

CABRI® II PLUS



Creator de Instrumente Matematice

**APROFUNDARE**

# BINE ATI VENIT !

Bine ați venit în partea [Aprofundare](#) a manualului de utilizare a lui Cabri II Plus.






Această secțiune, împărțită în trei capitole, prezintă probleme matematice de nivel superior care devin, datorită utilizării lui Cabri II plus, ludice la explorare și ușor de rezolvat. Aceste probleme se adaugă la Tutorialul pentru utilizatorii dornici să continue descoperirea software-ului.




Aceste exerciții sunt concepute pentru nivelul secundar și universitar. Sunt independente unele de altele și cititorul este invitat să se inspire din metodele de construcție și să facă exercițiile corespunzătoare. Exercițiile marcate cu un asterisc au un grad de dificultate mai mare.

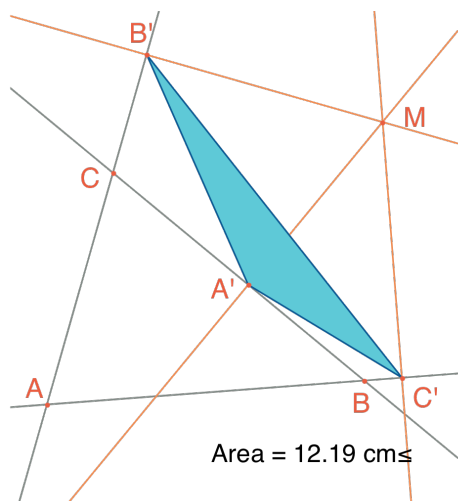
# CUPRINS

<b>1. TRIUNGHURI PODARE</b>	<b>4</b>
<b>2. FUNCTII</b>	<b>9</b>
<b>3. PAVAJE</b>	<b>14</b>


## TRIUNGHIURI PODARE


Fie trei puncte oarecare  $A$ ,  $B$  și  $C$  construite cu instrumentul [Puncte]Punct . Construim mai întâi cele trei drepte  $(AB)$ ,  $(BC)$  și  $(CA)$  cu instrumentul [Linii]Dreaptă . Fie acum un punct oarecare al planului  $M$  și proiecțiile ortogonale respective  $C'$ ,  $A'$  și  $B'$  ale lui  $M$  pe aceste trei drepte. Aceste puncte sunt obținute construind dreptele perpendiculare pe  $(AB)$ ,  $(BC)$  și  $(CA)$  care trec prin  $M$ , cu ajutorul instrumentului [Construcții]Dreaptă perpendiculară , apoi creând punctele de intersecție ale fiecărei dintre aceste drepte cu perpendiculara corespunzătoare, cu ajutorul instrumentului [Puncte]Punct . Instrumentul [Puncte]Punct  permite construcția implicită a intersecțiilor între obiecte. E suficient să deplasăm cursorul aproape de o intersecție și programul afișează Punct în această intersecție, sau Intersecția... apoi un meniu în caz de ambiguitate.


Cele trei puncte  $A'$ ,  $B'$  și  $C'$  definesc un triunghi pe care îl vom trasa utilizând instrumentul [Linii]Triunghi . Este un triunghi podar relativ la  $ABC$ . Putem colora interiorul triunghiului cu instrumentul [Atribute]Umples . Ne interesează aria acestui triunghi în funcție de poziția punctului  $M$ . Aria triunghiului se obține cu instrumentul [Măsură]Arie . Acest instrument oferă o arie geometrică întotdeauna pozitivă, care nu ține seama de orientarea triunghiului. Obținem o măsură în  $\text{cm}^2$  pe care o putem plasa în mod liber pe foaie. Meniul contextual obținut printr-un click-dreapta pe număr permite afișarea ariei „algebrice”, al cărei semn depinde de orientarea triunghiului.

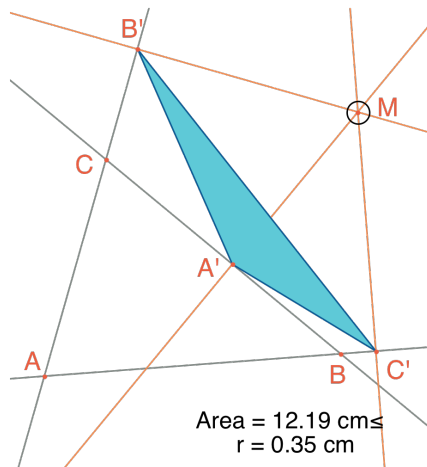


**Figura 1.1** – Triunghiul podar corespunzător lui  $M$ , și aria lui.

Vom studia variația ariei lui  $A'B'C'$  în funcție de poziția lui  $M$ . Pentru a face acest lucru, există mai multe strategii. Putem de exemplu să activăm urma punctului  $M$  (instrumentul **[Text și simboluri]Urmă** ) , apoi să-l deplasăm încercând să păstrăm constantă aria lui  $A'B'C'$  pentru un mare număr al pozițiilor lui  $M$ .

