibile sub formă de documente PDF în repertoriul de instalare a software-ului sau pe CD-ROM-ul de instalare.

Primul document, REFERINŢĂ.pdf este o descriere completă a software-ului.

Al doilea document, APROFUNDARE.pdf prezintă alte activităţi mai avansate, de nivel liceu şi primul ciclu universitar.

Activităţile acestor documente sunt pe deplin independente unele faţă de altele. Cititorul este invitat să construiască în detaliu, apoi să facă exerciţiile propuse.

Site-ul nostru www.cabri.com vă va oferi accesul la ultimele actualizări şi la noutăţile referitoare la produsele noastre, în special noile versiuni ale acestui document. Site-ul conţine legături spre zeci de pagini Internet şi, de asemenea, trimiteri la numeroase cărţi despre geometrie şi despre Cabri II Plus.

Întreaga echipă a societăţii Cabrilog vă urează lungi şi pasionante ore de construcţii, de explorare şi de descoperiri.

Manualul pentru Cabri II Plus :

Autor iniţial : Eric Bainville

Actualizare : Christophe Foucher, Martie 2007

Noi versiuni : www.cabri.com

Suport : support@cabri.com

Creaţie grafică, paginare şi corectură : Cabrilog

CUPRINS

CAPITOLUL 1

INITIERE

1.1 FILOZOFIE

Filozofia lui Cabri II Plus este să permită maximumul de interacţiuni (mouse, tastatură…) între utilizator şi software, şi în fiecare caz, să facă ceea ce utilizatorul se aşteaptă să facă software-ul, respectând pe de o parte comportamentele uzuale ale aplicaţiilor şi ale sistemului, şi pe de altă parte comportamentul matematic cel mai plauzibil.

Un ***document*** Cabri II Plus este alcătuit dintr-o ***figură*** construită liber pe o foaie de hârtie virtuală de un metru pătrat (1m pe 1m). O figură este alcătuită din obiecte geometrice (puncte, drepte, cercuri,…), dar şi din alte obiecte (numere, texte, formule,…).

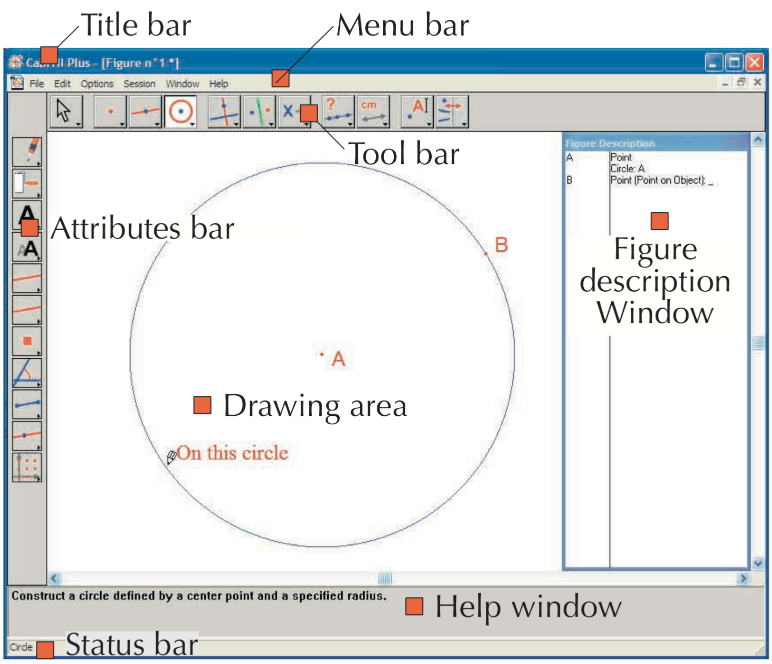
Un document poate de asemenea să cuprindă ***macro-construcţii***, care permit, memorizând construcţii intermediare, lărgirea funcţionalităţii software-ului.

Aplicaţia permite deschiderea simultană a mai multor documente şi suportă comanda Decupare-Copiere/Lipire între documente deschise.

1.2 INTERFATA APLICATIEI

Figura de mai jos arată fereastra principală a aplicaţiei şi diferitele ei zone. La lansarea lui Cabri II Plus, bara de atribute, fereastra de ajutor şi fereastra de descriere nu sunt vizibile.

Bara de titlu indică numele fişierului conţinând figura, sau Figura nr. 1,2… dacă figura n-a fost încă numită.
Bara de meniuri permite accesul la comenzile aplicaţiei, care corespund comenzilor întâlnite de obicei într-un software.

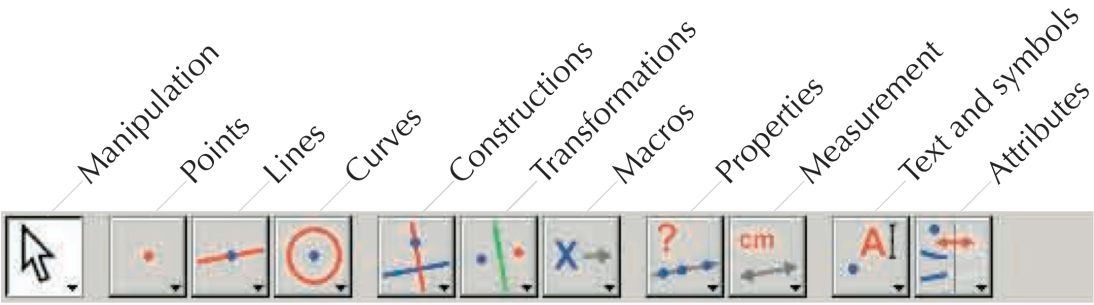


Title bar = Bară de titlu
Menu bar = Bară de meniuri
Tool bar = Bară de instrumente
Attributes bar = Bară de atribute
Figure description Window = Fereastră de descriere
Drawing area = Zonă de lucru
Help window = Fereastră de ajutor
Status bar = Bară de stare

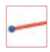
În continuarea acestui document, vom desemna intrarea Acţiune a meniului Meniu prin [Meniu]Acţiune. De exemplu, [Fişier]Salvează ca... desemnează intrarea Salvează ca... a meniului Fişier.

Bara de instrumente oferă instrumentele care permit crearea şi manipularea figurii. Ea este alcătuită din mai multe cutii cu instrumente, conţinând fiecare un instrument vizibil, corespunzând unei pictograme din bară. Instrumentul activ este reprezentat de un buton apăsat, cu un fond alb. Celelalte instrumente sunt reprezentate de butoane care nu sunt apăsate, cu un fond gri. Un click scurt pe un buton activează instrumentul corespunzător. O apăsare prelungită pe un buton desfăşoară cutia cu instrumente, şi permite alegerea unui alt instrument. Acest instrument devine instrumentul vizibil al cutiei cu instrumente, şi instrumentul activ.

Bara de instrumente poate fi recompusă liber de utilizator, şi eventual zăvorâtă într-o configuraţie fixată pentru o utilizare în clasă (vezi capitolul: [8] PREFERINŢE ŞI PERSONALIZARE în REFERINŢĂ.pdf)



Manipulare, Puncte, Linii, Curbe, Construcţii, Transformări, Macros, Proprietăţi, Măsură, Text şi simboluri, Atribute

In continuarea acestui document, vom desemna instrumentul Instrument al cutiei Cutie prin [Cutie]Instrument, cu pictograma corespunzătoare amintită în margine (unii termeni prea lungi pentru a încăpea în margine au fost prescurtaţi). De exemplu [Linii]Semidreaptă  reprezintă instrumentul Semidreaptă din cutia cu instrumente Linii.

Pictogramele barei de instrumente pot fi afişate în două mărimi. Pentru a schimba mărimea, faceţi click pe butonul drept al mouse-ului după ce aţi deplasat săgeata în bara de instrumente, în dreapta ultimului instrument şi selecţionaţi „Pictograme mici”.

Bara de stare din partea de jos a ferestrei indică în permanenţă instrumentul activ.

Bara de atribute permite modificarea atributelor obiectelor: culori, stiluri, dimensiuni,.. Ea este activată de comanda [Opţiuni]Arată atributele şi mascată din nou de [Opţiuni]Ascunde atributele, sau de tasta F9 în Windows, z+F9 pe Mac.

Fereastra de ajutor oferă un ajutor succint referitor la instrumentul selecţionat. Ea indică obiectele realizate de instrument, şi ceea ce va fi construit. Ea este activată/ mascată de tasta F1 în Windows, z+F1 pe Mac.

