

CABRI™ II PLUS



Inovačné nástroje matematiky

**UŽIVATEĽSKÁ PRÍRUČKA**

## VITAJTE !

Vitajte v interaktívnom svete CabriTM!

Technológia Cabri bola pôvodne vyvinutá v IMAG, ktoré sú združenými výskumnými laboratóriami CNRS (National Center for Scientific Research) a Joseph Fourier University v Grenobli vo Francúzsku.

Jean-Marie LABORDE, duchovný vodca Cabri, začal projekt v roku 1985, aby sa geometria ľahšie učila a radostnejšie vyučovala.

Dnes sa už viac než 15 miliónov užívateľov teší na prácu s Cabri, na počítačoch a tiež na grafických kalkulačkách Texas Instruments .

Počítačom podporovaná konštrukcia geometrických útvarov prináša nové dimenzie do klasického spôsobu konštrukcie používajúcej papier, ceruzku, pravítko a kružidlo.

Cabri II Plus ponúka široký výber výkonných, praktických črt. Môžete nakresliť a manipulovať rovinou a trojrozmernými telesami, od najjednoduchších až po najzložitejšie. Môžete voľne manipulovať útvarmi v hociktovej fáze, skontrolovať konštrukciu, sformulovať hypotézy, merať a odstrániť útvary, vykalkulovať/prepočítať, vykonať zmeny, alebo začať celkom od začiatku. Cabri II Plus je špičkový nástroj na vyučovanie a učenia sa geometrie, je vytvorená pre tak pre učiteľov, ako aj pre študentov na všetkých úrovniach od základnej školy až po univerzitu.

Niektoré črty programu sú špecifické pre verzie Macintosh/Windows: tlačidlá **Ctrl** a **Alt** pre Windows korešpondujú s príkazmi **Option** a s možnosťou **Alt** na Macintosh; kliknutie pravým tlačidlom myši na Windows korešponduje s **Ctrl** + kliknutie na Mac.

- **Užívateľské rozhranie:** ikony sú novšie, väčšie a ľahšie čitateľné. Oveľa intuitívnejšia vyklápacia ponuka na vyriešenie viacznačných výberov. Iba niekoľkými kliknutiami môžete zmeniť atribúty hociktorého útvaru.

- **Pomenovanie:** Teraz môžete pomenovať všetky Vaše grafické útvary a umiestniť komentáre hocikde okolo útvaru.
- **Výrazy:** Definuje výrazy s jednou alebo viacerými premennými a ohodnotí ich dynamicky.
- **Okamžité grafy:** Môžete jednoducho nakresliť a študovať grafy jednej alebo viacerých funkcií, a priama manipulácia umožní skúmať výsledky funkcie podľa jej parametrov.
- **Množiny bodov (útvarov) danej vlastnosti:** Zobrazí množiny bodov alebo útvarov danej vlastnosti, množiny množín bodov (útvarov), a prieniky s množinami bodov (útvarov). Taktiež môžete zobraziť rovnice algebraických kriviek pomocou nástroja Množina bodov (útvarov) danej vlastnosti.
- **« Šikvné zobrazenie » priamky :** Iba « užitočná » časť priamky je zostrojená. Môžete zmeniť dĺžku tejto časti tak často, ako sa Vám chce.
- **Farby:** Môžete vybrať farby útvarov a textov a takisto farbu výplne z novej rozšírenej palety farieb, alebo použiť nové dynamické črty farieb.
- **Obrázky (Bitmapy, JPEG, GIF):** Pripojte hocijaké obrázky k útvarom v obrazci (body, úsečka, n-uholníky, pozadie). Obrázky budú aktualizované počas animácií a počas manipulácie s Cabri-výkresom.
- **Text:** Upravte štýl, písmo a textové atribúty jednotlivých charakterov.
- **Okno s postupom konštrukcie:** Teraz môžete otvoriť okno na zistenie všetkých fáz konštrukcie.
- **Nahrávanie zadania:** Môžete nahráť zadania počas používania programu. Potom ich môžete zobraziť na obrazovke alebo vytlačiť

neskoršie na monitorovanie pokroku študentov a ľahké zistenie prípadných ťažkostí, ktorým môžu čeliť.

- **Import/Export obrázkov/figures:** Obrázky môžete preniesť na/z Vášho počítača na Cabri Junior, na grafické kalkulačky TI (TI-83 Plus a TI-84 Plus).

Všetky tieto jedinečné funkcie môžu pridať nové dimenzie k Vaším skúsenostiam/ znalosťami získaných pri učení žiakov.

Táto užívateľská príručka je rozdelená na dve časti:

Prvá časť **[1] ZAČÍNAME – ZÁKLADNÝ KURZ** je vytvorená pre začínajúcich užívateľov, ktorý používajú Cabri prvýkrát. Oboznámi ich s rozhraním užívateľa Cabri a poskytuje smernice na používanie myši. Avšak, skúsenosti ukazujú, že ľudia sa naučia veľmi rýchlo, ako používať Cabri, v triede žiaci dokážu pracovať s Cabri už po polhodinovom používaní softvéru.

Druhá časť **[2] OBJAVOVANIE – STREDNE POKROČILÝ KURZ** je vytvorená pre nových užívateľov a ponúka cvičenia na úrovni strednej školy na objavovanie sveta interaktívnej geometrie.

**REFERENČÁ PRÍRUČKA.pdf** je úplnou príručkou softvéru.

**POKRAČOVANIE – POKROČILÝ KURZ.pdf** ponúka viac cvičení na vyššej pokročilej úrovni pre maturantov stredných škôl alebo univerzitných študentov. Cvičenia v týchto častiach sú do veľkej miery na sebe nezávislé. Čitateľ je pozvaný na vykonanie/vyhotovenie podrobných konštrukčných metód a potom vyskúšať uvedené cvičenia/zadania.

Cabri II Plus odteraz bude nazývaná ako Cabri.

Navštívte našu webovú stránku [www.cabri.com](http://www.cabri.com) pre aktualizácie príručky užívateľa a novinky výrobku. Taktiež nájdete odkazy na desiatky web stránok a informácie ohľadom knižiek o geometrii a Cabri.

Celý tím Cabrilogu Vám praje veľa nádherných hodín konštrukcie, prieskumu a objavovania.

©2007 CABRILOG SAS

**Užívateľská príručka Cabri II Plus:**

**Autori:** Sandra Hoath and Chartwell Yorke

**Slovenský preklad:** EDU3000 s. r. o.

**Posledná aktualizácia:** 30. Jún 2007

**Nové verzie:** [www.cabri.com](http://www.cabri.com)

**Hlásenie chýb:** [support@cabri.com](mailto:support@cabri.com)

**Grafický dizajn :** Cabrilog

# O B S A H

<b>1 - ZAČÍNAME – ZÁKLADNÝ KURZ</b>	<b>7</b>
1.1 FILOZOFIA	7
1.2 UŽÍVATEĽSKÉ ROZHRAŇIE	7
1.3 POUŽITIE MYŠI	10
1.4 VAŠA PRVÁ KONŠTRUKCIA	11
<b>2 - OBJAVOVANIE – STREDNE POKROČILÝ KURZ: EULEROVA PRIAMKA</b>	<b>18</b>
<b>3 - OBJAVOVANIE – STREDNE POKROČILÝ KURZ: HĽADANIE BODU</b>	<b>26</b>
<b>4 - OBJAVOVANIE – STREDNE POKROČILÝ KURZ: VARIGNONOV ŠTVORUHOLNÍK</b>	<b>28</b>

## ZAČÍNAME – ZÁKLADNÝ KURZ

### 1.1 FILOZOFIA

Cabri je skonštruovaná na poskytovanie najväčšej úrovne interakcii (klávesnica, myš...) medzi užívateľom a softvérom a v každom prípade urobiť, čo užívateľ predpokladá, aby softvér vedel: na jednej strane rešpektovanie štandardných nastavení výrobcom a na strane druhej sledovanie najpriateľnejšej matematickej metódy.

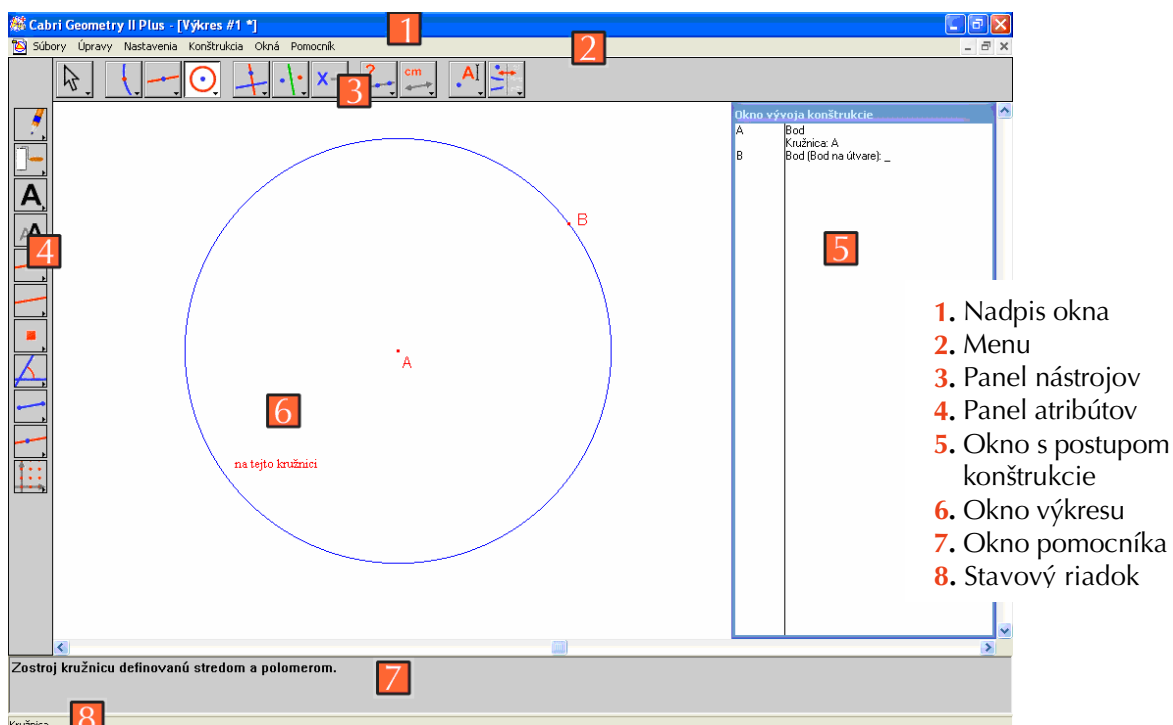
Dokument Cabri pozostáva z obrazca, na ktorom je možné kresliť všade na virtuálnom výkrese rozmeru jedného štvorcového metra. Obrazec je vybudovaný zo štandardných geometrických objektov (body, priamky, kružnice...) a iných objektov (čísla, text, vzorce...)