Aici vom adopta această strategie și vom trasa cercul cu centrul în  $M$  având o arie proporțională cu cea a lui  $A'B'C'$ . Pentru a face aceasta, trebuie mai întâi calculată raza cercului, proporțională cu rădăcina pătrată a ariei triunghiului. Să activăm instrumentul **[Măsurare]Calculator**  și să introducem expresia  $\sqrt{a}$  apoi să selecționăm numărul reprezentând aria triunghiului pentru a-l include în expresie, care devine  $\sqrt{a}$ . Să închidem apoi paranteza și să împărțim la 10 pentru a evita să avem cercuri prea mari. Expresia în calculator este acum  $\sqrt{a}/10$ . O evaluăm făcând click pe butonul  $=$ , apoi efectuăm o alunecare-depunere a rezultatului, pentru a-l plasa pe foaie.



Pentru a trasa un cerc cu centrul în  $M$  și având raza calculată anterior, activăm instrumentul **[Construcții]Compas** . Selecționăm numărul calculat plasat anterior pe foaie, apoi punctul  $M$ . Obținem atunci cercul centrat în  $M$  cu raza căutată. Putem deja observa vizual evoluția ariei triunghiului în funcție de poziția lui  $M$ .

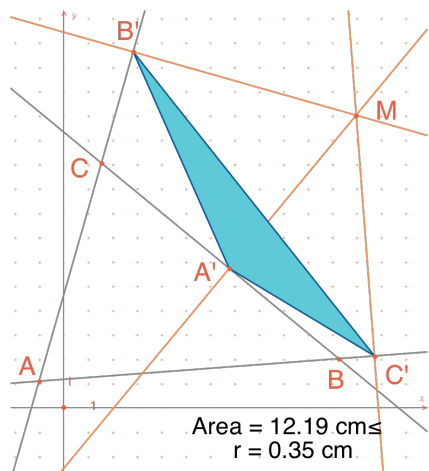


**Figura 1.2** – Desenăm un cerc centrat în  $M$  cu aria proporțională cu

cea a lui  $A'B'C'$ .

Vom defini acum o grilă, apoi îl vom redefini pe  $M$  ca punct pe această grilă, și vom trasa în sfârșit toate cercurile reprezentând aria triunghiului podar pentru  $M$  parcurgând toate punctele grilei. Pentru a defini o grilă, este necesar un sistem de axe. Vom considera axele date, prezente, dar invizibile, în orice figură. Le facem


vizibile alegând opțiunea **[Atribute]Arată Axele** . Apoi activăm instrumentul **[Atribute]Grilă**  și selecționăm axele. Apare o grilă de puncte.




**Figura 1.3** – Construim o grilă pornind de la axele date din figură,

apoi îl redefinim pe  $M$  ca punct liber pe grilă.

Punctul  $M$  este un punct liber în plan; îl vom redefini pentru a-l constrânge să rămână pe grilă. Să activăm

instrumentul **[Construcții]Redefinește un Obiect** , apoi să-l selecționăm pe  $M$ , să alegem opțiunea **Punct pe un obiect** din meniul care apare atunci, apoi să selecționăm un punct de pe grilă. Punctul  $M$  este acum constrâns să nu se deplaseze decât pe grilă.

Instrumentul [Construcții]Loc  permite construcția ansamblului de cercuri obținute prin deplasarea lui  $M$  pe toată grila. Selecționăm cercul apoi punctul  $M$ , pentru a obține locul cercurilor când  $M$  variază pe grilă.

Demonstrăm (vezi spre exemplu *Geometria* lui Marcel Berger, editura CEDIC, item 10.4.5) că curbele date de valoarea nivelului ariei triunghiului podar sunt cercuri al căror centru este același cu cel al cercului circumscris lui  $ABC$ . În particular, aria triunghiului  $A'B'C'$  este nulă dacă  $M$  este pe cercul circumscris lui  $ABC$ , sau, la fel, punctele  $A', B'$  și  $C'$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $M$  este pe cercul circumscris lui  $ABC$ .

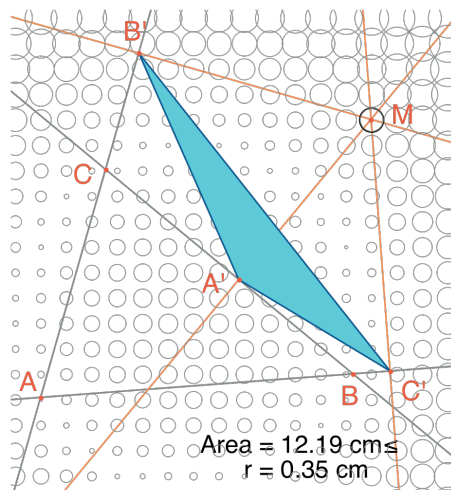




Figura 1.4 – Repartizarea ariei triunghiului podar în funcție de poziția lui  $M$ .