Fereastra de descriere conţine o descriere a figurii sub formă de text. Aici se găseşte ansamblul de obiecte construite şi metoda de construcţie a lor. Ea este activată de comanda [Opţiuni]Arată descrierea, şi mascată din nou prin [Opţiuni]Ascunde descrierea, sau de tasta F10 în Windows, z+F10 pe Mac.

In sfârşit, **zona de lucru** reprezintă o porţiune a foii de lucru. Aici, în zona de lucru se efectuează construcţiile geometrice.

1.3 UTILIZAREA MOUSE-ULUI

Majoritatea funcţiilor software-ului sunt realizate utilizând mouse-ul.
Acţiunile asupra mouse-ului sunt deplasarea, apăsarea pe un buton şi eliberarea unui buton. In absenţa indicaţiei contrarii, va fi vorba de butonul stâng al mouse-ului.

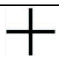
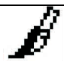
- O secvenţă presiune-eliberare se numeşte **click**.
- O secvenţă presiune-eliberare-presiune-eliberare se numeşte **dublu-click**.
- O secvenţă presiune-deplasare-eliberare se numeşte **alunecare-depunere**.

Când deplasăm mouse-ul în zona de lucru, software-ul ne informează în trei feluri asupra a ceea ce va produce un click sau o **alunecare-depunere**:

- forma săgeţii,
- textul afişat lângă cursor,
- o reprezentare parţială a obiectului în curs de construcţie.

După caz, textul şi reprezentarea parţială pot să nu fie afişate.

Diferite săgeţi:

	Un obiect existent este pe cale de a fi deplasat.
	Un obiect existent poate fi selecţionat
	Un obiect existent poate fi selecţionat, sau deplasat, sau utilizat într-o construcţie
	Apare când facem click pe un obiect existent pentru a-l selecţiona, sau a-l utiliza într-o construcţie
	Mai multe selecţii sunt posibile sub cursor. Un click va provoca apariţia unui meniu permiţând precizarea obiectelor de selecţionat printre toate posibilităţile.
	Săgeata este într-o porţiune liberă a foii, şi putem defini o selecţie dreptunghiulară prin alunecare-depunere.
	Semnalează modul de deplasare al foii. Se poate intra în acest mod în orice moment menţinând tasta ctrl (Windows) sau z (Mac OS) apăsată. In acest mod, alunecare-depunere va deplasa foaia în fereastră.
	Apare în timpul deplasării foii.
	Arată că un click va crea un nou punct liber pe foaie.
	Arată că un click va crea un nou punct, care poate fi liber pe un obiect existent sau la intersecţia a două obiecte existente.
	Arată că un click va umple obiectul de sub cursor cu culoarea curentă.
	Arată că un click va schimba atributul (de exemplu culoarea, stilul, grosimea,…) obiectului sub cursor

1.4 PRIMA CONSTRUCTIE

Pentru a ilustra acest capitol [1] Iniţiere, să construim un pătrat plecând de la una dintre diagonalele sale. Lansând Cabri II Plus, un nou document gol este creat, şi putem imediat să începem o construcţie.

Să construim segmentul care va fi una dintre diagonalele pătratului. Să activăm instrumentul [Linii]Segment  făcând click pe pictograma dreptei menţinând apăsat butonul mouse-ului pentru a derula cutia cu instrumente. Să deplasăm apoi săgeata pe instrumentul segment şi să eliberăm butonul mouse-ului pentru a-l activa.

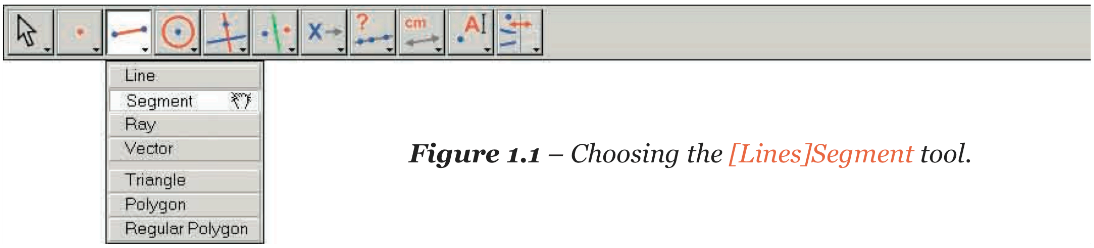


Figure 1.1 *– Choosing the [Lines]Segment tool.*

Figura 1.1 *– Selectarea instrumentului [Linii]Segment*

- Dreaptă
- Segment
- Semidreaptă
- Vector
- Triunghi
- Poligon
- Poligon regulat

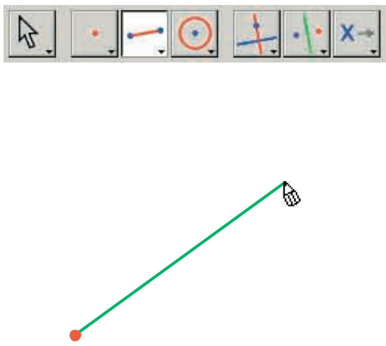


Figure 1.2 *– Constructing the first point. A preview of the final segment moves with the cursor until the second point has been created.*

Figura 1.2 *– Construcţia primului punct. O imagine a segmentului final se deplasează cu săgeata până când va fi construit al doilea punct.*

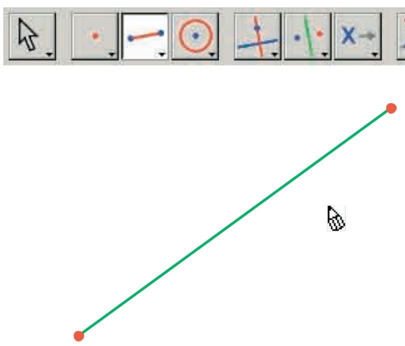


Figure 1.3 *– The segment is complete after you create the second point. The [Lines]Segment tool remains active, so you can construct another segment.*

Figura 1.3 *– Segmentul este construit după crearea celui de-al doilea punct. Instrumentul [Linii]Segment rămâne activ, permiţând construcţia unul alt segment.*

Să deplasăm acum săgeata în zona de lucru, unde ia forma . Un simplu click creează primul punct. Să continuăm deplasarea săgeţii în zona de lucru. Un segment trasat între primul punct şi cursor materializează segmentul care va fi construit. Creăm al doilea punct făcând click. Figura noastră cuprinde acum două puncte şi un segment.

Pentru a construi pătratul, putem folosi cercul având acest segment ca diametru. Centrul acestui cerc este mijlocul segmentului. Pentru a construi acest mijloc, activăm instrumentul [Construcţii]Mijloc , apoi deplasăm săgeata pe segment. Textul Mijlocul acestui segment se afişează atunci lângă cursor, care ia forma . Făcând click, construim mijlocul segmentului.

