

CABRI<sup>®</sup> II PLUS



Sáng tạo các Công cụ Toán học

**SÁCH HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG**



## CHÀO MỪNG !

Chào mừng đến với thế giới động của Cabri!

Ra đời vào cuối những năm 80 tại IMAC, phòng nghiên cứu thực nghiệm hợp tác với CNRS (Trung tâm nghiên cứu khoa học Quốc gia) và trường Đại học Joseph Fourier của Grenoble, cho đến thời điểm hiện tại Cabri đã thu hút được hơn mười lăm triệu người sử dụng nó trên máy tính điện tử và máy tính bỏ túi có đồ thị Texas Instruments trên khắp thế giới. Cabri hiện nay đang được phát triển và phân phối bởi công ty Cabrilog, thành lập vào tháng ba năm 2000 bởi Jean-Marie LABORDE, giám đốc nghiên cứu của CNRS và là người cha tinh thần của Cabri.

Việc dựng các hình hình học trên máy tính điện tử đem lại một bước đột phá mới so với các thao tác cổ điển bằng giấy, bút chì, thước kẻ và compa. Cabri II Plus sở hữu một số lượng lớn các chức năng hiệu quả và dễ sử dụng. Ta có thể dễ dàng thao tác một cách tự do các hình từ đơn giản cho đến phức tạp nhất. Ở bất kỳ thời điểm nào, ta cũng có thể kiểm nghiệm lại cách dựng của một hình, đưa ra những giả thuyết, cân nhắc, tính toán, xóa, che/hiện các đối tượng, đặt màu sắc, các nét chấm, soạn văn bản, hoặc làm lại tất cả từ đầu.

Cabri II Plus là một trong những phần mềm hiện đại nhất cho việc dạy và học môn hình học. Nó dành cho giáo viên cũng như học sinh và có thể sử dụng cho các đối tượng từ tiểu học cho đến đại học.

Một vài tính năng của phần mềm mang tính đặc thù cho các hệ điều hành Macintosh/Windows : các phím **Ctrl** et **Alt** của Windows tương ứng với các phím **Option** và **Alt** trên Mac OS. Kích phím phải chuột vào Windows tương ứng với **Ctrl** + kích chuột trên Mac OS.

- **Giao diện** : Các biểu tượng mới to hơn và dễ nhìn hơn. Các bảng chọn ngữ cảnh làm cho việc sử dụng được trực quan hơn bằng cách hạn chế sự mập mờ trong một số chọn lựa hoặc thay đổi thuộc tính của bất kỳ đối tượng nào chỉ bằng một vài cái kích chuột.
- **Tên gọi** : Đặt tên cho các đối tượng và đặt chúng vào bất kỳ nơi nào đó ở xung quanh đối tượng.

- **Biểu thức** : Định nghĩa và đánh giá một cách tương tác các biểu thức có một hoặc nhiều biến.
- **Đồ thị tức thời** : Vẽ và nghiên cứu dễ dàng các đồ thị của một hoặc nhiều hàm số.
- **Tập hợp điểm** : Dựng tập hợp các điểm hoặc đối tượng, tập hợp hoặc giao của các tập hợp điểm. Ta có thể hiển thị các phương trình của các đường đại số được dựng bởi công cụ Tập hợp điểm.
- **Đường thẳng thông minh** : Hiển thị một phần hữu dụng của đường thẳng. Chiều dài của phần này đó có thể được thay đổi tùy theo ý muốn.
- **Màu sắc** : Chọn màu sắc cho các đối tượng và các văn bản cũng như các màu nền với sự trợ giúp của bảng màu mở rộng mới hoặc dùng các biến màu một cách linh hoạt.
- **Hình ảnh (Bitmaps, JPEG, GIF)** : Gắn một hình ảnh vào một vài đối tượng nào đó của một hình (các điểm, các đoạn, các đa giác, các đáy). Các hình ảnh được tính toán lại trong quá trình thực hiện hình động và các thao tác trên hình.
- **Văn bản** : Phong cách, kiểu chữ và các thuộc tính của văn bản của bất kỳ đối tượng nào đều có thể được thay đổi một cách tự do.
- **Cửa sổ đặc tả** : Một cửa sổ có thể được mở để nêu lại tất cả các bước dựng một hình.
- **Lưu lại một phiên làm việc** : Lưu lại một phiên làm việc trong thời gian sử dụng phần mềm. Sau đó ta có thể đọc lại nó trên màn hình hoặc sau đó in ra để nghiên cứu sự tiến triển của học sinh và để xác định một cách rõ ràng những khó khăn học sinh gặp phải trong quá trình thực nghiệm.
- **Nhập/xuất các hình** : Các hình có thể chuyển tới hoặc chuyển từ một máy tính bỏ túi có chức năng đồ thị sử dụng Cabri Junior (TI-83 Plus và TI-84 Plus). Tất cả các tính năng đồ mới này có thể đem lại một tầm vóc mới trong thực tiễn dạy học của bạn.