Dokument môže taktiež obsahovať makrá, konštrukcie, ktoré umožnia zapamätanie a reprodukovanie konštrukcií na stredne pokročilej úrovni, čo vlastne rozširuje funkčnosť softvéru.

S Cabri môžete otvoriť súčasne niekoľko dokumentov a medzi nimi tiež môžete vystrihnúť, kopírovať a prilepiť útvary.

## 1.2 UŽIVATEĽSKÉ ROZHRAŇIE

Obrázok 1.1 ukazuje hlavné okno Cabri™ a jeho rôzne časti. Keď sa Cabri™ nainštaluje prvý krát, nezobrazí sa panel nástrojov Atribúty, okno Pomocníka a Okno s postupom konštrukcie.



**Nadpis okna** ukazuje názov súboru útvaru (ak súbor bol otvorený alebo uložený), alebo **Výkres #1, 2 ...**ak súbor ešte nebol pomenovaný.

**Menu** umožní užívateľovi manipuláciu s dokumentmi, ovládanie zadani a riadenie všeobecného vzhľadu a správania sa programu.

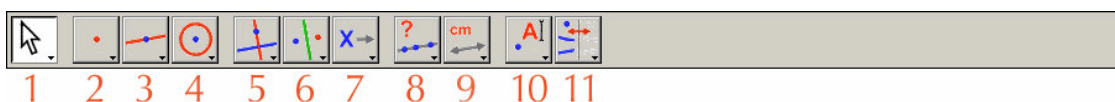
Príkazy budeme označovať po celej príručke nasledovne: Vykonať z ponuky Menu použitím formátu takto: **[Menu] Urob**  
Například **[Súborny] Uložiť ako** označuje Uložiť ako z menu Súborny.

**Panel nástrojov** zobrazuje nástroje, ktorými môžete vytvoriť a modifikovať útvar. Pozostáva z niekoľkých sád nástrojov, z ktorých každý zobrazuje jeden nástroj zo sady nástrojov ako ikona na paneli. Na výber príslušného nástroja kliknite raz na jeho ikonu. Krátke jedině



kliknutie aktivuje príslušný nástroj. Kliknite a držte tlačidlo na otvorenie sady nástrojov ako roletové menu. Pritiahnite k požadovanému nástroju pre jeho výber, ktorý potom bude ikonou danej sady nástrojov.

Pokojne nastavte **panel nástrojov**, alebo ho uzavrite do Vami udanej konfigurácie pre použitie v triede. Vid'. [8] **ZÁKLADNÉ NASTAVENIA A NASTAVENIA UŽÍVATEĽOM V REFERENČNEJ PRÍRUČKE.pdf**.



- |               |                |                    |
|---------------|----------------|--------------------|
| 1. Ukazovateľ | 5. Konštrukcie | 9. Meranie         |
| 2. Body       | 6. Zobrazenia  | 10. Text a symboly |
| 3. Priamky    | 7. Makrá       | 11. Atribúty       |
| 4. Krivky     | 8. Vlastnosti  |                    |

V ďalšej časti tejto príručky príkaz Nástroj zo **Sady nástrojov** budeme označovať nasledovne [Sada nástrojov] Nástroj a príslušná ikona bude zobrazená na okraji. Napríklad [Priamky] Polpriamka prislúcha nástroju Polpriamka zo sady nástrojov Priamka. (Niektoré pomenovania, pre okraj príliš dlhé, boli skrátané.)

Ikony panela nástrojov sa môžu zobraziť vo veľkých alebo malých formátoch. Zmeniť veľkosť môžete posunutím kurzora na pravo od posledného nástroja panelu nástrojov a kliknutím pravým tlačidlom myši pre Windows (pre Macintosh **Ctrl**+kliknutie) a zvolíte si Malé ikony.

**Stavový riadok** označuje aktívny nástroj.

**Panel atribútov** umožní zmenu atribútov rôznych útvarov: farby, štýlu, veľkosti... Na jeho zobrazenie použite príkaz [Nastavenia] Ukázať atribúty, a môžete ho skryť príkazom [Nastavenia] Skryť atribúty. Na rovnaký účel môžete použiť aj kláves **F9** pre Windows, **Command-F9** pre Macintosh.

**Okno pomocníka** poskytuje stručnú pomoc pre aktívny nástroj. Ukazuje nástroje na predvídanie „požadovaných útvarov“ a to, čo bude zostrojené. Môžete ho aktivovať (deaktivovať) aj klávesom **F1**.

Okno s postupom **konštrukcie** obsahuje text opisujúci útvar. Vymenuje všetky zostrojené útvary a použité konštrukčné metódy. Otvorte ho príkazom [Nastavenia] Ukázať okno s postupom konštrukcie a zatvoriť ho môžete s príkazom [Nastavenia] Skryť okno s postupom konštrukcie. Môžete ho aktivovať (deaktivovať) aj klávesom **F10** pre Windows, **Command-F10** pre Macintosh.

Na záver, okno na kreslenie ukazuje iba tú časť celej plochy, ktorá je prístupná pre konštrukciu. Geometrické konštrukcie sa uskutočnia v tomto okne na kreslenie.

### 1.3 POUŽITIE MYŠI

Väčšina funkcií sa používa prostredníctvom myši.

- na posúvanie ukazovateľa myši pohybujte myšou
- stlačte tlačidlo myši
- pustite

Keď sa myš používa na posúvanie ukazovateľa myši v okne na kreslenie, Cabri Vás informuje tromi spôsobmi o očakávanom výsledku kliknutia alebo „ťahania a pustení“:

- ukazovateľ myši zmení jeho tvar
- objaví sa rolovací nápis pozdĺž ukazovateľa myši
- objaví sa časť útvaru, ktorý chceme zostrojiť

V závislosti od konštrukcie, nápis a čiastočné zobrazenie objektu sa môže ale nemusí objaviť.

## Zoznam odlišných typov ukazovateľa myši:



Môžete označiť daný útvar.



Daný útvar môžete buď označiť, posunúť alebo použiť v konštrukcii.



Objaví sa po kliknutí na daný útvar pre jeho označenie alebo použitie v konštrukcii.



Pre útvary pod ukazovateľom myši je niekoľko možných možností. Kliknutím sa objaví nápis s ponukou, ktorý umožní vybrať požadovaný útvar z roletového menu.



Objaví sa počas posúvania daného útvaru.



Ukazovateľ myši sa nachádza v nepoužívanej časti výkresu a obdĺžniková plocha sa tu môže vyznačiť použitím krokov „klikni a ťahaj“.

Objaví sa na označenie ponuky záberu pri posúvaní viditeľnej časti výkresu.



Táto ponuka môže byť kedykoľvek zadaná so stlačeným klávesom **Ctrl** pre Windows (pre Macintosh kláves **Option**). V tejto ponuke krok „ťahaj a pusť“ posúva pracovnú plochu v okne.



Objaví sa pri posúvaní pracovnej plochy.



Ukazuje, že kliknutím sa vytvorí nový, nezávislý, pohyblivý bod na výkrese.



Ukazuje, že kliknutie vytvorí nový bod, ktorý je pohyblivý buď na danom útvaru alebo v priesečníku dvoch daných útvarov.



Ukazuje, že kliknutím sa vyplní útvar pod ukazovateľom myši s vybranou farbou.

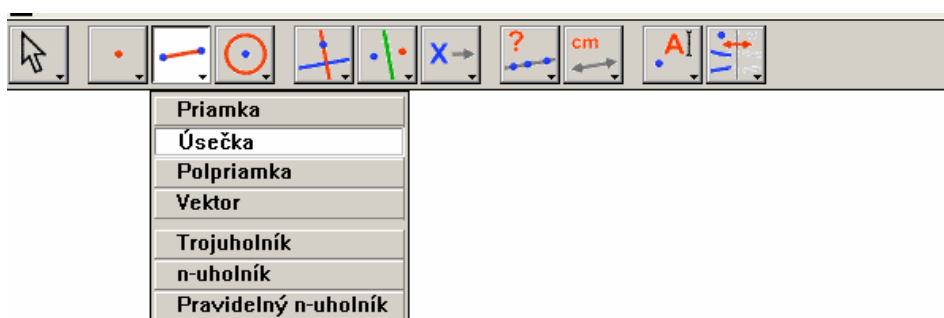


Ukazuje, že kliknutie zmení atribút (napríklad farbu, štýl, hrúbku...) útvaru pod ukazovateľom myši.