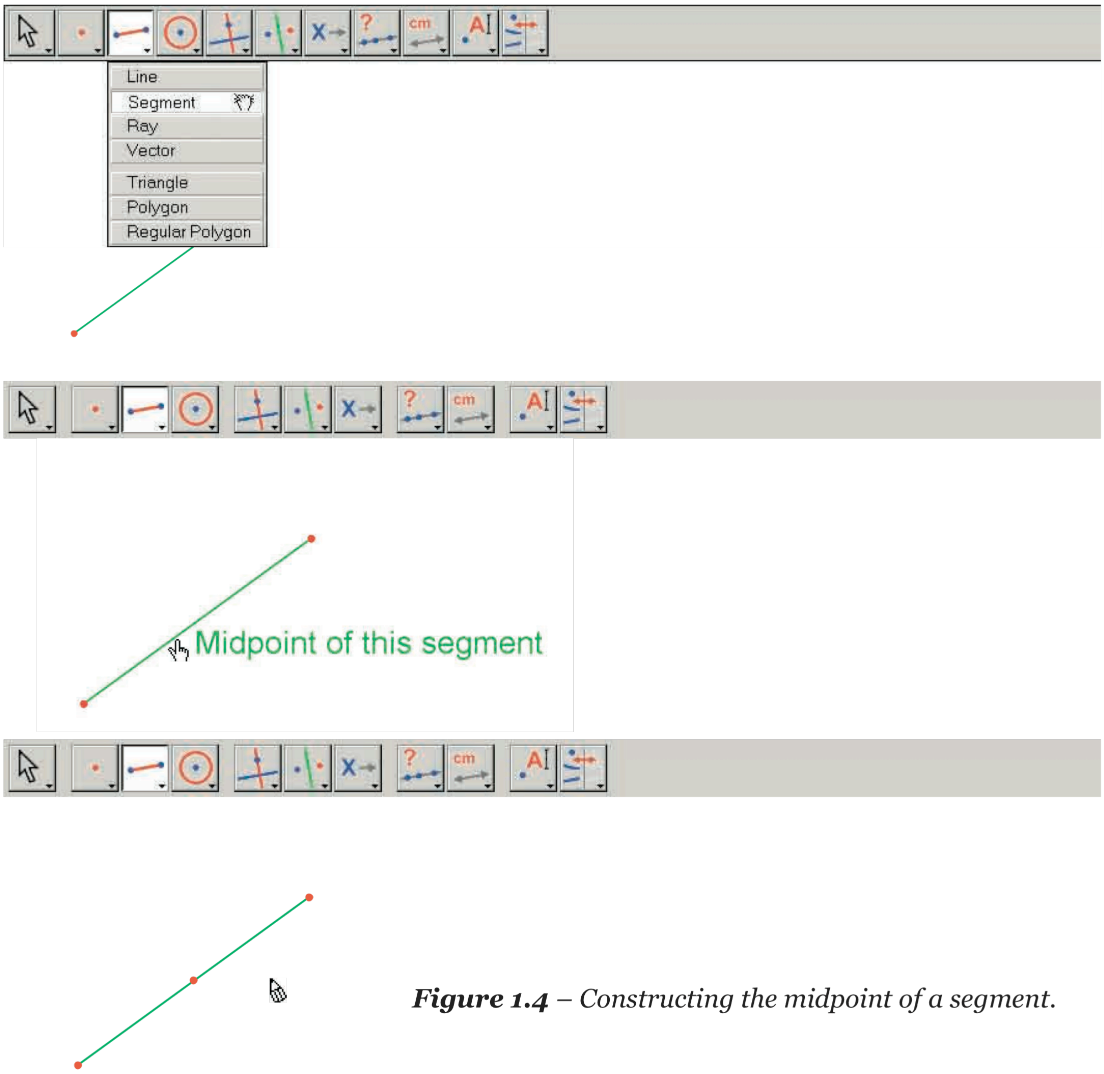
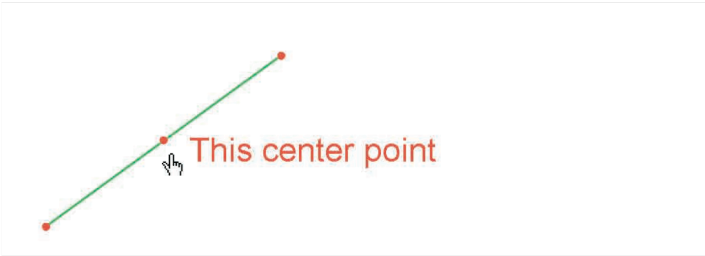


***Figure 1.4** – Constructing the midpoint of a segment.*

***Figura 1.4** – Construcţia mijlocului segmentului*

Activăm apoi instrumentul [Curbe]Cerc , şi deplasăm săgeata în apropierea mijlocului construit. Textul Acest punct ca centru se afişează atunci, şi facem click pentru a selecţiona mijlocul segmentului ca centru al cercului. Apoi, instrumentul cerc caută un punct al circumferinţei. In timpul deplasării un cerc centrat pe mijlocul segmentului şi trecând prin cursor este trasat dinamic, ca mai înainte segmentul. Când săgeata trece în apropierea unei extremităţi a segmentului, se afişează mesajul trecând prin acest punct. Facem click, şi se construieşte cercul trecând prin această extremitate.



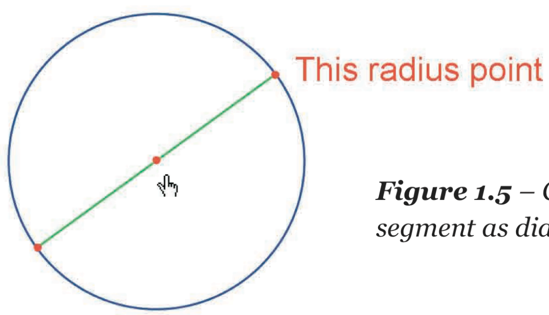
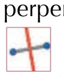


***Figure 1.5** – Constructing a circle with the given segment as diameter.*

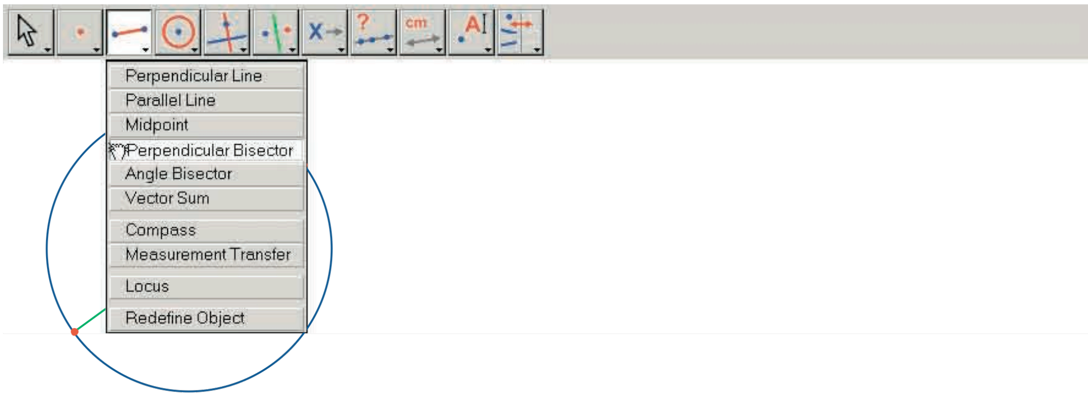
***Figura 1.5** – Construcția cercului având ca diametru segmentul*

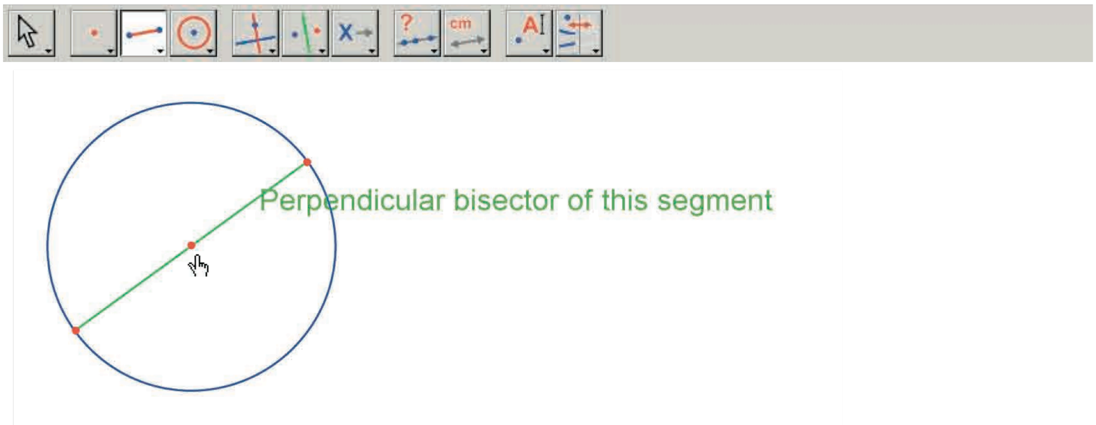
Putem activa instrumentul [Manipulare]Indică  pentru a manipula figura. Deplasându-se pe extremitățile segmentului, care sunt punctele libere ale figurii, săgeata devine  şi textul indică Acest punct. Putem deplasa punctul prin alunecare-depunere. In acest caz, ansamblul construcţiei este actualizat: segmentul este redesenat, în consecinţă mijlocul lui este deplasat, şi cercul vine după el.

Pentru a construi pătratul, ne rămâne să-i găsim cealaltă diagonală, care este diametrul cercului perpendicular pe segmentul de plecare. Vom construi mediatoarea segmentului, perpendiculară pe acesta şi trecând prin mijlocul lui. Activăm instrumentul [Construcții]Mediatoare , apoi selecţionăm segmentul ca să-i construim mediatoarea.