Tài liệu này được chia ra làm hai phần.

Phần **[1] LÀM QUEN** dành cho những người lần đầu tiên sử dụng phần mềm. Phần này cho phép người sử dụng tự làm quen với giao diện của Cabri II Plus và các qui ước sử dụng chuột. Tuy nhiên, kinh nghiệm cho thấy rằng phần này được nắm bắt nhanh, và ngay tại lớp, các học sinh đã có thể “làm” hình học ngay từ ba mươi phút đầu tiên sử dụng phần mềm.

Phần **[2] KHÁM PHÁ** dành cho những người mới sử dụng và đề xuất các hoạt động dành cho trình độ của học sinh trung học cơ sở và trung học phổ thông. Nhiều tài liệu khác có thể tìm thấy dưới dạng tài liệu PDF nằm trong thư mục cài đặt của phần mềm hoặc trên CD-ROM cài đặt.

Tài liệu đầu tiên, **THAM KHẢO.pdf** giới thiệu hoàn chỉnh về phần mềm.

Tài liệu thứ hai, **NÂNG CAO.pdf** giới thiệu các hoạt động khác ở mức độ khó hơn, ở trình độ trung học phổ thông, dự bị đại học và đại học đại cương.

Các hoạt động đề nghị trong những tài liệu này phần lớn độc lập với nhau. Bạn đọc được khuyến khích dựng các hình chi tiết, và sau đó làm các bài tập được đề nghị.

Sau đây tên Cabri dùng để chỉ Cabri II Plus.

Trang Web [www.cabri.com](http://www.cabri.com) của chúng tôi cung cấp cho bạn các thông tin mới nhất liên quan đến các sản phẩm, đặc biệt những phiên bản mới của tài liệu này. Trang web còn có các liên kết với khoảng hàng chục trang mạng Internet cũng như nhiều tài liệu tham khảo gồm một số lượng lớn sách về hình học và về Cabri.

Toàn bộ nhóm CABRILOG chúc các bạn dành nhiều thời gian và say mê trong việc xây dựng, tìm tòi và khám phá với phần mềm.

©2006 CABRILOG SAS

**Sách sử dụng Cabri II Plus :**

**Tác giả phiên bản gốc :** Eric Bainville

**Cập nhật :** Christophe Foucher, 30 tháng Sáu năm 2005

**Phiên bản mới :** [www.cabri.com](http://www.cabri.com)

**Đề thông báo lỗi cho chúng tôi :** [support@cabri.com](mailto:support@cabri.com)

**Tạo đồ họa, chỉnh trang và đọc bản thảo :** Cabrilog

# MỤC LỤC

<b>1 - LÀM QUEN</b>	<b>Trang 9</b>
1.1 TRIẾT LÍ	Trang 9
1.2 GIAO DIỆN CỦA PHẦN MỀM	Trang 9
1.3 SỬ DỤNG CON CHUỘT	Trang 12
1.4 PHÉP DỰNG HÌNH ĐẦU TIÊN CỦA BẠN	Trang 14
<b>2 - KHÁM PHÁ : ĐƯỜNG THẲNG EULER TRONG TAM GIÁC</b>	<b>Trang 21</b>
<b>3 - KHÁM PHÁ : CHINH PHỤC ĐIỂM BÍ MẬT</b>	<b>Trang 29</b>
<b>4 - KHÁM PHÁ : TỨ GIÁC VARIGNON</b>	<b>Trang 33</b>





## LÀM QUEN

### 1.1 TRIẾT LÝ

Triết lý của Cabri là cho phép tối đa các tương tác (bằng chuột, bàn phím...) giữa người sử dụng và phần mềm. Trong mỗi trường hợp, làm sao để phần mềm đáp ứng một cách hiệu quả những mong đợi của người sử dụng bằng cách, một mặt là vừa tôn trọng các tập tính thông thường của các trình ứng dụng và hệ thống, đồng thời mặt khác đảm bảo các tính chất toán học một cách dễ nhận biết nhất.