**Exercițiul 1** - Pentru  $M$  pe cercul circumscris triunghiului  $ABC$ , cele trei puncte  $A', B'$  și  $C'$  sunt deci coliniare și dreapta care trece prin  $A', B', C'$  se numește dreapta lui *Simson* sau dreapta lui *Wallace* asociată punctului  $M$ .

Acest rezultat mult timp atribuit pe nedrept lui *Simson*, a fost de fapt publicat de *Wallace* în 1799. Construiți înfășurătoarea dreptelor lui *Simson* (utilizați instrumentul [Construcții]Loc ). În lipsă, acest instrument oferă, în cazul dreptelor, nu ansamblul dreptelor, ci înfășurătoarea lui. Această curbă, invariantă printr-o rotație de unghi  $120^\circ$ , se numește deltoadă, căci are forma literei  $\Delta$ : este deltoada lui *Steiner*. Ea este tangentă la cele trei drepte  $(AB), (BC), (CA)$ . Este o curbă algebrică de gradul 4. Puteți să verificați aceasta cerând ecuația ei cu ajutorul instrumentului [Măsurare]Coordonate sau Ecuație .

**Exercițiul 2** – Pentru deltoada din exercițiul precedent, construiți centrul, cele trei puncte de tangență cu cele trei drepte, cele trei vârfuri ale curbei, ca și cel mai mare cerc înscris în curbă.

<sup>1</sup> Robert Simson, 1687-1768

<sup>2</sup> William Wallace, 1768-1843

<sup>3</sup> Jakob Steiner, 1796-1863

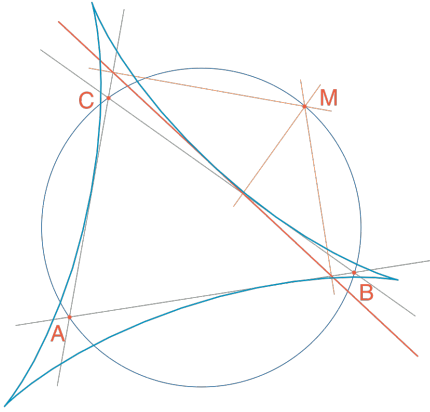







Figura 1.5 – Înălșurătoarea dreptelor lui Simson ale unui triunghi  $ABC$  se numește deltoidă. Ea are aceleași simetrii ca un triunghi echilateral.



## FUNCTII

Datorită sistemului său de axe și instrumentului expresie, Cabri II Plus ne permite să construim ușor graficul unei funcții, și să folosim acest grafic pentru a o studia. Vom studia în acest capitol o funcție polinomială de gradul 3.

$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

Mai întâi, să facem vizibile axele de coordonate, cu [\[Atribute\]Arată Axele](#) . Apoi, să creăm expresia corespunzătoare pe foaie. O expresie depusă pe foaie poate fi apoi calculată pentru diferite valori ale variabilelor sale. Aici, să activăm [\[Text și simboluri\]Expresie](#)  și să introducem  $x^3 - 2x + 1/2$ . Numele variabilelor admise în expresii sunt literele  $a, b, c, \dots, z$ . Să plasăm un punct  $P$  pe axa absciselor (cu instrumentul [\[Puncte\]Punct](#) ). Obținem coordonatele lui prin [\[Măsurare\]Coordonate sau Ecuție](#)  selectându-l pe  $P$ . Textul care afișează coordonatele este inițial atașat lui  $P$ , și se va deplasa cu punctul. Cu instrumentul [\[Manipulare\]Indică](#)  putem să detașăm coordonatele punctului  $P$  și să le plasăm oriunde pe foaie. Putem și să le corelăm din nou apropiindu-le de punct.