- Dreaptă perpendiculară
- Dreaptă paralelă
- Mijloc
- Mediatoare
- Bisectoare
- Sumă a doi vectori
- Compas
- Raport de măsură
- Loc
- Redefinirea unui obiect

Mediatoarea acestui segment





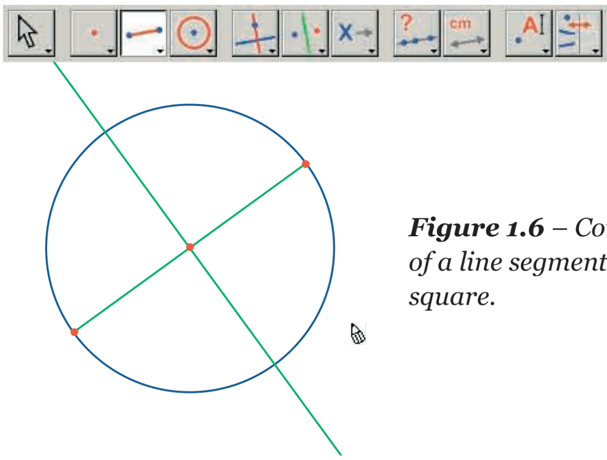
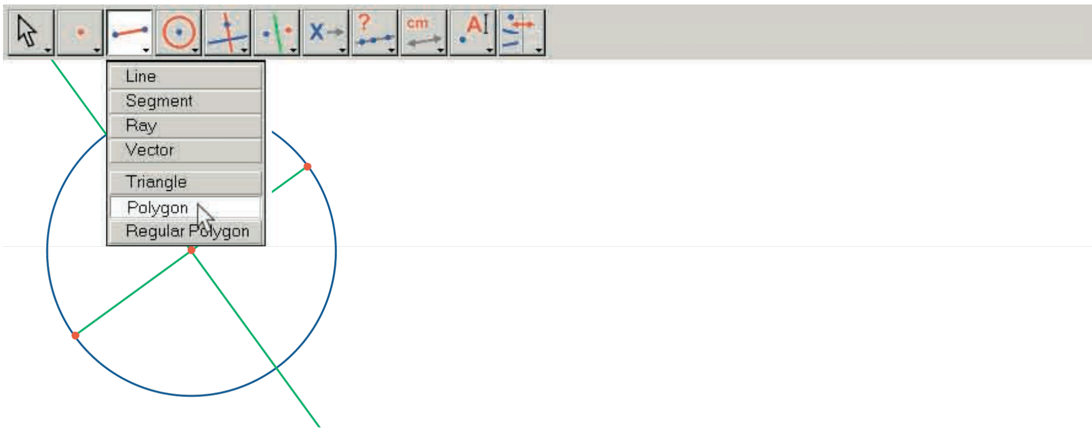
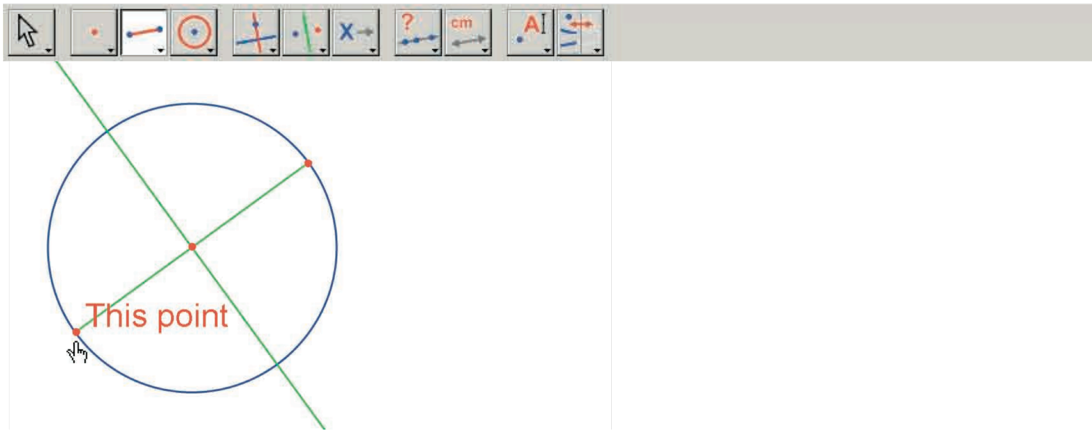


***Figure 1.6** – Constructing the perpendicular bisector of a line segment, to determine the other diagonal of the square.*

***Figura 1.6** – Construcţia mediatoarei segmentului, determinând cealaltă diagonală a pătratului.*

Pentru a termina construcţia pătratului, să activăm instrumentul [Linii]Poligon . Acest instrument aşteaptă selectarea unei secvenţe de puncte definind un poligon oarecare. Demersul este încheiat când selecţionăm din nou punctul iniţial, sau făcând dublu-click în timpul selectării ultimului punct. Cele două puncte de intersectare a cercului şi a mediatoarei încă nu sunt construite în mod explicit, dar Cabri II Plus permite construcţia lor implicită în momentul utilizării lor.





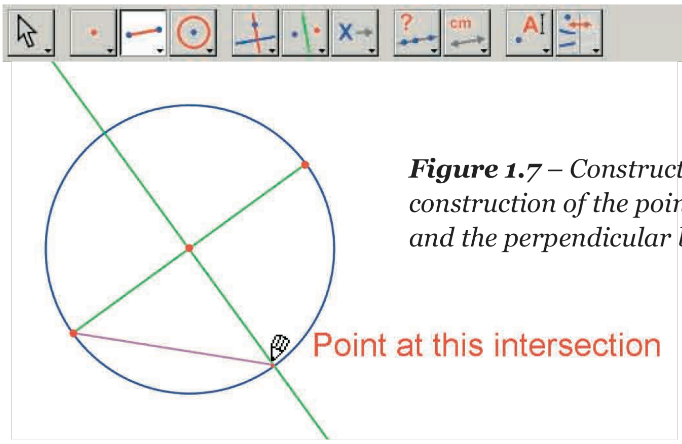


***Figure 1.7** – Constructing a square using implicit construction of the points of intersection of the circle and the perpendicular bisector.*

Acest punct

***Figura 1.7** – Construcţia pătratului, construind implicit intersecţiile între cerc şi mediatoare*

Punct în această intersecţie

Selecţionăm aşadar o extremitate a segmentului (text Acest punct) ca prim vârf al poligonului, apoi deplasăm săgeata pe una dintre cele două intersecţii între cerc şi mediatoare.

Textul indică atunci Punct în această intersecţie pentru a arăta că un click va construi punctul de intersecţie şi în acelaşi timp pentru a-l selecţiona ca următorul vârf al poligonului. Selecţionăm deci acest punct, apoi cealaltă extremitate a segmentului, apoi celălalt punct de intersecţie, şi în sfârşit selecţionăm din nou punctul iniţial pentru a termina construcţia pătratului.

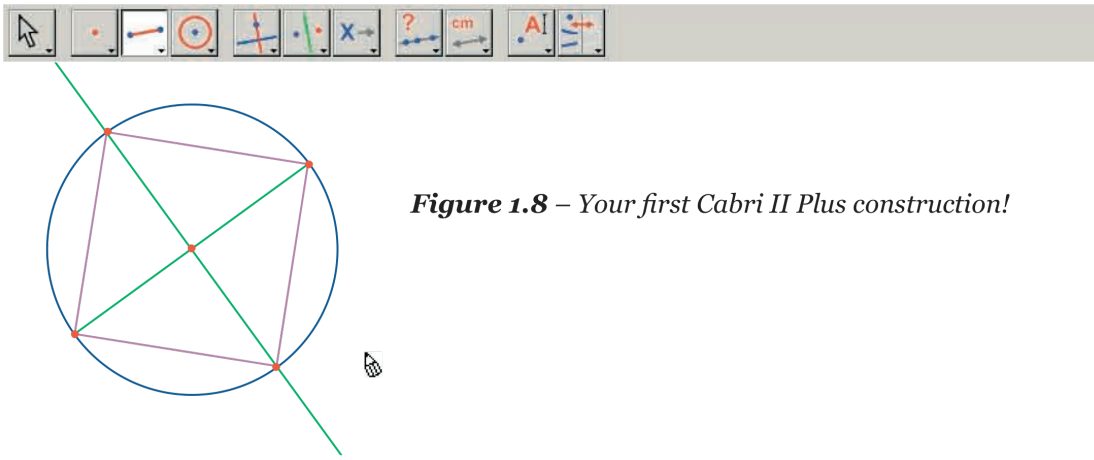


Figure 1.8 – *Your first Cabri II Plus construction!*

Figura 1.8 – *Prima dumneavoastră construcţie cu Cabri II Plus!*

CAPITOLUL 2

DREAPTA LUI EULER A TRIUNGHIULUI

Să construim un triunghi oarecare ABC apoi cele trei mediane ale acestui triunghi. Sunt dreptele care unesc un vârf cu mijlocul laturii opuse. Vom construi apoi cele trei înălţimi ale triunghiului: dreptele perpendiculare pe o latură şi trecând prin vârful opus. In sfârşit, vom construi cele trei mediatoare ale laturilor triunghiului: dreptele perpendiculare pe o latură şi trecând prin mijlocul ei. După cum se ştie, cele trei înălţimi, cele trei mediane, şi cele trei mediatoare sunt respectiv concurente, şi punctele de intersecţie sunt aliniate pe o dreaptă, numită dreapta lui *Euler*[1] a triunghiului.