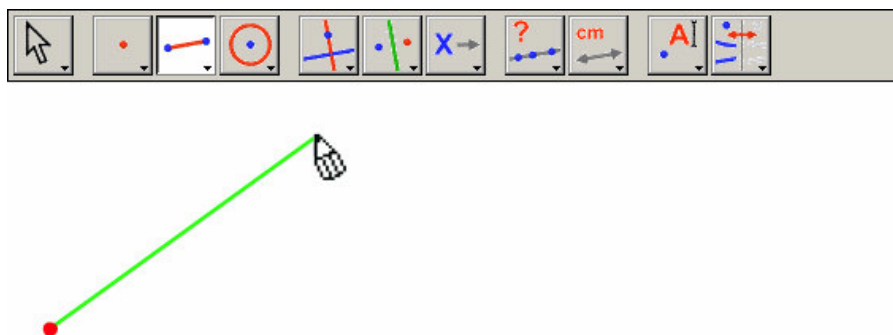
## 1.4 VAŠA PRVÁ KONŠTRUKCIA

Objasníme kapitolu [1] **ZAČÍNAME – ZÁKLADNÝ KURZ** príkladom tak, že zostrojíme štvorec daný jednou z jeho uhlopriečok. Po inštalácii Cabri vytvorí sa nový, prázdny, virtuálny výkres a okamžite môžete zahájiť Vašu prvú konštrukciu.

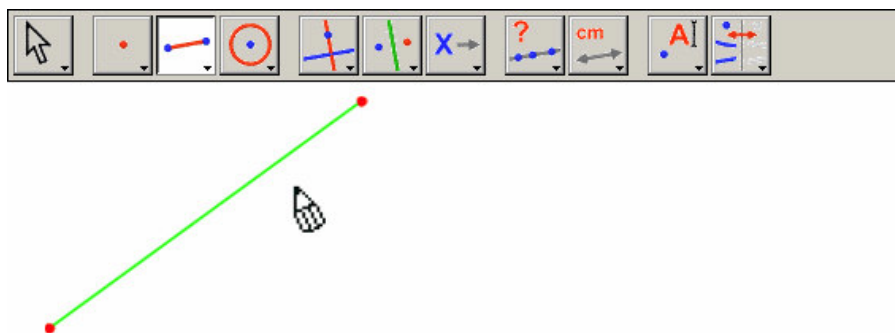
Zostrojte úsečku, ktorá bude uhlopriečkou štvorca. Najprv vyberte nástroj **[Priamky] Úsečka**.




**Obrázok 1.1** – Výber nástroja **[Priamka] Úsečka**.




**Obrázok 1.2** – Konštrukcia prvého bodu. Ukážka výslednej úsečky sa hýbe spolu s ukazovateľom myši, kým sa nevytvorí druhý bod.

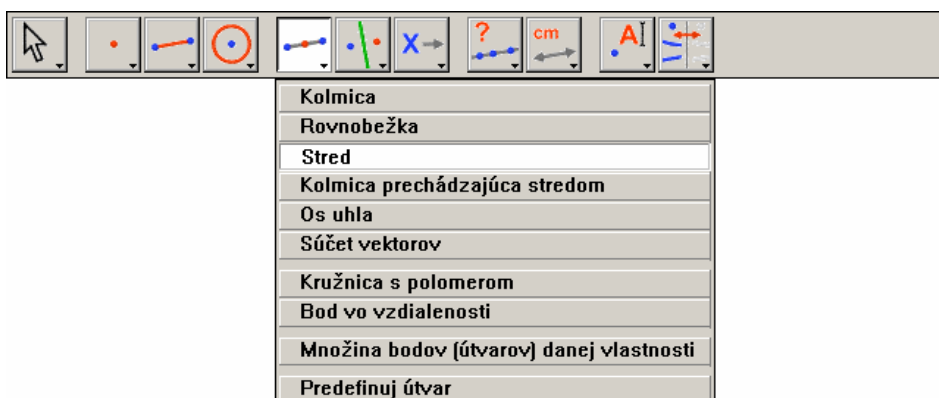


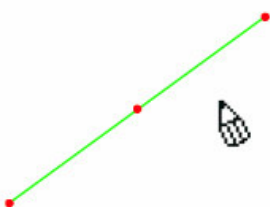
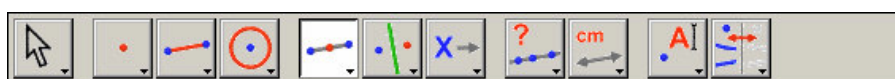
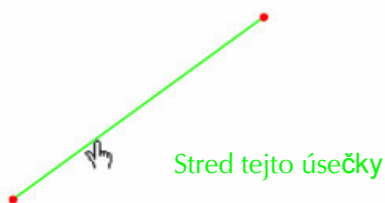
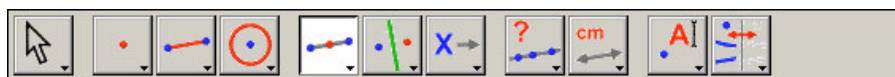
**Obrázok 1.3** – Úsečka je hotová po výbere druhého bodu. Nástroj [Priamky] Úsečka ostane aktívny a umožní užívateľovi zostrojiť ďalšiu úsečku.

Teraz ak pohybujete ukazovateľom myši cez okno kreslenia: ukazovateľ nadobudne tvar . Jedným kliknutím vytvoríte prvý krajný bod úsečky. Pokračujte posúvaním ukazovateľa myši v okne kreslenia. Úsečka sa predĺži od prvého bodu až po ukazovateľa myši ukazujúc, kde bude mať úsečka druhý krajný bod. Na vytvorenie druhého bodu kliknite ešte raz. Teraz Váš obrazec obsahuje dva body a jednu úsečku.

Na zostrojenie štvorca najprv zostrojíte kružnicu s daným priemerom dĺžky úsečky. Stred kružnice bude stred úsečky. Na zostrojenie tohto stredy aktivujte nástroj [Kolmica] Stred, potom posuňte ukazovateľ myši nad úsečku.

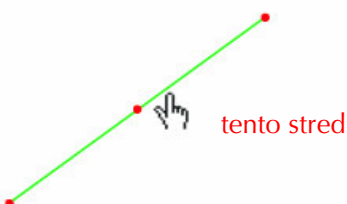
Objaví sa nápis pozdĺž ukazovateľa myši **Stred tejto úsečky** a mení sa aj jeho tvar na . Kliknite na vytvorenie stredy na úsečke.

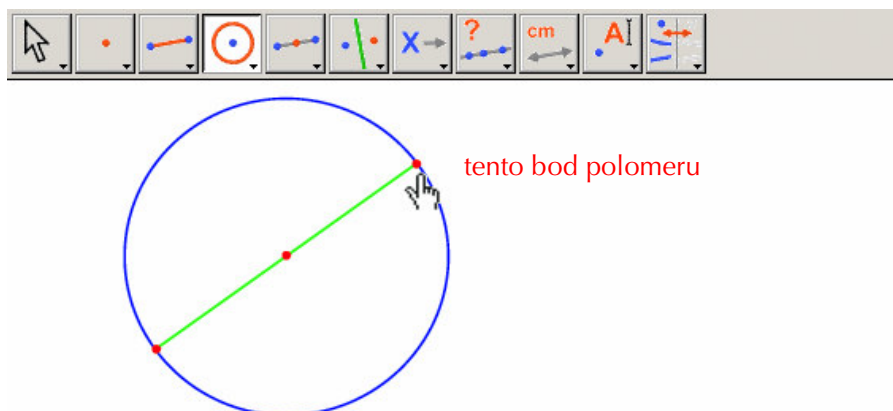





**Obrázok 1.4** – Konštrukcia stredú úsečky

Zvoľte si nástroj [Kružnica] Kružnica a posuňte ukazovateľ myši blízko k práve zostrojenému stredú. Objaví sa nápis Tento stred. Nakoľko nástroj [Kružnica] Kružnica vyžaduje výber bodu ako stred kružnice, kliknite na stred, aby ste ho vybrali. Po tomto výbere sa pohnutím ukazovateľa myši objaví kružnica. Posuňte ukazovateľ myši blízko k jednému koncu úsečky, objaví sa nápis Tento bod polomeru. Kliknutím na tento bod sa zostrojí kružnica prechádzajúca týmto bodom.

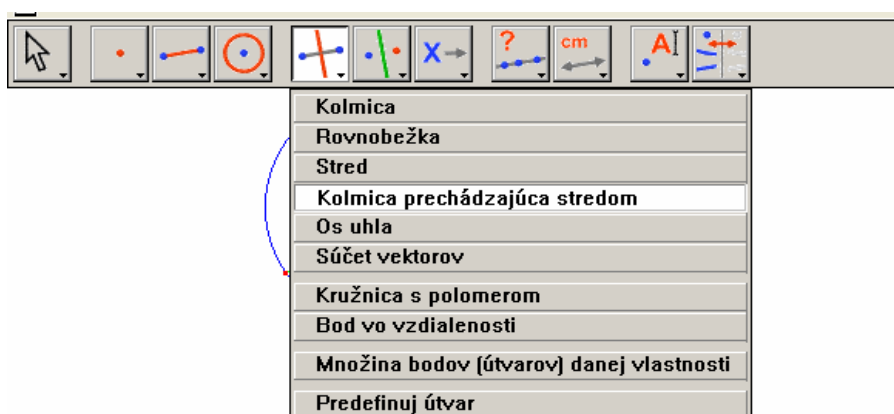


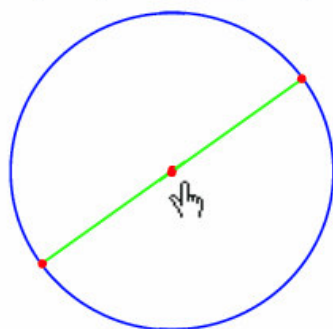
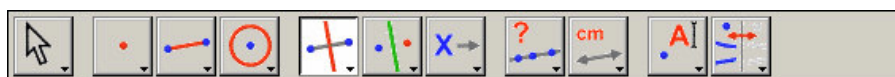