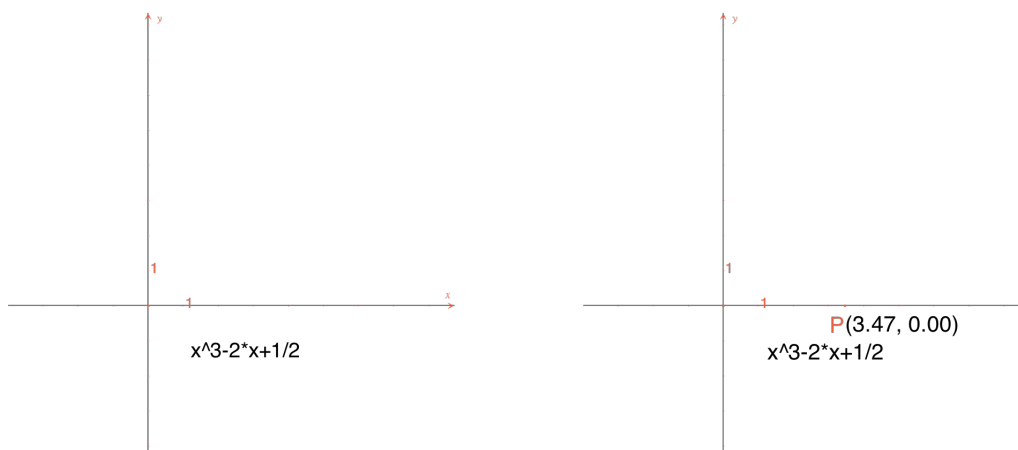



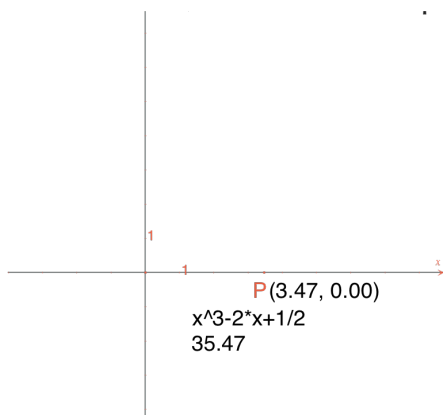
Figura 2.1

– [La Stânga]. Observăm expresia corespunzătoare funcției de studiat.



[La dreapta]. Plasăm un punct  $P$  pe axa absciselor și afișăm coordonatele lui cu [\[Măsurare\]Coordonate sau Ecuție](#).

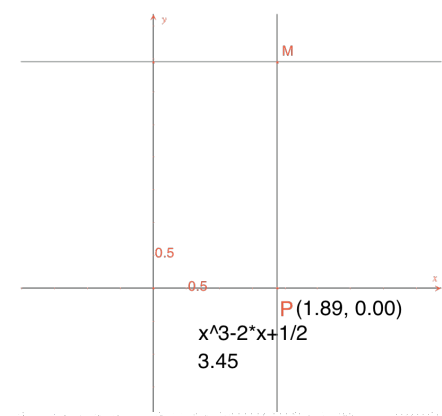
Să calculăm apoi valoarea lui  $f(x)$  unde  $x$  reprezintă abscisa lui  $P$ . Pentru aceasta, să activăm instrumentul

[Măsurare]Aplică o Expresie  și să selecționăm abscisa lui  $P$  în textul care îi reprezintă coordonatele.




**Figura 2.2** – Instrumentul [Măsurare]Aplică o Expresie este utilizat pentru a calcula valoarea lui  $f(x)$  când  $x$  este abscisa lui  $P$ .

Ducem la loc apoi această valoare pe axa ordonatelor, cu instrumentul [Construcții]Restabilire a măsurării , selectând valoarea de adus la loc, apoi axa ordonatelor. E suficient apoi să construim paralele la axe care trec prin aceste două puncte [Construcții]Drepte paralele ) și obținem la intersecția lor punctul  $M$  de coordonate  $(x, f(x))$ . Pe **figura 2.3**, l-am deplasat pe  $P$  în raport cu poziția lui din **figura 2.2** ca să aducem punctul axei ordonatelor obținut prin restabilire a măsurării în porțiunea vizibilă a foii.

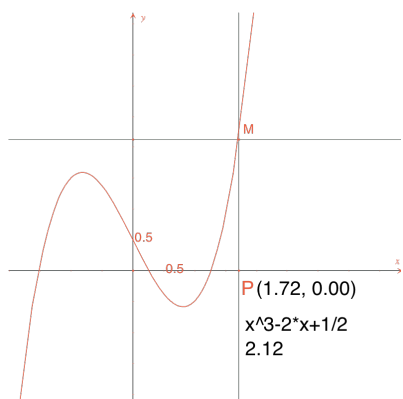


**Figura 2.3** – Construcția punctului  $M(x, f(x))$ .

Graficul funcției este obținut afișând locul geometric al punctului  $M$  când  $P$  descrie axa absciselor. Îl construim

cu instrumentul [Construcții]Loc  selectându-l pe  $M$  apoi pe  $P$ . Pentru a potrivi mai bine partea interesantă

a graficului funcției, putem deplasa originea reperului și unitățile, prin alunecarea-depunerea originii reperului sau a unei unități oarecare.




**Figura 2.4** – Instrumentul [Construcții]Loc permite în final construcția


graficului funcției.