Pentru a construi un triunghi, alegem instrumentul [Linii]Triunghi . Manipularea barei de instrumente este descrisă în partea [1] Iniţiere a acestui document.

Instrumentul [Linii]Triunghi _ fiind activat, este suficient atunci să creăm trei puncte noi în fereastră, făcând click în zone vide. Putem nota punctele chiar după crearea lor „din zbor" doar tastându-le numele. O dată triunghiul construit, numele pot fi deplasate în jurul punctelor, de exemplu pentru a le plasa în exteriorul triunghiului.

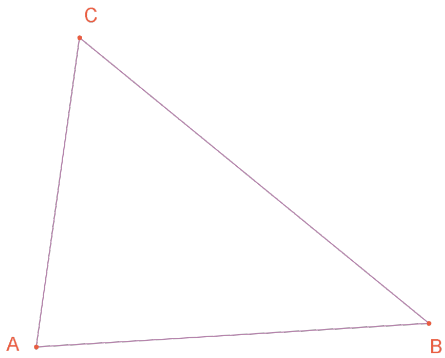


Figura 2.1 *– Triunghi ABC construit cu instrumentul [Linii]Triunghi. Punctele sunt notate din zbor tastându-le numele încă de la crearea lor.*

Pentru a deplasa numele unui obiect, se foloseşte instrumentul [Manipulare]Indică făcând numele să alunece (facem click şi deplasăm cursorul menţinând butonul mouse-ului apăsat). Pentru a schimba numele unui obiect, activăm instrumentul [Text şi Simboluri]Numeşte , apoi selecţionăm numele: apare o fereastră de editare pentru efectuarea modificărilor. Mijloacele se construiesc cu instrumentul [Construcţii]Mijloc . Pentru a construi mijlocul lui [*AB*], vom selecta succesiv pe A şi B. Mijlocul unui segment sau al unei laturi a unui poligon poate fi construit şi făcând click direct pe segment sau pe latură. Noul punct poate fi numit din zbor, să-i spunem *C′*. Procedăm la fel pentru celelalte două laturi construind mijlocul *A′* al lui [*BC*] şi mijlocul *B′* al lui [*CA*].

[1] *Léonard Euler, 1707-1783*

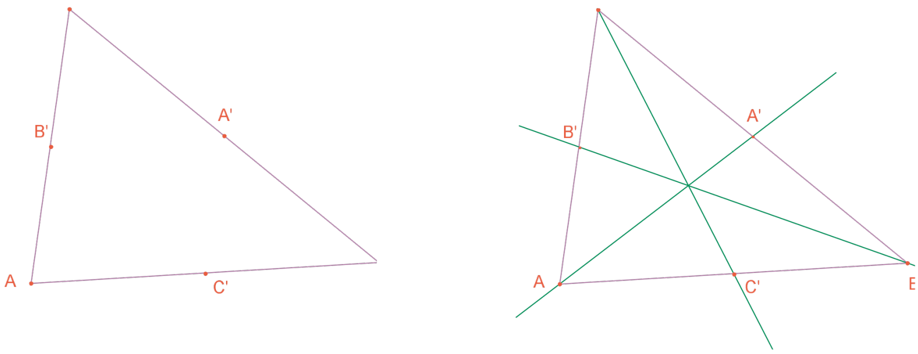


Figura 2.2 *– [La stânga] Mijloacele sunt construite cu ajutorul instrumentului* *[Construcţii]Mijloc**, care acceptă fie două vârfuri, fie un segment, fie latura unui poligon.*
[La dreapta] Medianele sunt construite cu ajutorul instrumentului *[Linii]Dreaptă**, şi culoarea lor se schimbă cu instrumentul* *[Atribute]Culori…**.*

Instrumentul [Manipulare]Indică  permite deplasarea liberă a obiectelor figurii, aici cele trei puncte *A*, *B* şi *C*. Vedem că ansamblul construcţiei este actualizat automat în timpul deplasării unuia dintre aceste puncte. Pentru a revela obiectele libere ale unei figuri, e suficient să activăm instrumentul [Manipulare]Indică , apoi să facem click într-un spaţiu gol al foii menţinând apăsat butonul mouse-ului. Obiectele libere încep atunci să clipească.

Instrumentul [Linii]Dreaptă  permite construcţia celor trei mediane. Pentru a construi dreapta (*AA′*), vom desemna succesiv *A* apoi *A′*. Instrumentul [Atribute]Culori…  permite schimbarea culorii obiectelor. Alegem culoarea din paletă, apoi selecţionăm obiectele de colorat. După ce am activat instrumentul [Puncte] Punct , să apropiem cursorul de punctul de intersecţie al celor trei mediane. In acest punct, Cabri II Plus caută să creeze punctul de intersecţie a două drepte. Cum există ambiguitate (avem aici trei drepte concurente), apare un meniu permiţându-ne să alegem pe care dintre cele două drepte să o utilizăm pentru construcţia punctului. In timpul deplasării cursorului pe intrările meniului, dreapta corespondentă apare sub formă de puncte sclipitoare. După ce am selecţionat două drepte, punctul de intersecţie s-a creat. Să-l numim G „din zbor”.

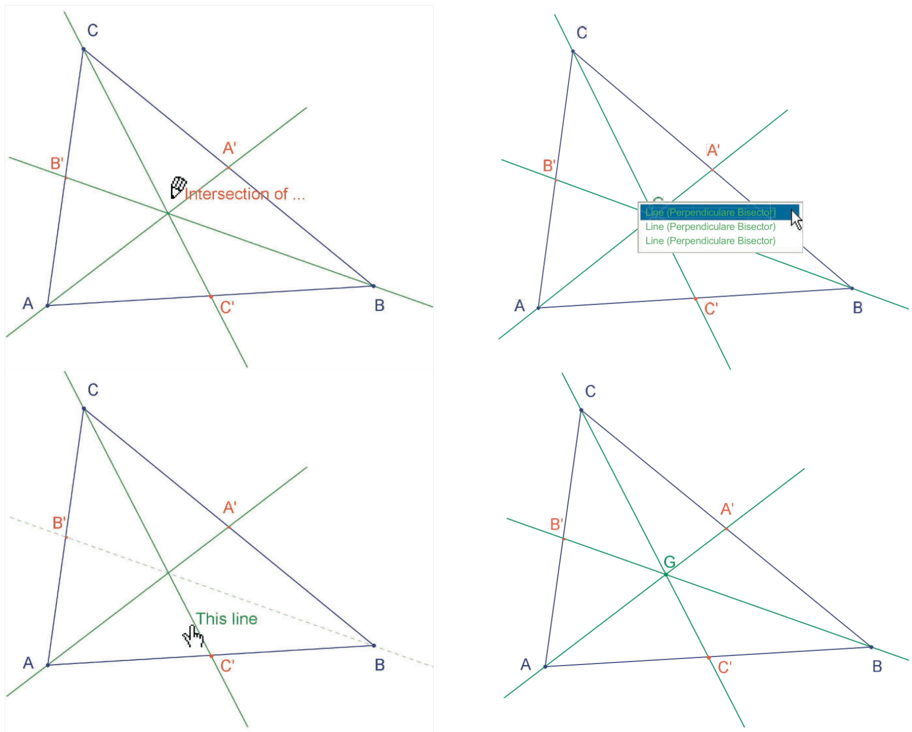
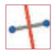


Figura 2.3 *– Construcţia punctului de intersecţie al medianelor şi rezolvarea ambiguităţilor de selecţie*

Înălţimile sunt construite cu instrumentul [Construcţii]Dreaptă perpendiculară . Acest instrument creează singura dreaptă perpendiculară pe o direcţie dată, trecând printr-un punct dat. El necesită selectarea unui punct şi a unei drepte, sau a unui segment, sau a unei semidrepte sau a unei laturi de poligon. Ordinea selecţiei nu are importanţă. Pentru a construi înălţimea pornind de la *A*, îl vom selecţiona deci pe *A*, şi latura [*BC*]. Facem la fel pentru înălţimile pornind din *B* şi din *C*. In acelaşi fel ca pentru mediane, vom alege o culoare pentru înălţimi, şi vom construi punctul lor de intersecţie *H*.