**Obrázok 1.5** – Konštrukcia kružnice s danou úsečkou ako polomer.

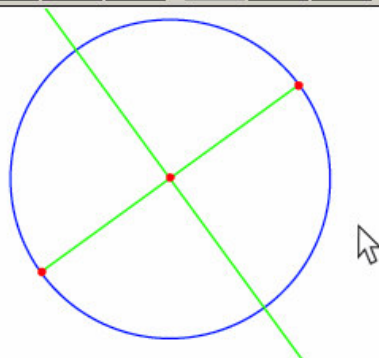
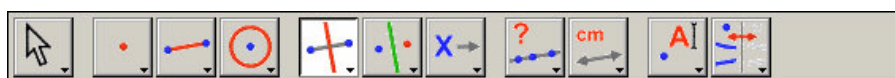
Na upravenie útvaru si vyberte nástroj [Ukazovateľ] **Ukazovateľ**. Jediné pohyblivé body útvaru sú koncové body úsečky. Keď pohybujete ukazovateľom myši nad jedným z nich, jeho tvar sa zmení na  a objaví sa nápis **Tento bod** alebo **Táto úsečka**. Bod alebo úsečku potom môžete posunúť krokom „ťahaj a pust“ a celý útvar sa aktualizuje automaticky: prekreslí sa úsečka, spolu s ňou aj stred, takisto aj kružnica.

Na zostrojenie štvorca najprv zostrojte druhú uhlopriečku, ktorá je polomerom kružnice a je kolmá na pôvodnú úsečku. Zostrojte kolmicu prechádzajúcu stredom úsečky t.j. kolmica na úsečku prechádzajúca jej stredom. Zvoľte si nástroj [Konštrukcie] **Kolmica prechádzajúca stredom** a potom kliknutím vyberte nástroj **Úsečka**. Cabri zostrojí kolmicu prechádzajúcu stredom úsečky.





Kolmica prechádzajúca stredom tejto úsečky.



**Obrázok 1.6** – Konštrukcia kolmice prechádzajúcej stredom úsečky určujúca druhú uhlopriečku štvorca.

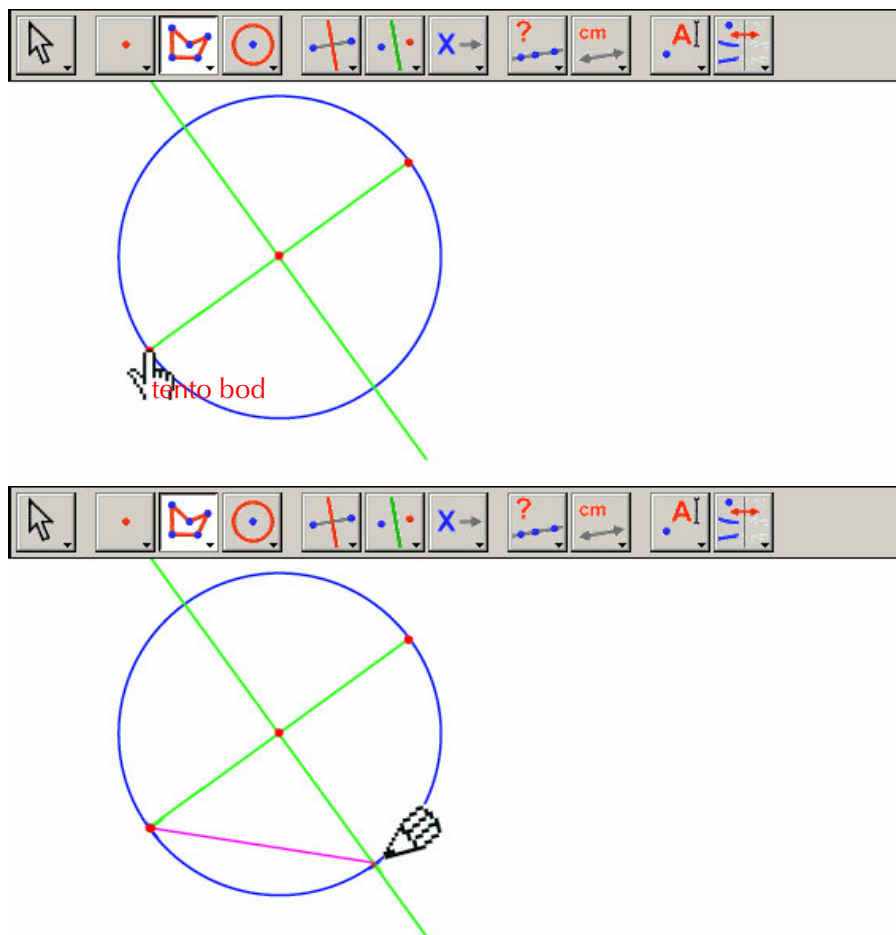
Na dokončenie štvorca vyberte nástroj **[Priamky] n-uholník**. Tento nástroj vyžaduje výber postupnosti bodov na stanovenie vrcholov. Výber bodov ukončíte označením počiatočného bodu postupnosti bodov, alebo dvojkliknutím pri výbere posledného bodu postupnosti. Dva priesečníky kružnice a kolmice prechádzajúcej stredom vlastne nie sú zostrojené, ale Cabri umožní ich implicitnú konštrukciu vtedy, keď sa používajú.



- Priamka
- Úsečka
- Polpriamka
- Vektor
- Trojuholník
- n-uholník**
- Pravidelný n-uholník



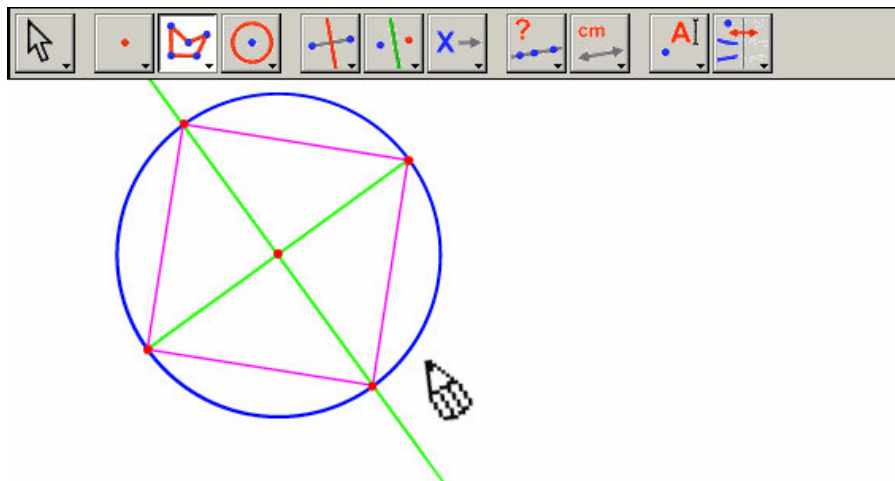




**Obrázok 1.7** – Konštrukcia štvorca, používajúc implicitnú konštrukciu priesečníkov kružnice a kolmice prechádzajúcej stredom úsečky.

Inými slovami, vyberte jeden koncový bod úsečky (objaví sa nápis tento bod) ako vrchol n-uholníka, potom posúvajte ukazovateľ myši k jednému z priesečníkov kružnice a kolmice prechádzajúcej stredom.

Objaví sa nápis v tomto priesečníku ukazujúc, že ďalšie kliknutie myšou zostrojí priesečník a vyberie ho ako ďalší vrchol n-uholníka, tak ho vyberte. Pokračujte výberom druhého koncového bodu úsečky, druhého bodu priesečníka kružnice a kolmice prechádzajúcej stredom úsečky. Nakoniec vyberte počiatočný bod n-uholníka teraz už druhýkrát (alebo dvojkliknite na posledný vrchol n-uholníka). Štvorec sa objaví.



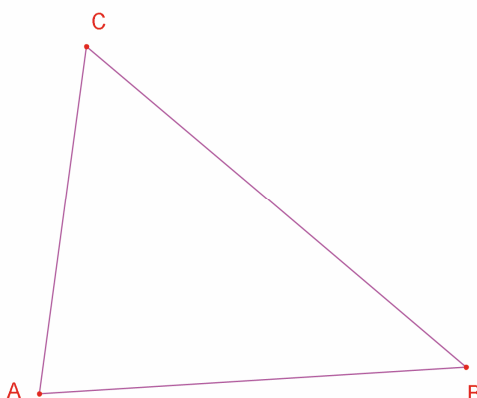
**Obrázok 1.8** – Vaša prvá konštrukcia s Cabri Geometriou!

## EULEROVA PRIAMKA

V tejto kapitole zostrojíme všeobecný trojuholník ABC a jeho tri ťažnice. To je úsečka spájajúca vrchol so stredom protíľahlej strany. Potom zostrojíme tri výšky trojuholníka, to sú kolmice vedené cez vrcholy na ich protíľahlé strany. Na záver zostrojíme osi strán trojuholníka, t.j. priamky kolmé na jednotlivé strany prechádzajúce stredmi strán. Je všeobecne známe, že tri výšky, tri ťažnice a tri kolmice prechádzajúce stredmi strán sú jednotlivo rôznobežné a ich priesečníky (ortocentrum, ťažisko a stred opísanej kružnice) sa nachádzajú na priamke nazvanej: Eulerova priamka.

Vyberte si nástroj **[Priamky] Trojuholník**. Pre informácie o použití tohto nástroja vid' Kapitolu **[1] ZAČÍNAME-ZÁKLADNÝ KURZ** v predošlej časti.