Vom construi o aproximație a tangentei la curbă într-un punct. Pentru  $h$  mic, știm că

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Din punct de vedere geometric, această aproximație înseamnă să luăm ca direcție a tangentei la curbă în punctul de abscisă  $x$ , pe aceea a dreptei care leagă punctele de abscisă  $x-h$  și  $x+h$ . Cu instrumentul [Texte și


simboluri]Număr , luăm o valoare pentru  $h$ , de exemplu aici 0,3 care convine aici pentru aceste construcții. Vom putea apoi să o edităm pentru a o înlocui cu o valoare mai mică dând o aproximație mai bună. Construim apoi un punct  $A$  pe axa absciselor și cercul cu centrul  $A$  și raza  $h$ . Acest cerc se obține cu


instrumentul [Construcții]Compas  selectându-l pe  $h$  apoi pe  $A$ . Cele două intersecții ale cercului cu centrul  $A$  și raza  $h$  cu axa absciselor au ca abscise  $x-h$  și  $x+h$ , dacă  $x$  este abscisa lui  $A$ . Să trasăm cele trei

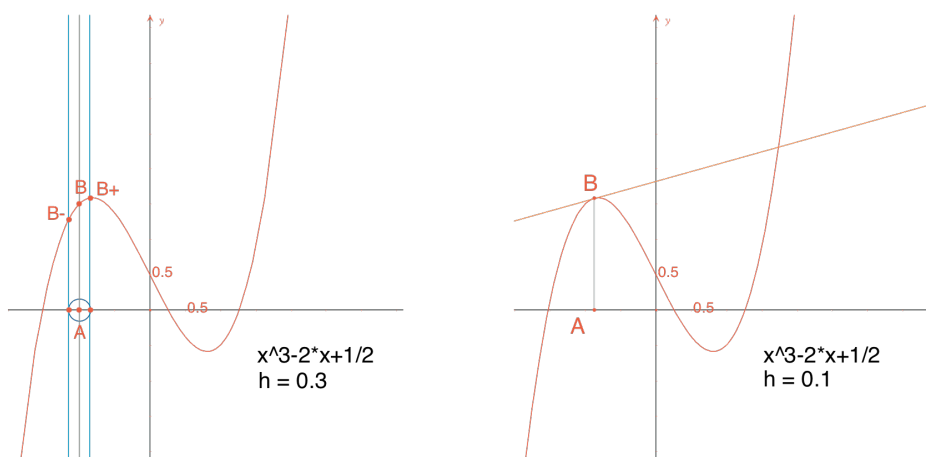
drepte paralele cu axa ordonatelor ([Construcții]Dreaptă Paralelă ) și trecând prin cele două puncte de intersecție și punctul  $A$ .

Intersecțiile acestor trei drepte cu curba oferă punctele  $B, B, B$  ale curbei cu abscisele respective  $x-h, x$  și  $x+h$ .

Cum figura începe să devină puțin complexă, să ascundem elementele care nu ne mai folosesc. Activăm

instrumentul [Atribute]Ascunde/Arată  și selecționăm elementele de ascuns. Aici, vom ascunde  $P, M$ , cele două drepte de construcție a lui  $M$ , coordonatele lui  $P$  și imaginea abscisei lui  $P$  prin funcție. Obiectele ascunse



nu sunt vizibile sub formă de linii punctate decât atunci când instrumentul [Atribute]Ascunde/Arată  este activ. Pentru a face vizibil un obiect ascuns, e suficient să-l selecționăm încă o dată cu același instrument.



**Figura 2.5** – [La

Stânga]. Considerând intersecția cercului cu centrul  $A$  și raza  $h$ , construim cele trei puncte ale curbei, de abscisă  $x - h$ ,  $x$  și  $x + h$ .

[La Dreapta]. Aproximarea tangentei în  $B$  este atunci paralela la dreapta  $(B B)$  trecând prin  $B$ .

Construim această dreaptă cu instrumentul [Linii]Dreaptă  apoi paralela [Construcții]Dreaptă Paralelă . Ascundem apoi dreapta  $(B B)$  și celelalte elemente de construcție pentru a nu mai lăsa să se vadă decât  $h$ ,  $A$ ,  $B$  și tangenta în  $B$ . Vedem că valoarea  $h = 0,3$  oferă deja o foarte bună aproximație a tangentei. Putem totuși să o ameliorăm micșorându-l pe  $h$ , de exemplu luând  $0,0001$ .

Deplasarea punctului  $A$  pe axă permite să determinăm vizual cele trei rădăcini ale ecuației  $f(x) = 0$ , cele două extreme locale ale lui  $f$  și punctul de inflexiune al curbei.

Pentru informare, cele trei soluții ale lui  $f(x) = 0$  sunt aproximativ  $r_1 = -1,52568$ ,  $r_2 = 0,25865$ , și  $r_3 = 1,26703$ .

Abscisele extremelor sunt  $e_1 = -\sqrt{6}/3 \approx -0,81649$  și  $e_2 = \sqrt{6}/3 \approx 0,81649$ . Punctul de inflexiune are drept coordonate  $(0; \frac{1}{2})$ .