Instrumentul [Construcţii]Dreaptă perpendiculară  permite construcţia mediatoarei a două puncte, a unui segment sau a unei laturi de poligon. E suficient să selecţionăm segmentul sau extremităţile sale. Vom nota cu *O* punctul de intersecţie al celor trei mediatoare.

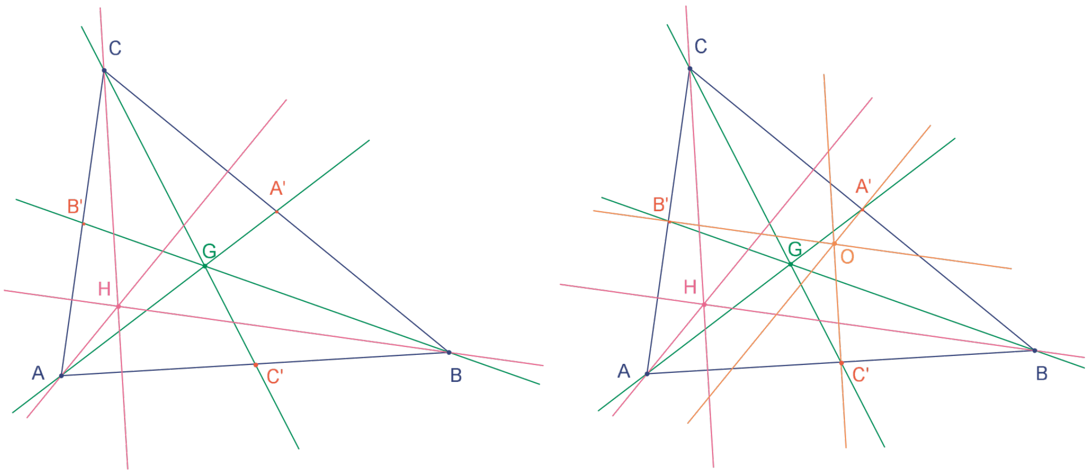
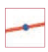


Figura 2.4 *– [La stânga] Inalţimile sunt construite cu ajutorul instrumentul [Construcţii]Dreaptă perpendiculară.*
[La dreapta] In cele din urmă, mediatoarele sunt construite cu ajutorul instrumentului [Construcţii]Mediatoare.

Instrumentul [Proprietăţi]Aliniate?  ne dă posibilitatea să verificăm dacă cele trei puncte *O, H* şi *G* sunt aliniate. Selecţionăm succesiv aceste puncte, apoi desemnăm un loc pe foaie pentru a depune rezultatul. Rezultatul este un text indicând dacă punctele sunt sau nu aliniate.

Când figura este manipulată, acest text este actualizat în acelaşi timp cu celelalte elemente ale figurii.

Cu instrumentul [Linii]Dreaptă , construim dreapta lui *Euler* a triunghiului care trece prin cele trei puncte *O, H* şi *G*, selecţionând de exemplu *O* şi *H*. Instrumentul [Atribute]Grosime…  va fi utilizat pentru a pune în valoare această dreaptă.

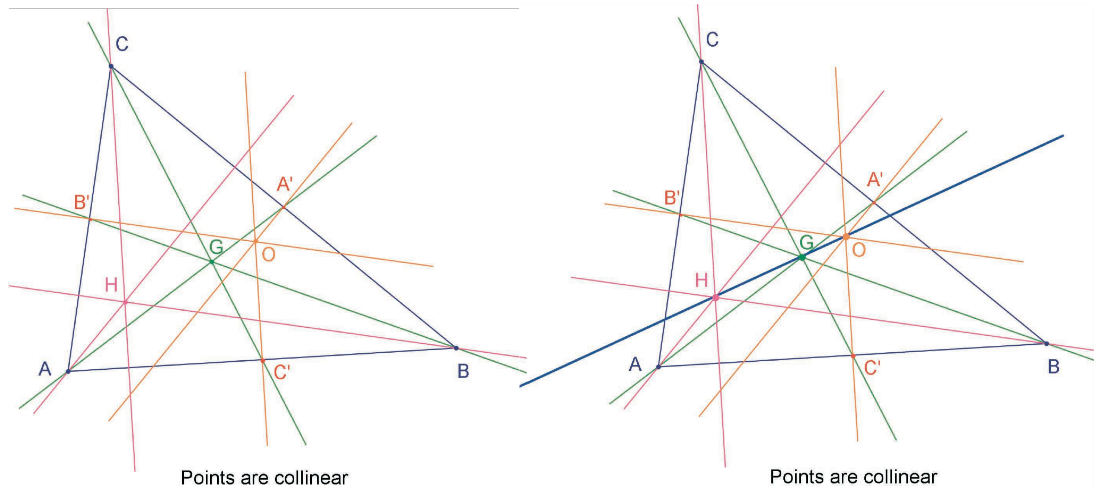


Figura 2.5 – *[La stânga] Verificarea alinierii celor trei puncte* O, H *şi* G. *Instrumentul [Proprietăţi]Aliniate? Construieşte un text Punctele sunt aliniate sau Punctele nu sunt aliniate, după starea curentă a figurii.*
[La dreapta] Dreapta lui Euler a triunghiului, pusă în evidenţă prin grosimea ei, modificată cu instrumentul [Atribute]Grosime….

Constatăm manipulând figura că punctul *G* pare să rămână între *O* şi *H*, şi chiar că poziţia lui relativă pe segmentul [*OH*] nu se schimbă. Să verificăm acest lucru măsurând lungimile *GO* şi *GH*. Să activăm instrumentul [Măsură]Distanţă sau Lungime . Acest instrument permite măsurarea distanţei între două puncte, sau a lungimii unui segment, în funcţie de obiectele selecţionate. Să-l selecţionăm deci pe *G* apoi pe *O*; distanţa *GO* apare, măsurată în centimetri. Facem la fel pentru *GH*. O dată măsurarea efectuată, putem edita textul corespunzător, de exemplu adăugând caracterele „GO=" în faţa numărului.

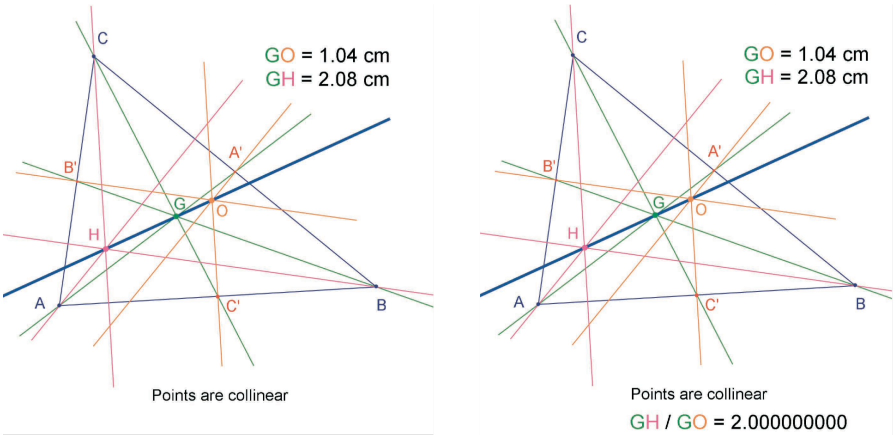
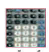


Figura 2.5 – *[La stânga] Instrumentul [Măsurare]Distanţă sau Lungime permite obţinerea distanţelor* GO *şi* GH.
[La dreapta] Cu ajutorul calculatorului – instrumentul [Măsurare]Calculator…- calculăm raportul GH/GO *şi verificăm numeric că este egal cu 2.*

Deplasând figura, vedem că *GH* pare să rămână dublul lui *GO*. Vom calcula raportul *GH/GO* pentru a verifica acest lucru. Să activăm instrumentul [Măsurare]Calculator… . Selecţionăm atunci distanţa *GH*, apoi operatorul / (bara de împărţire), şi distanţa *GO*. Facem click pe butonul = pentru a obţine rezultatul, pe care îl putem aluneca-depune pe foaie. Când un număr este selecţionat (instrumentul [Manipulare]Indică ), putem mări şi micşora numărul de zecimale afişate cu ajutorul tastelor + şi –. Afişăm astfel raportul cu vreo zece cifre după virgulă, pentru a constata că rămâne egal cu 2.