Keď ste už aktivovali nástroj **[Priamky] Trojuholník**, zostrojte tri nové body v okne výkresu kliknutím na prázdne miesta. Tieto body môžete pomenovať hneď počas konštrukcie jednoducho písaním ich označenia na klávesnici. Keď je už raz trojuholník hotový, tieto označenia sa môžu hýbať okolo bodov, aby sa vhodne umiestnili, napríklad mimo trojuholníka.

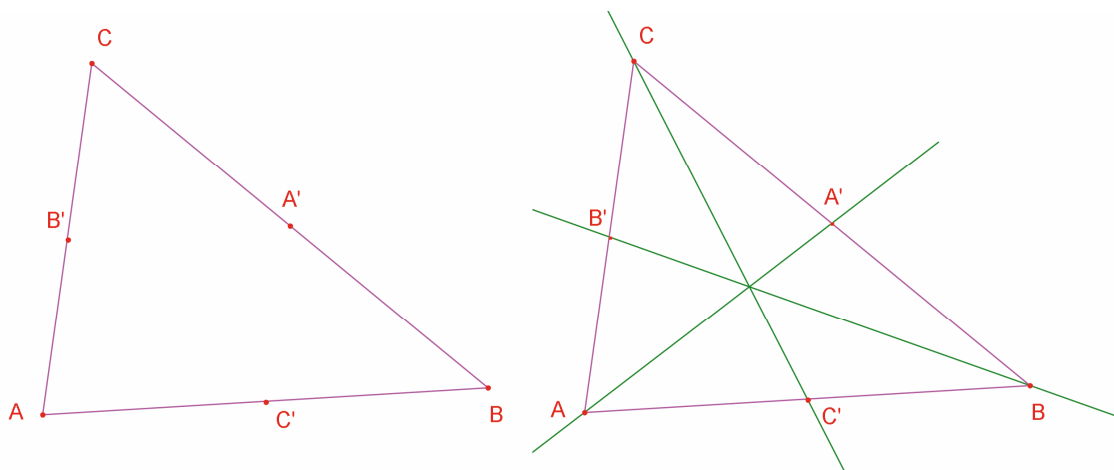


**Obrázok 2.1** – Trojuholník ABC zostrojený pomocou **[Priamky]** **Trojuholník**. Vrcholy sú pomenované počas konštrukcie písaním písmena počas ich zostrojenia.

Aktivovaním nástroja **[Ukazovateľ]** **Ukazovateľ** môžete hýbať názvami útvarov. Ťahajte názov umiestnením ukazovateľa nad ním, kým sa neobjaví nápis **Toto pomenovanie**, a podržaním stlačeného tlačidla myši počas ťahania na požadované miesto. Pre zmenu názvu útvaru aktivujte **[Text a symboly]** **Pomenovanie** a potom si vyberte bod a názov v objavujúcom sa okne Úpravy.

Stredy môžete zostrojiť pomocou nástroja **[Konštrukcie]** **Stred**. Pre zostrojenie stredu AB zostrojte najprv A a potom B.

Stred úsečky sa môže rovnako dobre zostrojiť výberom samotnej úsečky. Nový bod môže byť pomenovaný počas konštrukcie, povedzme C'. Stredy ostatných strán sa zostroja podobným spôsobom: A' na BC a B' na CA.



**Obrázok 2.2** – [Vľavo] Stredy sú zostrojené pomocou nástroja [Konštrukcie] **Stred**, ktorý prijme argumenty dvoch bodov, úsečky alebo stranu  $n$ -uholníka.

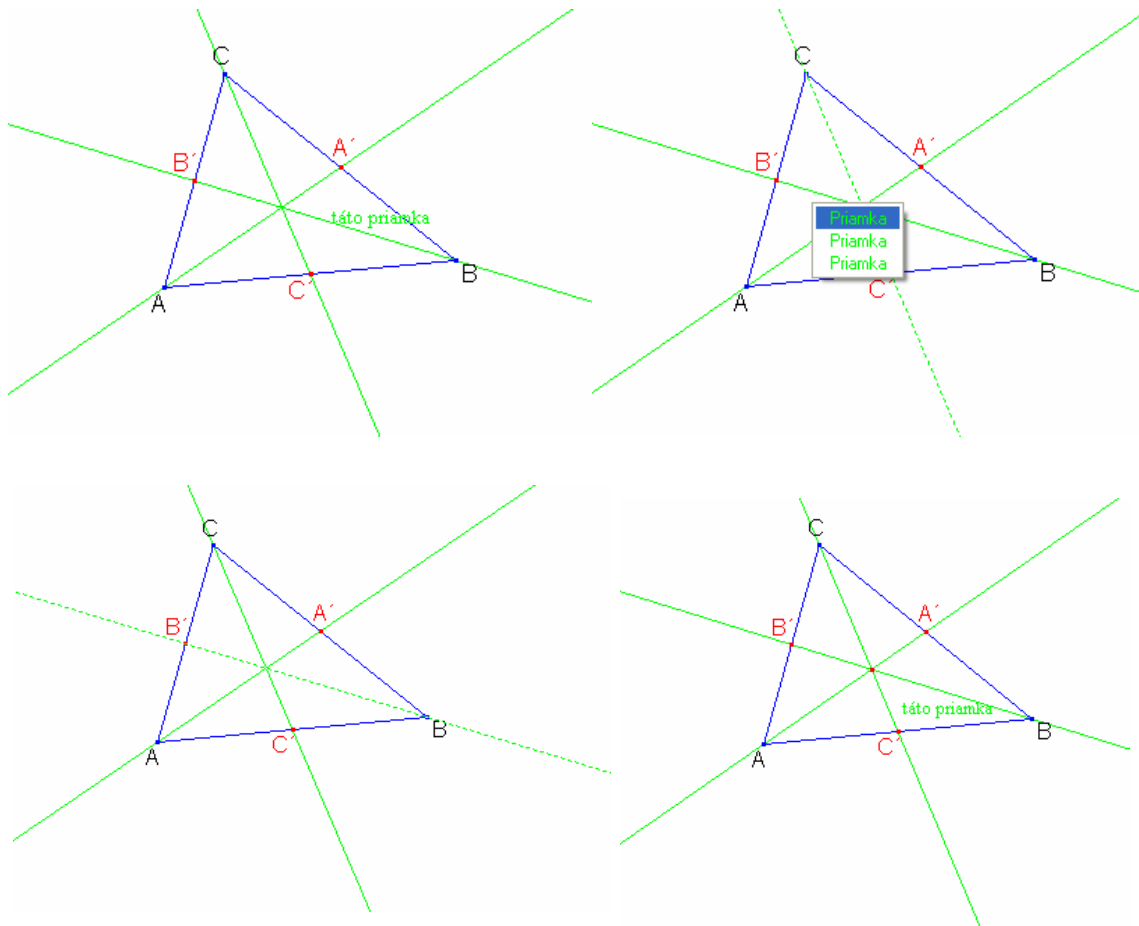
[Vpravo] Ťažnice sú zostrojené nástrojom [Priamky] **Priamka** a ich farba sa môže meniť nástrojom [Atribúty] **Farba**.

Nástroj [Ukazovateľ] **Ukazovateľ** umožní voľné hýbanie nezávislých pohyblivých útvarov konštrukcie. V tomto prípade body A, B a C sú nezávislé pohyblivé útvary. Celá konštrukcia je automaticky aktualizovaná hneď, ako sa pohne niektorým z nich. Takto je možné objaviť množstvo konfigurácií pre konštrukciu. Na zistenie pohyblivých bodov útvaru aktivujte nástroj [Ukazovateľ] **Ukazovateľ** a potom kliknite v prázdnej časti okna na kreslenie a obsiahnite časť výkresu, čoskoro sa objavia pohyblivé body útvarov v obsiahnutej časti vyznačenými obrysami nazvanými „pochodujúce mravce“.

Nástroj [Priamky] **Priamka** umožní zostrojenie troch ťažníc. Pre priamku AA' kliknite na A a následne na A'.

Nástroj [Atribúty] **Farba** sa používa na zmenu farby priamky. Kliknutím na paletu z nej vyberte farbu a potom kliknite na útvar, ktorý zmení farbu na požadovanú.

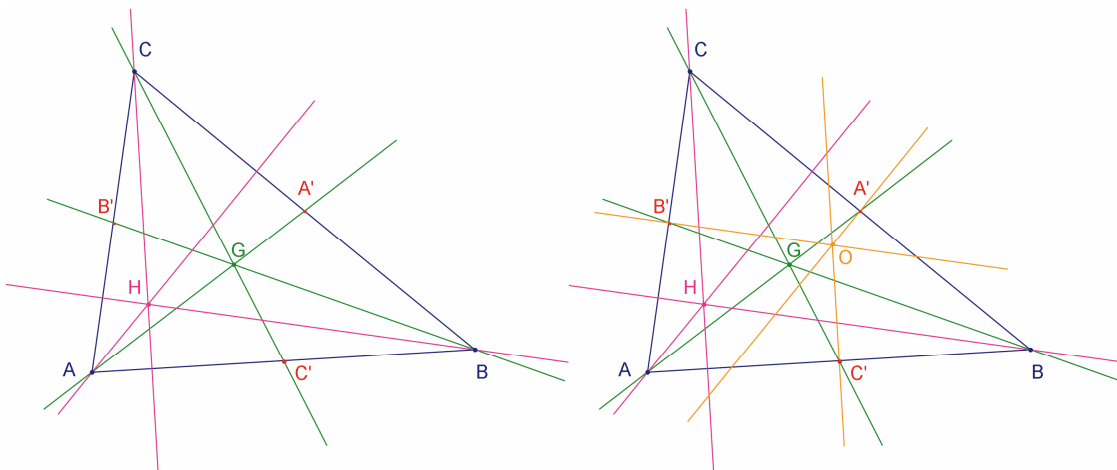
Aktivujte nástroj [Body] **Body** a potom posuňte ukazovateľ myši blízko k priesečníku ťažníc (ťažisku). Cabri sa pokúsi zostrojiť priesečník dvoch priamok, ale nakoľko je tu nejednoznačnosť (na výber je z troch rôznobežiek) objaví sa ponuka výberu z troch možných priamok, vyberte dve na zostrojenie priesečníka. Keď sa ukazovateľ myši posúva smerom dole po ponúknutom zozname možných útvarov, korešpondujúce priamky útvaru sa zvýraznia. Označte priesečník ťažníc (ťažisko) bodom G.