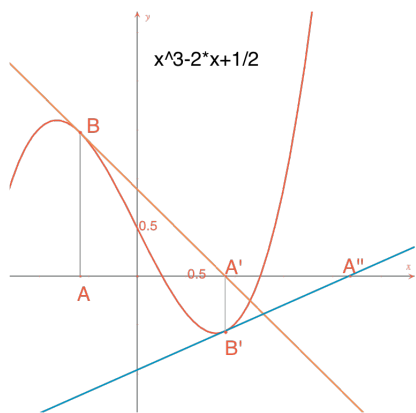
**Exercițiul 3** – Utilizând panta tangentei, trasați graficul funcției derivate.

**Exercițiul 4** – Tangenta taie axa absciselor într-un punct  $A'$  de abscisă  $x'$ , care este în general o mai bună aproximație a rădăcinii decât  $x$  dacă  $A$  este deja în apropierea unei rădăcini a lui  $f(x) = 0$ . Această constatare stă la baza metodei iterative a lui *Newton – Raphson* pentru a găsi o rădăcină a unei ecuații. Construiți-l pe  $A'$ , apoi pe iteratul lui,  $A''$  prin aceeași metodă, apoi studiați poziția lui  $A''$  în funcție de cea a lui  $A$ . În particular, putem găsi două poziții ale lui  $A$ , altele decât cele trei rădăcini, pentru care  $A''$  revine în  $A$ .

<sup>1</sup> Sir Isaac Newton, 1643-1727


<sup>2</sup> Joseph Raphson, 1648-1715

Pentru informare, sunt cele două rădăcini reale ale unui polinom de gradul 6, egale cu aproximativ 0,56293 și 0,73727. Vedem și că o alegere proastă a lui  $A$  poate fi în dezacord cu metoda, aducându-l pe  $A'$  în unul dintre cele două puncte în care derivata este nulă.



**Figura 2.6** – Primele două iterații ale metodei lui Newton-Raphson

plecând de la punctul  $A$ .

**Notă:** același grafic se obține direct cu ajutorul instrumentului [\[Măsurare\]Aplică o Expresie](#) . Selecționați mai întâi expresia apoi una dintre cele două axe.

## PAVAJE




Vom construi câteva pavaje ale planului prin poligoane. Să începem cu câteva definiții simplificate, dar suficiente pentru ceea ce va urma. Cititorul interesat se va raporta la lucrarea de referință *Tilings and Patterns* de Branko Grünbaum și G. C. Shephard, Freeman 1987. Există și un mare număr de site-uri Internet despre pavaje și grupurile de simetrie.

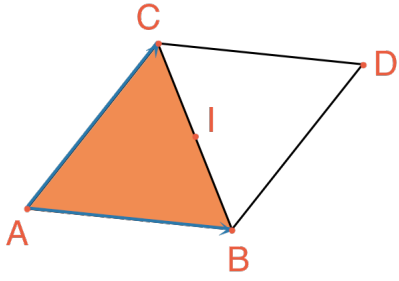
Spunem că un ansamblu de părți închise ale planului este un pavaj a planului dacă părțile sunt disjuncte două câte două, și reuniunea tuturor părților este planul întreg. Aceste părți se numesc plăcile pavajului. Intersecția a două plăci, care nu este redusă la un punct, se numește latură a pavajului, iar intersecția a două sau mai multe plăci redusă la un punct se numește vârf al pavajului.

Pentru un pavaj  $P$ , notăm  $S(P)$  mulțimea izometriilor  $f$  ale planului astfel încât imaginea oricărei plăci a lui  $P$  prin  $f$  este o placă a lui  $P$ .  $S(P)$  este un grup, numit grupul simetriilor pavajului. Trebuie analizate mai multe cazuri pentru acest grup:



- $S(P)$  nu conține nicio translație.  $S(P)$  este atunci izomorf cu un grup ciclic, eventual redus la identitate, generat de o rotație de unghi  $2\pi/n$ , sau cu un grup diedral, grupul simetriilor unui poligon regulat cu  $n$  laturi.
- $S(P)$  conține translații de vectori toți coliniari.  $S(P)$  este atunci izomorf cu unul dintre cele 7 grupuri de frize.
- $S(P)$  conține două translații de vectori necoliniari. Atunci  $S(P)$  este izomorf cu unul dintre cele 17 grupuri cristalografice și pavajul este numit periodic.

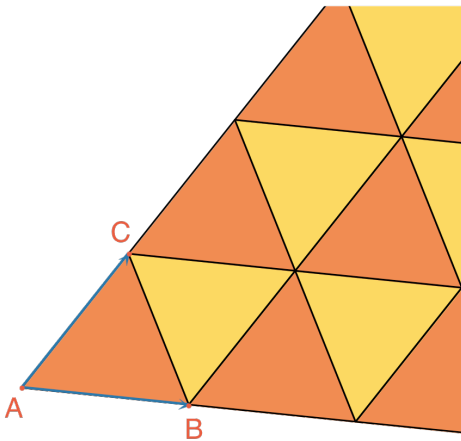
Dacă toate plăcile pavajului pot fi obținute prin izometrie pornind de la o singură placă, spunem că pavajul este monoedral. Ne interesează aici numai cazul pavajelor monoedrale în care plăcile sunt poligoane. Mai întâi vom construi un pavaj monoedral în care o placă este un triunghi oarecare.