Exerciţiul 1 – Completaţi figura construind cercul circumscris triunghiului (cu centrul în *O* şi trecând prin *A*,*B* şi *C*). Se va utiliza instrumentul [Curbe]Cerc .

Exercițiul 2 – Construiți apoi „cercul celor nouă puncte” ale triunghiului. Este vorba de cercul cu centrul în mijlocul lui [*OH*] şi trecând prin mijloacele laturilor *A′*, *B′* şi *C′*, picioarele înălțimilor şi mijloacele segmentelor [*HA*], [*HB*], şi [*HC*].

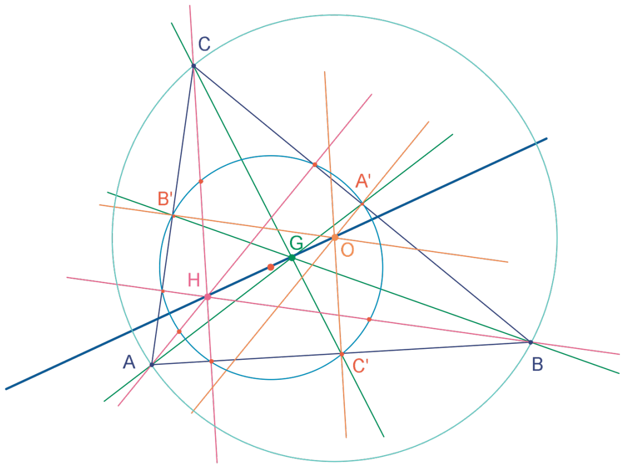


Figura 2.7 *– Figura finală, cu cercul circumscris triunghiului şi „cercul celor nouă puncte ale triunghiului.*

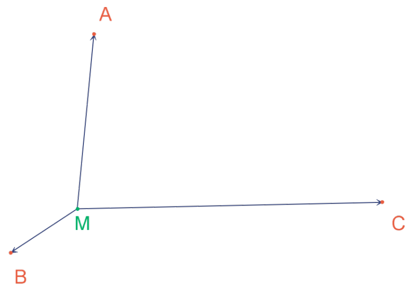
CAUTAREA PUNCTULUI MISTERIOS

In acest capitol, prezentăm o activitate care pune în aplicare posibilităţile de explorare oferite de Cabri II Plus. Plecând de la trei puncte *A, B, C* date, vom căuta punctele *M* verificând egalitatea vectorială: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Să construim patru puncte oarecare cu instrumentul [Puncte]Punct, numindu-le *A, B, C, M* „din zbor”, adică tastând-le numele chiar după crearea lor. Cabri II Plus permite crearea de vectori. Fiecare vector este, clasic, reprezentat de un segment marcat printr-o săgeată. Să construim acum un reprezentant al vectorului $\overrightarrow{MA}$ cu instrumentul [Linii]Vector, selecţionându-l mai întâi pe *M* apoi pe *A*. Acest reprezentant îşi are originea în *M*. Facem la fel pentru $\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{MC}$.

Să construim acum un reprezentant al sumei $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ activând instrumentul [Construcţii]Sumă a doi Vectori apoi selecţionând cei doi vectori apoi originea reprezentantului sumei; aici îl vom alege pe *M*. Să numim *N* extremitatea acestui reprezentant.

Construim în sfârşit un reprezentant al sumei celor trei vectori cu *M* ca origine în acelaşi fel, însumând $\overrightarrow{MN}$ (egal cu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$) şi $\overrightarrow{MC}$. Să numim *P* extremitatea acestui reprezentant.



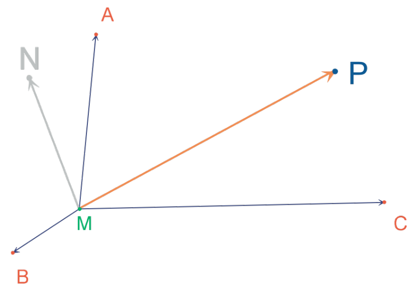


Figura 3.1 – *[La stânga] Plecând de la trei puncte oarecare* A, B *şi* C *şi de la un punct* M*, construim vectorii* $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ *şi* $\overrightarrow{MC}$.
[La dreapta] Cu ajutorul instrumentului [Construcţii]Sumă a doi Vectori, construim $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, *şi* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Putem acum să căutăm soluţiile problemei prin manipulare. Pentru a face acest lucru, activăm instrumentul [Manipulare]Indică şi deplasăm punctul *M*. Suma celor trei vectori este actualizată în fiecare clipă în timpul deplasării.

In funcţie de poziţia lui *M* în raport cu punctele *A, B* şi *C*, observăm regula şi orientarea vectorului $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Putem atunci să facem presupunerile următoare (printre altele):

- O singură poziţie a lui *M* permite anularea sumei celor trei vectori: problema are o singură soluţie. Această soluţie este în interiorul triunghiului *ABC*.
- Patrulaterul *MANB* este un paralelogram.
- Patrulaterul *MCPN* este un paralelogram.
- Pentru ca suma să fie nulă, vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MC}$ trebuie să fie coliniari, cu aceleaşi măsuri şi cu sensuri opuse.
- (*MP*) trece întotdeauna prin acelaşi punct, şi acest punct este soluţia problemei.
- Extremitatea *P* a reprezentantului sumei este un punct dependent de *M*. Definim deci astfel o transformare, care îl asociază pe *P* lui *M*. Soluţia problemei este un punct invariant al acestei transformări.

Conform constatărilor făcute, căutarea se va orienta într-o direcţie sau alta.

Să presupunem de exemplu că am observat că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MC}$ trebuie să fie opuşi. Ne punem atunci o altă problemă: pentru ce poziţii ale lui *M* aceşti doi vectori sunt coliniari? Să-l deplasăm pe *M* astfel încât cei doi vectori să fie coliniari. Observăm că *M* parcurge o dreaptă, şi că această dreaptă trece prin *C* şi de asemenea prin mijlocul lui [*AB*]. Această dreaptă este deci mediana din *C* a triunghiului. *A, B* şi *C* jucând roluri simetrice, punctul este şi pe celelalte două mediane şi deci în cele din urmă la intersecţia celor trei mediane.

Pentru o activitate în clasă, le-ar mai rămâne elevilor să propună o construcţie a punctului soluţie, şi să demonstreze această ipoteză elaborată prin explorare.
Puterea de convingere a unei construcţii dinamice este mult mai mare decât cea a unei figuri statice realizate pe o foaie de hârtie. Intr-adevăr, ajunge să o manipulezi pentru a verifica ipoteza într-un mare număr de cazuri. O ipoteză care rămâne validă după manipulare va fi corectă în marea majoritate a cazurilor.

Pentru o mai bună utilizare în clasă, va fi interesantă abordarea acestor teme cu elevii (printre altele):

- O construcţie dinamică vizual corectă este corectă?
- O construcţie dinamică corectă constituie un răspuns la problemă?
- In ce moment un raţionament poate fi considerat demonstraţie?
- Ce îi lipseşte unei construcţii dinamice corecte pentru a face din ea o demonstraţie?
- Demonstraţia trebuie să se bazeze pe procesul de elaborare a figurii?

Exerciţiul 3 – Extindeţi problema la patru puncte, căutând punctele *M* astfel încât:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$$

Exerciţiul 4 – Enumeraţi ansamblul de „căi de explorare" şi de demonstraţii pentru problema iniţială (trei puncte) accesibile unui elev în prima clasă de liceu.

Exerciţiul 5 – Studiaţi şi construiţi punctul *M* cu proprietatea că suma (*MA* + *MB* + *MC*) a distanţelor la trei puncte *A, B, C* date să fie minimă. Este vorba despre punctul lui *Fermat*[1] al triunghiului *ABC*.

[1] *Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

CHAPTER 4

PATRULATERUL LUI VARIGNON

In acest capitol, prezentăm câteva construcţii legate de teorema lui *Varignon*[1].

Să construim un patrulater oarecare *ABCD*. Activăm instrumentul [Linii]Poligon , apoi selecţionăm patru puncte, numite *A, B, C* şi *D* „din zbor”. Pentru a termina poligonul, îl selecţionăm din nou pe *A* după ce l-am construit pe *D*.

Construim apoi mijloacele *P* al lui [*AB*], *Q* al lui [*BC*], *R* al lui [*CD*], şi *S* al lui [*DA*] cu instrumentul [Construcţii]Mijloc . Acest instrument necesită selectarea lui *A* apoi *B* pentru a construi mijlocul lui [*AB*]. Putem şi să selectăm direct segmentul [*AB*] dacă există deja, ca segment sau ca latură a unui poligon cum este cazul aici.