**Obrázok 2.3** – Konštrukcia priesečníka ťažníc (ťažiska) a rozhodovanie o nejednoznačnosti výberu.

Výšky trojuholníka zostrojíte nástrojom [Konštrukcie] Kolmica. Nástroj umožní zostrojiť jedinú priamku, ktorá je kolmá v danom smere a prechádza cez daný bod. Z toho dôvodu vyberte bod: priamku, úsečku, polpriamku... atď. Poradie výberu nie je dôležité. Na zostrojenie výšky cez A vyberte A a potom stranu BC. Výšky cez B a C sa zostroja podobne. Rovnakým spôsobom ako u ťažníc si vyberte farbu pre výšky a zostrojte ich priesečník H.

Nástroj [Konštrukcie] Kolmica prechádzajúca stredom sa používa na zostrojenie kolmice prechádzajúcej stredom úsečky. Stačí iba vybrať úsečku alebo jej dva koncové body. Priesečník troch kolmíc prechádzajúcich stredom strán označte O.

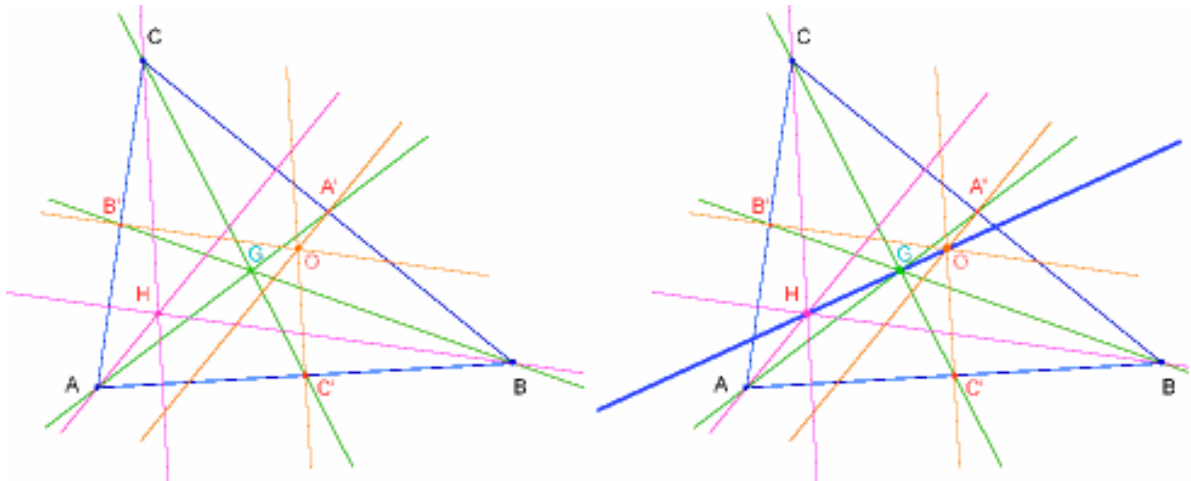


**Obrázok 2.4** – [Vľavo]. Výšky sú zostrojené pomocou nástroja [Konštrukcie] Kolmica. [Vpravo]. Kolmice prechádzajúce stredom strán sú zostrojené použitím nástroja [Konštrukcie] Kolmica prechádzajúca stredom.

Nástroj [Vlastnosti] Kolineárny? nám umožní zistiť, či body O, H a G sú kolineárne. Výberom bodov jeden po druhom a potom kliknutím na okno výkresu Cabri zobrazí odpoveď vo forme vety vyjadrujúcej kolineárnosť (nekolineárnosť) bodov.

Ak sa pohne nezávislými bodmi útvaru, tento text je súčasne aktualizovaný rovnako ako iné prvky útvaru.

Eulerova priamka je zostrojená pomocou [Priamky] Priamka z troch bodov O, H a G vyberte napríklad O a H. Pomocou [Atribúty] Hrúbka... zvýraznite túto priamku.



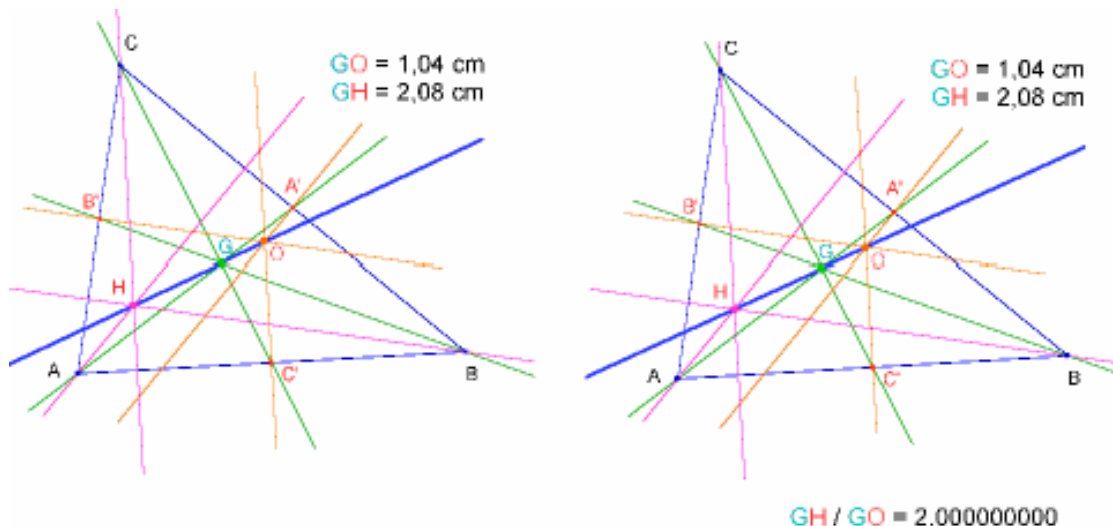
**Obrázok 2.5** – [Vľavo]. Kolineárnosť bodov  $O, H$  a  $G$ . Nástroj [Vastnosti] Kolineárny? vytvorí správu **Body sú kolineárne** alebo **Body nie sú kolineárne**.

[Vpravo]. Eulerova priamka je zvýraznená hrubou čiarou, je zmenená nástrojom [Kreslenie] Hrúbka...

Keď sa mení tvar trojuholníka zmenou relatívnej polohy jedného z vrcholov, bude zrejmé, že  $G$  bude vždy medzi  $O$  a  $H$ , a takisto, že jeho relatívna poloha na úsečke sa nemení. Tento predpoklad si môžeme overiť odmeraním dĺžok  $GO$  a  $GH$ .

Aktivujte nástroj [Meranie] Vzďialenosť alebo dĺžka. Tento nástroj uskutoční rôzne merania medzi dvoma bodmi, alebo dĺžky úsečky, závisiace od vybraného útvaru. Vyberte  $G$  a následne  $O$ : objaví sa vzdialenosť od  $G$  po  $O$  udané v centimetroch. Urobte to isté pre  $G$  a  $H$ . Potom napríklad pridaním písmen **GO=** pred čísla môžete upraviť zodpovedajúci text.



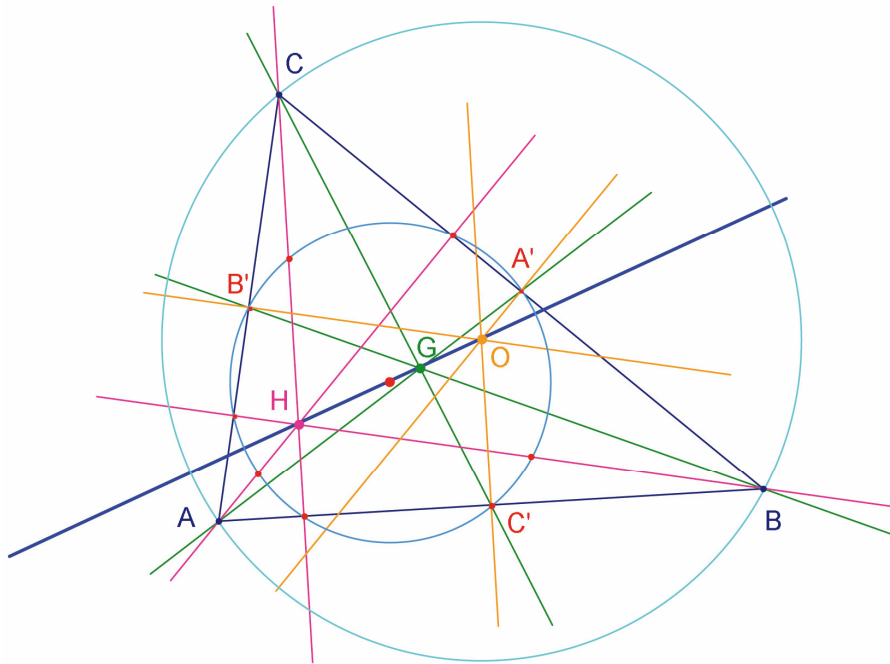


**Obrázok 2.6** - [Vľavo]. Nástroj [Meranie] *Vzdialenosť alebo dĺžka* sa použil na zistenie dĺžok GO a GH.  
[Vpravo]. Používanie kalkulačky– [Meranie] *Kalkulačka* – výpočet pomeru GH/GO a zistenie, že to sa vždy rovná 2.