Să construim un triunghi  $ABC$  oarecare cu ajutorul instrumentului [\[Linii\]Triunghi](#) , apoi mijlocul  $I$  al uneia dintre laturi, de exemplu  $[BC]$ , cu instrumentul [\[Construcții\]Mijloc](#) . Fie  $D$  simetricul lui  $A$  în raport cu  $I$ , obținut cu instrumentul [\[Transformări\]Simetrie Centrală](#)  selectând mai întâi obiectul de transformat  $A$ , apoi centrul de simetrie  $I$ .



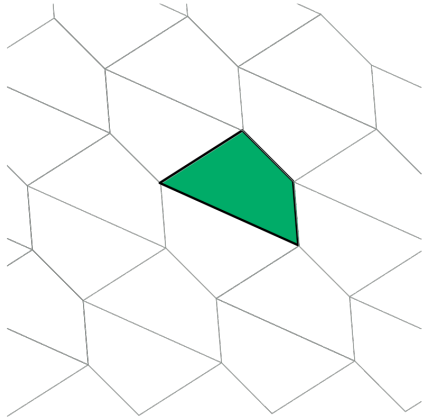
**Figura 3.1** – Construim simetricul unui triunghi ABC în raport cu mijlocul uneia dintre laturile sale (aici  $BC$ ). Obținem atunci un paralelogram  $ABDC$ .

Patrulaterul  $ABDC$  este un paralelogram și putem să-l utilizăm pentru a pava planul. Construim cei doi vectori  $\vec{AB}$  și  $\vec{AC}$  cu instrumentul [Linii]Vector , apoi îi utilizăm pentru a duplica triunghiurile  $ABC$  și  $BCD$  prin translație, cu instrumentul [Transformări]Translație .



**Figura 3.2** – Construcția imaginilor celor două triunghiuri prin translațiile de vectori  $\vec{AB}$  și  $\vec{AC}$ .

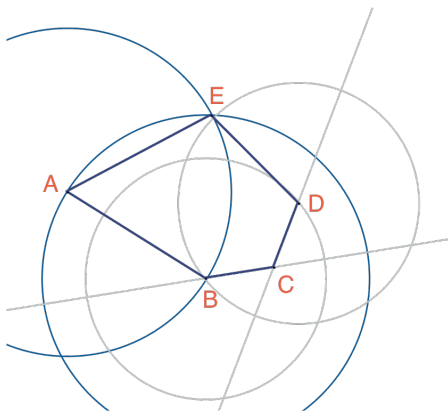
Același demers permite pavarea planului cu un patruleter oarecare, convex sau nu, dar neîncrucișat. Luăm simetricul patruleterului în raport cu mijlocul unei laturi și obținem un hexagon cu laturile paralele două câte două, care pavează planul prin translație.



**Figura 3.3** – Același tip de construcție permite pavarea planului cu un patrulater oarecare, eventual neconvex din moment ce rămâne neîncrucișat.



Cazul celorlalte poligoane convexe este mult mai complex. Plecând de la 7 laturi, putem demonstra că nici un poligon convex nu poate pava planul. Există 3 tipuri de hexagoane convexe care pavează planul și cel puțin 14 tipuri de pentagoane convexe care pavează planul, fiecare tip fiind definit printr-un ansamblu de constrângeri asupra unghiurilor și a lungimii laturilor. În cazul pentagoanelor, nu se știe la ora actuală dacă cele 14 tipuri cunoscute oferă toate soluțiile problemei. Ultimul tip cunoscut a fost descoperit în 1985. Nici problema pentagoanelor neconvexe nu este rezolvată din câte știm.

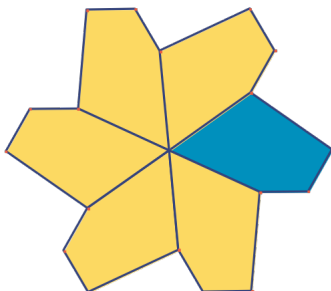
**Exercițiul 5** - Construiți un pentagon convex  $ABCDE$  verificând constrângerile următoare: unghiul din  $A$  are măsura  $\hat{A} = 60^\circ$ , unghiul din  $C$  are măsura  $\hat{C} = 120^\circ$ ,  $AB = AE$ ,  $CB = CD$ . Aceste constrângeri nu determină un pentagon unic, ci o familie de pentagoane. Numărul de puncte libere ale construcției va fi deci de cel puțin trei.