Construim în sfârşit patrulaterul *PQRS* cu instrumentul [Linii]Poligon .

Manipulând construcţia cu instrumentul [Manipulare]Indică , observăm că *PQRS* pare să fie mereu un paralelogram. Îl vom întreba pe Cabri II Plus despre paralelismul lui [*PQ*] şi [*RS*], ca şi al lui [*PS*] şi [*QR*], folosind instrumentul [Proprietăţi]Paralelă? . Selecţionăm laturile [*PQ*] apoi [*RS*], şi este afişat un text, confirmând că cele două drepte sunt paralele. Verificăm la fel că [*PS*] şi [*QR*] sunt paralele.

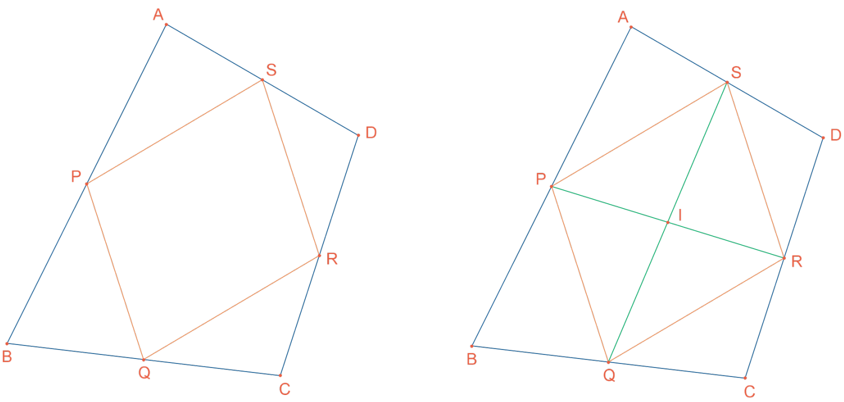


Figura 4.1 – *[La stânga]Plecând de la un patrulater oarecare* ABCD*, construim patrulaterul* PQRS *ale cărui vârfuri constituie mijloacele laturilor lui* ABCD*.*
[La dreapta] Construcţia diagonalelor lui PQRS*, despre care arătăm că se taie în mijloc.*

Să construim deci cele două diagonale [*PR*] şi [*QS*] cu ajutorul instrumentului [Linii]Segment , şi punctul lor de intersecţie *I* cu instrumentul [Puncte]Punct . Există mai multe feluri de a demonstra că *I* este şi mijlocul lui [*PR*] şi al lui [*QS*], şi deci că *PQRS* este un paralelogram. De exemplu cu un calcul baricentric: *P* este baricentrul lui {(*A*,1), (*B*,1)} şi *R* al lui {(*C*,1), (*D*,1)}, şi deci mijlocul lui [PR] este baricentrul lui {(*A*,1), (*B*,1), (*C*,1), (*D*,1)}, şi se întâmplă la fel cu mijlocul lui [*QS*]. Deci cele două mijloace se confundă într-un punct: punctul de intersecţie *I*.

Teorema lui Varignon este următoarea: patrulaterul *PQRS* construit pornind de la mijloacele unui patrulater *ABCD* oarecare este un paralelogram, şi aria lui este jumătate din cea a lui *ABCD*.

[1] *Pierre Varignon, 1654-1722*

Exerciţiul 6 – am stabilit mai sus prima parte a teoremei. Demonstraţi a doua parte relativă la aria lui *PQRS*. Vă puteţi ajuta de ***figura 4.2***.

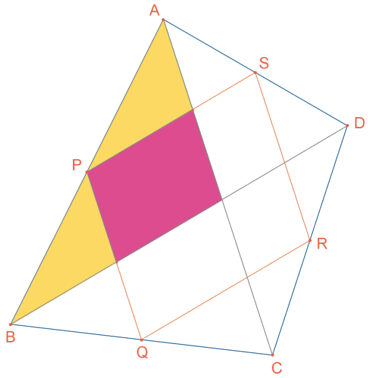


Figura 4.2 *– Construcţie permiţând stabilirea celei de a doua părţi a teoremei*

Să le lăsăm acum pe A, B şi C fixe, şi să-l deplasăm pe *D* astfel încât să-l facem pe *PQRS* dreptunghi. Cum ştim deja ce este un paralelogram, este suficient ca unul dintre unghiurile sale să fie drept ca să putem afirma că e dreptunghi. Să măsurăm deci unghiul în *P*, cu ajutorul instrumentului [Măsură]Măsură de Unghi . Acest instrument necesită selectarea a trei puncte care definesc un unghi, vârful fiind al doilea punct. De exemplu aici vom selecta punctele *S*, *P* (vârful unghiului) şi *Q*.

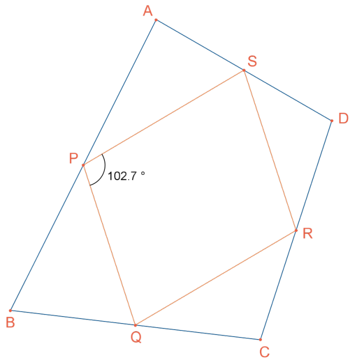
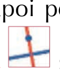
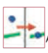


Figura 4.3 *– Măsurăm unghiul în* P *al paralelogramului* PQRS.

Instrumentul [Măsurare]Măsurare de Unghi  poate să ofere şi măsura unui unghi marcat în prealabil cu instrumentul [Text şi Simboluri]Marchează un Unghi . Acest instrument necesită trei puncte care definesc unghiul, în aceeaşi ordine ca pentru instrumentul [Măsură]Măsură de unghi .

Deplasându-l pe *D* astfel încât *PQRS* să fie un dreptunghi, soluţiile găsite par sensibil aliniate. De fapt, dacă construim diagonalele [*AC*] şi [*BD*] ale patrulaterului iniţial vedem că laturile lui *PQRS* sunt paralele cu aceste diagonale, şi deci că *PQRS* nu este dreptunghi decât dacă şi numai dacă [*AC*] şi [*BD*] sunt perpendiculare. Îl vom redefini acum pe *D* pentru ca *PQRS* să fie tot un dreptunghi. Să trasăm dreapta (AC) cu instrumentul [Linii]Dreaptă  selecţionând *A* şi *C*, apoi perpendiculara pe această dreaptă trecând prin *B*, cu instrumentul [Construcţii]Dreaptă perpendiculară  selecţionându-l pe *B* şi dreapta (*AC*).

D este în momentul de faţă un punct liber în plan. Ii vom modifica definiţia, şi vom face din el un punct liber pe perpendiculara pe [*AC*] care trece prin *B*. Activăm instrumentul [Construcţii]Redefineşte un obiect , apoi selecţionăm *D*. Apare un meniu care indică diferitele opţiuni de redefinire pentru *D*. Alegem Punct pe un obiect, apoi selecţionăm un punct pe perpendiculară. *D* se deplasează atunci în acest punct, şi este de acum înainte constrâns să rămână pe dreaptă. Redefinirea este un mijloc de explorare foarte puternic, care ne permite să înlăturăm sau să adăugăm grade de libertate elementelor unei figuri fără să trebuiască să o recreăm în întregime.

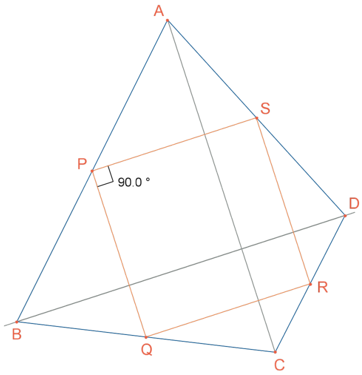


Figura 4.4 – *Punctul* D *este acum redefinit astfel încât* PQRS *să fie mereu dreptunghi. Acest punct mai păstrează un grad de libertate; este mobil pe o dreaptă.*

Exercițiul 7 – Găsiți o condiție necesară și suficientă pentru ca *PQRS* să fie un pătrat. Redefiniți-l încă o dată pe *D* astfel încât construcția să nu ofere decât pătrate.

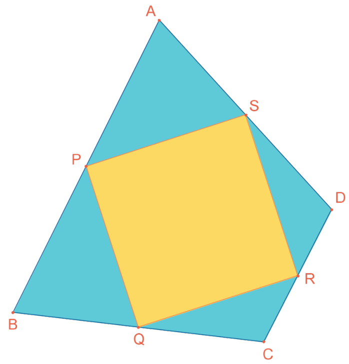


Figura 4.5 – *Aici, punctul* D *nu mai are niciun grad de libertate, și* PQRS *este acum mereu pătrat.*