Ak sa mení pôvodný trojuholník, zdá sa, že vzdialenosť GH je vždy dvojnásobkom GO. Aby sme si to overili, vypočítajme pomer GH/GO. Použite nástroj [Meranie] *Kalkulačka*. Kliknite na číslo, udávajúce vzdialenosť GH, potom klávesový operátor „ / “ (delenie) a na záver kliknite na číslo udávajúce vzdialenosť GO. Kliknite na kláves = aby ste dostali výsledok, ktorý sa môže „tahať a pustiť“ do okna výkresu. Keď sa vyberie číslo (nástroj [Ukazovateľ] *Ukazovateľ*), počet zobrazených číslic sa môže zvýšiť alebo zmenšiť pomocou + a – klávesov. Takto sa môže pomer udať desiatimi alebo viac číslicami, ukážuc, že tento pomer je konštantný a rovná sa 2.

**Príklad č.1** Pridajte do výkresu kružnicu opísanú trojuholníku so stredom O, prechádzajúcu A, B a C. Použite nástroj [Krivky] *Kružnica*.

**Príklad č.2** V ďalšom pridajte trojuholníku *kružnicu deviatich bodov*. Stred tejto kružnice je stred OH a prechádza: stredmi strán A', B' a C', päťami každej výšky a každým stredom úsečiek HA, HB a HC.



**Obrázok 2.7** - Konečný útvar s kružnicou opísanou trojuholníku a kružnicou deviatich bodov.

## HĽADANIE BODU

V tejto kapitole uvidíme cvičenia, ktoré ukážu možnosti bádania s Cabri. Začnite tromi danými bodmi A, B a C, budeme hľadať bod M pre ktorý platí:

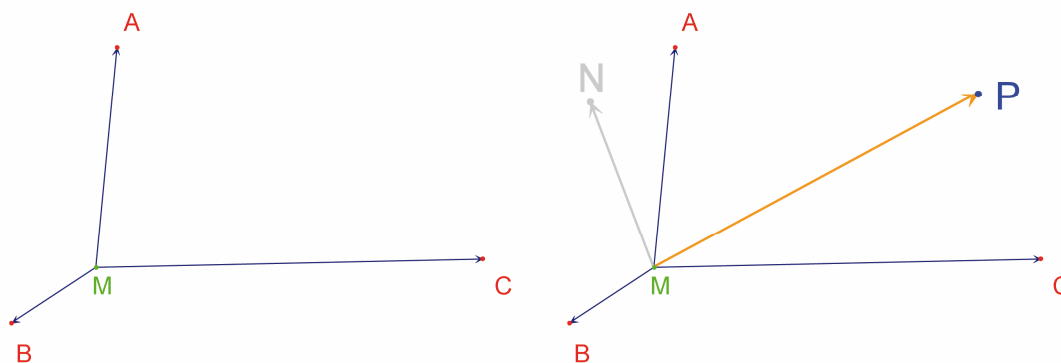
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Najprv však zostrojte štyri body v náhodných polohách použitím nástroja **[Body] Bod** pomenujte ich počas konštrukcie A, B, C a M, písaním písmena hneď po zostrojení každého bodu.

Cabri umožní používanie vektorov. Každý vektor je zastúpený orientovanou úsečkou. Zostrojte vektor  $\overrightarrow{MA}$  použitím nástroja **[Priamky] Vektor** výberom najprv M a potom A. M je počiatočným bodom vektora zastúpeného orientovanou úsečkou. Urobte to isté pre  $\overrightarrow{MB}$  a  $\overrightarrow{MC}$ .

Ďalej zostrojte výslednicu  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  použitím nástroja **[Konštrukcie] Súčet vektorov**. Najprv kliknite na dva vektory a potom na začiatok výsledného vektora, tu M. Ďalší, koncový bod pomenujte N.

Na záver, podobným spôsobom zostrojte výslednicu súčtu troch vektorov s počiatočným bodom M, podobne pridajte  $\overrightarrow{MN}$  (čo sa rovná  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ ) a  $\overrightarrow{MC}$ . Pomenujte ďalší koncový bod vektora: P.



**Obrázok 3.1** - [Vľavo]. Vektory  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$  a  $\vec{MC}$  boli zostrojené začínajúc hociktorým z bodov A, B, C a ďalším bodom M.

[Vpravo].  $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB}$  a  $\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$  boli zostrojené použitím nástroja [Konštrukcie] Súčet vektorov.

Teraz budeme hľadať názorné riešenie problému. Preto aktivujte nástroj [Ukazovateľ] Ukazovateľ a pohnite bodom M. Pohybom bodu M v okne výkresu sa výslednica vektorov nepretržite aktualizuje v okne výkresu. Ako vidno, veľkosť a smer závisí od polohy M vzhľadom k bodom A, B a C. Takto možno vytvoriť nasledovné hypotézy (okrem iných):

- Existuje iba jedna poloha bodu M, pre ktorú platí, že výslednica troch vektorov je nulový vektor: daný problém má jedinečné riešenie. Bod, ktorý je riešením je vo vnútri trojuholníka.
- Štvoruholník MANB je rovnobežníkom.
- Štvoruholník MCPN je rovnobežníkom.
- V prípade nulovej výslednice vektory  $\vec{MN}$  a  $\vec{MC}$  musia byť kolineárne a navyše musia mať rovnakú veľkosť, ale opačný smer.
- $\vec{MP}$  vždy prechádza tým istým bodom a ten bod je riešením úlohy.
- Poloha bodu P je závislá od polohy M. Na základe tohto faktu sa môže definovať zobrazenie, ktoré spája P s M. Riešením problému je invariantný bod v tomto zobrazení.

V súlade s vykonanými rôznymi pozorovaniami, skúmanie sa môže urobiť v rôznych smeroch. Napríklad predpokladajme, že sa pozorovaním zistilo, že vektory  $\overrightarrow{MN}$  a  $\overrightarrow{MC}$  musia mať opačné smery. Ďalšia otázka vznikne: pre ktoré polohy bodu M **sú tieto dva vektory kolineárne?** Pohnite M tak, aby tieto dva vektory boli kolineárne. Vidno, že M musí ležať na priamke a tá prechádza bodom C a stredom AB. Preto táto priamka je ťažnicou trojuholníka na stranu AB. Nakoľko bod M rovnako závisí od A, B a C, vidno, že M musí ležať aj na ďalších dvoch ťažniciach a hľadaný bod bude priesečníkom troch ťažísk (ťažiskom).

V rámci aktivity v triede by žiaci mohli pokračovať rozvíjaním konštrukcie bodu riešenia a dôkazom hypotézy o riešení úlohy.

Presvedčivá ilustračná sila dynamickej konštrukcie je oveľa silnejšia než kreslenie statického útvaru na papieri. Faktom je, že veľké množstvo prípadov manipulácií s konštrukciou je postačujúce na zistenie hypotézy. Vo väčšine prípadov je platný ten predpoklad, ktorý ostane platným aj po zmene útvaru.

Použitie tejto metódy je v triede najefektívnejšie a dobrým nápadom je (okrem iných) uvažovanie o nasledujúcich bodoch najprv spolu so žiakmi:

- Je dynamická konštrukcia, ktorá je vizuálne správna skutočne aj správna?
- Je správna dynamická konštrukcia odpoveďou na otázku?
- Kedy môže byť matematická argumentácia považovaná za dôkaz?
- Čo chýba dynamickej konštrukcii, aby bola správna?
- Musí byť dôkaz založený na procese zostrojenia útvaru?

**Cvičenie č.3** Rozšírte problém na štyri body, nájdite také body M, pre ktoré platí:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$

**Cvičenie č.4\*** Vymenujte všetky spôsoby skúmania a dôkazov potrebných pre úvodný problém (tri body), ktoré sú dostupné pre maturantov.

**Cvičenie č.5\*** Vyšetrite a zostrojte body M, ktoré minimalizujú súčet vzdialeností k trom bodom:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ . Riešením je Fermatov bod trojuholníka ABC.

<sup>1</sup>*Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

## VARIGNONOV ŠTVORUHOLNÍK

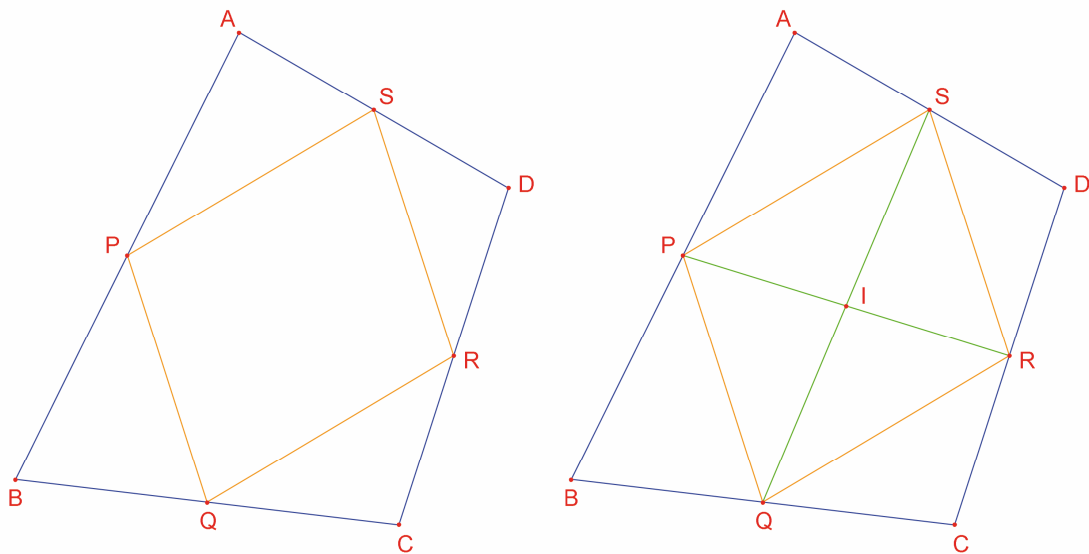
Nasledujúce cvičenie ukáže niekoľko konštrukcií založených na Varignonovej vete.