**Figura 3.4** – Construcția unui pentagon verificând constrângerile  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 120^\circ$ ,  $AB = AE$ ,  $CB = CD$ . Punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt libere în plan.

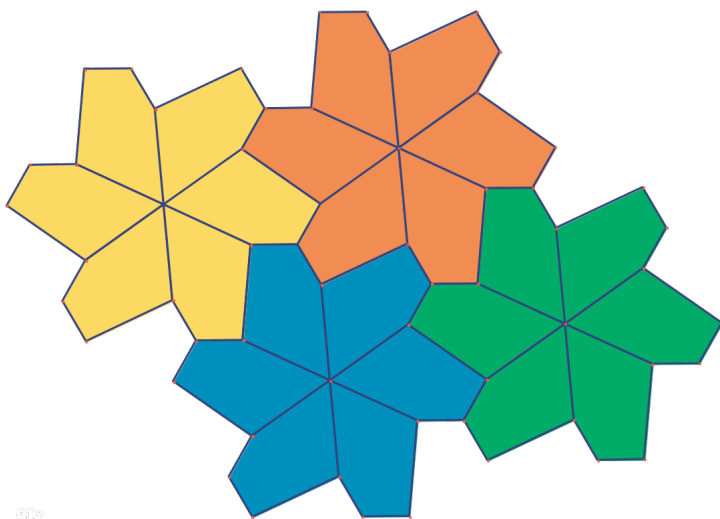


Prin rotații succesive ale centrului  $A$  și ale unghiului de  $60^\circ$  (instrumentul [Transformări]Rotație  care necesită obiectul de transformat, un unghi și un centru) construiești o „floare” de 6 pentagoane. Unghiul este un număr pus pe foaie cu instrumentul [Text și Simboluri]Număr .



**Figura 3.5** – Pentagonul de bază este reprodus prin rotația centrului  $A$  și a unghiului de  $60^\circ$ , pentru a forma o „floare” cu șase petale.

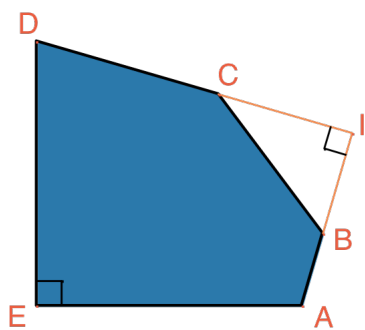
Florile pot fi atunci asamblate prin translație pentru a pava planul. Pavajul obținut este tipul 5 al clasificării date în *Tilings and Patterns*. A fost publicat de *K. Reinhardt* în 1918. Acest pavaj nu este numai monoedral, adică toate plăcile sunt identice în afara izometriei, ci în plus izoedral: toate plăcile joacă același rol în pavaj. Mai precis, dacă o izometrie transformă o placă într-o altă placă a pavajului, atunci ea face parte din grupul de simetrie al pavajului.



**Figura 3.6** – Florile sunt asamblate prin translație pentru a acoperi planul.

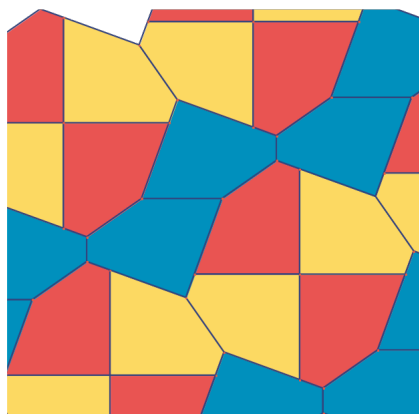
**Exercițiul 6** – Construiești un pentagon  $ABCDE$  verificând constrângerile:

$$\hat{E} = 90^\circ, \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ, 2\hat{B} - \hat{D} = 180^\circ, \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ, EA = ED = AB + CD.$$



**Figura 3.7** – Pentagon de tipul 10 după clasificarea din Tilings and Patterns. Acest pentagon servește drept bază pentru un pavaj monoedral al planului. Punctele E și A sunt libere în plan și punctul I este liber pe un arc de cerc.

Pavajul este realizat făcând mai întâi trei copii ale plăcii prin rotații succesive de  $90^\circ$  în jurul lui E, pentru a obține un pătrat trunchiat. Apoi aceste pătrate sunt alăturate în benzi prin translație într-o direcție. Benzile de pătrate sunt separate prin benzi de pentagoane, ca în figura de mai jos.



**Figura 3.8** – Pavaj monoedral prin pentagoane convexe. Acest pavaj se datorează lui Richard E. James III, ca urmare a publicării unui articol al lui Martin Gardner în Scientific American în 1975. Puteți găsi acest articol completat în Time travel and other mathematical bewilderments, Martin Gardner, Freeman 1987.