Najprv zostrojte ľubovoľný štvoruholník. Aktivujte nástroj **[Priamky] n-uholník** a potom vyberte štyri body. Pomenujte ich počas konštrukcie: A, B, C, D. Zadať n-uholník opätovným kliknutím na bod A po vytvorení bodu D.

Ďalej zostrojte stredy: P je stred AB, Q je stred BC, R je stred CD a S je stred DA, použitím nástroja **[Konštrukcie] Stred**.

Na záver zostrojte štvoruholník PQRS pomocou nástroja **[Priamky] n-uholník**.

Použitím nástroja **[Ukazovateľ] Ukazovateľ** meňte útvar (n-uholník). Zdá sa, že PQRS je vždy rovnobežník. Použitím nástroja **[Vlastnosti] Rovnobežný?** sa opýtame Cabri, či priamky [PQ] a [RS] sú rovnobežné, podobne aj priamky [PS] a [QR]. Vyberte stranu [PQ] a potom [RS], objaví sa nápis potvrdzujúci rovnobežnosť strán. To isté urobte aj pre [PS] a [QR], aby ste zistili, či sú rovnobežné.



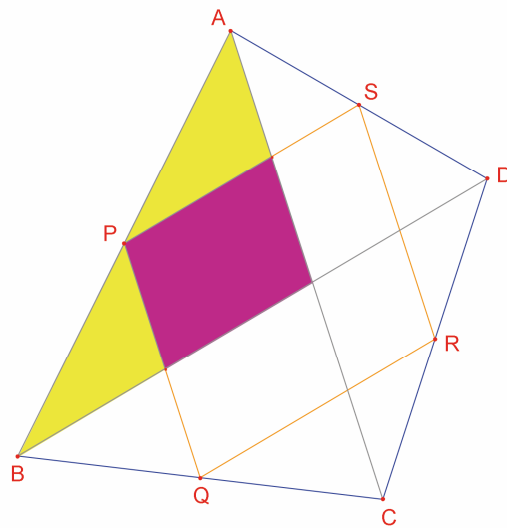
**Obrázok 4.1** - [Vľavo]. Začnite ľubovoľným štvoruholníkom ABCD, štvoruholník PQRS má vrcholy v stredoch strán štvoruholníka ABCD. [Vpravo]. Konštrukcia uhlopriečok štvoruholníka PQRS a ukážka toho, že sa navzájom rozpoľujú.

Zostrojte uhlopriečky [PR] a [QS] použitím nástroja [Priamky] Úsečka a ich priesečník I nástrojom [Body]Bod. Existuje veľa spôsobov, ako ukázať, že I je stredom oboch úsečiek [PR] a [QS], a z toho vyplýva, že PQRS je rovnobežník. Napríklad: P je stredom úsečky pozostávajúcej z dvoch rovnakých častí v bodoch A a B  $\{(A,1),(B,1)\}$ . Podobne R je stredom C a D  $\{(C,1),(D,1)\}$ . A tak stred PR je stredom  $\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$ . Stred [QS] bude tým istým bodom. Teda obidva stredy sa zhodujú v priesečníku I.

**Varignonova teorema:** Štvoruholník PQRS, ktorého vrcholmi sú stredy ľubovoľného štvoruholníka ABCD, je rovnobežník, a jeho obsah je polovicou obsahu štvoruholníka ABCD.

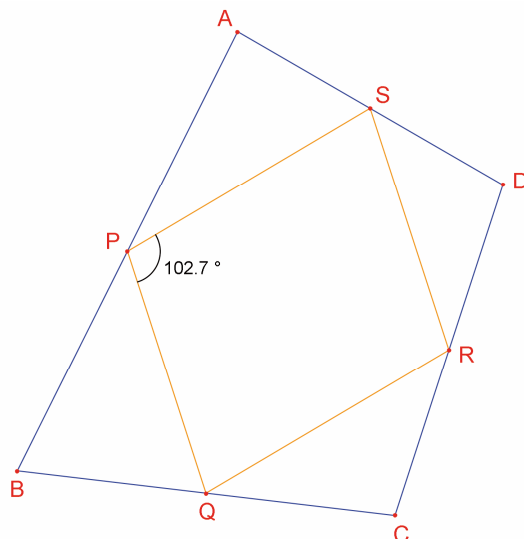
**Cvičenie č.6** Dokázali sme prvú časť teórie. Teraz ukážeme, že aj druhá časť teórie, týkajúca sa obsahu PQRS, je pravdivá. Pomôcka: použite útvar z obrázka 4.2.





**Obrázok 4.2** – Konštrukcia ako dôkaz druhej časti teórie.

Neberte do úvahy A, B, a C, posuňte D tak, aby PQRS bol približne obdĺžnik. Nakoľko my už vieme, že PQRS je rovnobežník, je postačujúce ukázať, že jeden z jeho uhlov je pravý. Použitím nástroja [Meranie] Uhol odmerajte veľkosť uhla vo vrchole P. Predpokladá sa výber troch bodov tak, aby druhým bodom bol vrchol uhla. Tu by ste mohli zvoliť napríklad S, P(vrchol uhla) a Q.



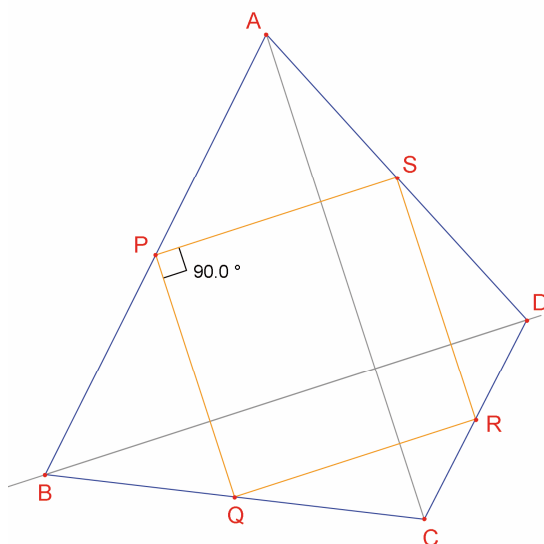
**Obrázok 4.3** - Meranie uhla P štvoruholníka PQRS.

Tento nástroj [Meranie] Uhol môže byť takisto použitý na udanie veľkosti uhla, ktorý v predchádzajúcom bol označený nástrojom [Text a symboly] Označenie uhla. Tento nástroj takisto predpokladá, aby sa tri body vybrali v rovnakom poradí ako pre nástroj [Meranie] Uhol. Posunutím D tak, aby PQRS bol obdĺžnik, vidno, že existuje nekonečne veľa riešení, ak D leží na jednej z priamok. Fakticky, ak sa nakreslia uhlopriečky AC a BD štvoruholníka ABCD, vidno, že strany PQRS sú rovnobežné s nimi a z toho vyplýva, že PQRS je obdĺžnik práve vtedy, ak AC a BD sú kolmé.

Aby sme zaistili, že PQRS je vždy obdĺžnik, potrebujeme predefinovať polohu bodu D. Výberom A a C nakreslite priamku AC nástrojom [Priamky] Priamka, a potom nakreslite kolmicu na túto priamku cez B použitím nástroja [Konštrukcie] Kolmica výberom bodu B a priamky AC.

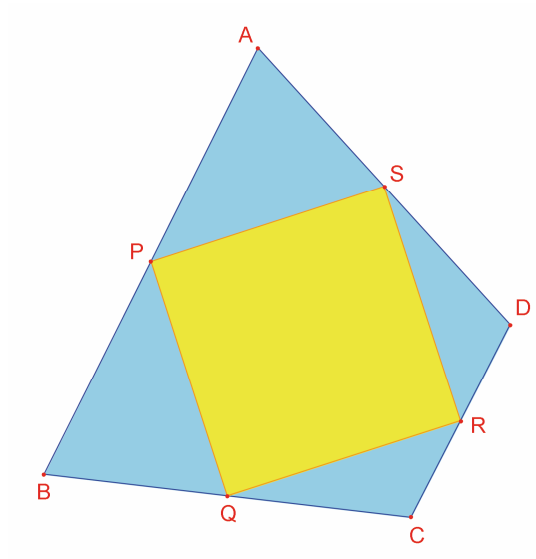
D je teraz nezávislý, pohyblivý bod útvaru. Budeme ho modifikovať a tak sa stane bodom, ktorý leží na kolmici AC cez B. Aktivujte nástroj [Konštrukcie] Predefinuj útvar a potom vyberte D. Objaví sa ponuka možností na predefinovanie D. Vyberte **Bod na útvere** a potom vyberte ľubovoľný bod na kolmici. D sa posunie k tomuto bodu a potom bude bodom na priamke AC.

Predefinovanie je výkonný nástroj, ktorý umožní užívateľovi zväčšovať alebo znižovať mieru voľnosti pohybu prvkov útvaru bez prekreslenia útvaru celkom od začiatku.



**Obrázok 4.4** - Bod D je teraz predefinovaný, takže PQRS bude vždy obdĺžnik. D ešte stále má určitú mieru voľnosti pohybu a je schopný sa pohybovať po priamke.

**Cvičenie č.7** Nájdite nutné a postačujúce podmienky, aby PQRS bol štvorcom. Znova predefinujte bod D tak, aby sa konštrukciou vytvorili iba štvorce.



**Obrázok 4.5** - Tu bod D nemá žiadnu mieru voľnosti pohybu a PQRS bude vždy štvorec.