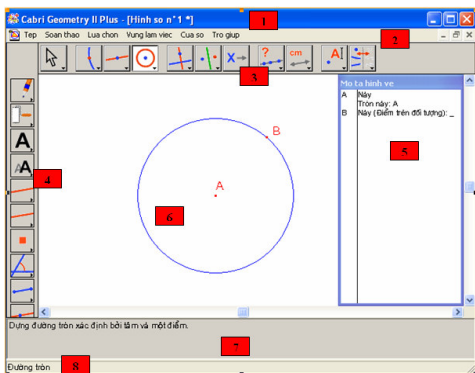
Một *tài liệu* Cabri bao gồm một *hình* được dựng một cách tự do trên một tờ giấy trắng ảo khổ một mét vuông (1m x 1m). Một hình được tạo ra từ các đối tượng hình học (điểm, đường thẳng, đường tròn,...) cũng như từ các đối tượng khác (số, văn bản, công thức,...)

Một tài liệu cũng có thể gồm các *macro-dựng hình*, cho phép mở rộng các chức năng của phần mềm thông qua việc ghi nhớ các phép dựng hình trung gian.

Phần mềm cho phép mở đồng thời nhiều tài liệu và việc Cắt-Sao chép/Dán giữa các tài liệu đang mở.

### 1.2 GIAO DIỆN CỦA PHẦN MỀM

Hình trên chỉ ra cửa sổ chính của ứng dụng và các vùng khác nhau của nó. Khi khởi động Cabri, các thanh thuộc tính, cửa sổ trợ giúp và cửa sổ đặc tả không được hiển thị.



1. Thanh tiêu đề
2. Thanh bảng chọn
3. Thanh công cụ
4. Thanh thuộc tính
5. Cửa sổ đặc tả
6. Vùng làm việc
7. Cửa sổ trợ giúp
8. Cửa sổ trạng thái

**Thanh tiêu đề** chỉ tên của tập tin chứa hình, hoặc **Hình số 1,2...** nếu hình vẫn chưa được đặt tên.

**Thanh bảng chọn** cho phép truy cập đến các lệnh của ứng dụng, nó tương ứng với các lệnh thông dụng trong các phần mềm.

Trong phần sau của tài liệu này, chúng tôi sẽ qui ước thao tác chọn **Hoạt động** của **Bảng chọn** bởi **[Bảng chọn]Hoạt động**. Ví dụ, **[Tập]Ghi tệp mới ...** tương ứng lệnh **Ghi tệp mới...** của bảng chọn **Tệp**.

**Thanh công cụ** cung cấp các công cụ cho phép tạo và thao tác các hình. Thanh công cụ này gồm rất nhiều những hộp công cụ, trong mỗi hộp là một công cụ được hiển thị, tương ứng với một biểu tượng của thanh. Công cụ đang được kích hoạt được thể hiện bởi một nút màu sẫm, trên nền màu trắng. Các công cụ khác được thể hiện bởi các nút không sẫm màu, với nền màu ghi. Một kích chuột nhanh vào một nút sẽ kích hoạt công cụ tương ứng. Kích và nhấn giữ chuột trên một nút sẽ mở cuộn hộp công cụ, và cho phép lựa chọn trên đó một công cụ khác. Công cụ này sẽ trở thành công cụ được hiển thị của hộp công cụ, và là công cụ được kích hoạt.

**Thanh công cụ** có thể được cấu tạo lại một cách tự do bởi người sử dụng, và có thể sẽ được khóa ở một cấu hình nhất định cho việc sử dụng trên lớp (xem chương : **[8] ƯU TIÊN VÀ CÁ THỂ HÓA** trong **THAM KHẢO.PDF**)



- |                |              |                           |
|----------------|--------------|---------------------------|
| 1. Thao tác    | 5. Dựng hình | 9. Độ đo                  |
| 2. Điểm        | 6. Biến hình | 10. Văn bản và biểu tượng |
| 3. Đường thẳng | 7. Macro     | 11. Thuộc tính            |
| 4. Đường cong  | 8. Tính chất |                           |

Trong phần sau của tài liệu này, chúng tôi sẽ gọi công cụ **Công cụ** của hộp **Hộp** bởi **[Hộp]Công cụ**, với biểu tượng tương ứng được nhắc lại ở ngoài lề (một vài tựa quá dài trên lề đã được viết ngắn lại). Ví dụ **[Đường]Nửa đường thẳng** thể hiện công cụ **Nửa đường thẳng** của hộp công cụ **Đường thẳng**.

Các biểu tượng của thanh công cụ có thể được hiển thị với hai kích cỡ. Để thay đổi kích cỡ, kích phím phải chuột sau khi đã dịch chuyển con trỏ trong thanh công cụ về phía bên phải của công cụ cuối cùng và chọn « Biểu tượng bé ».

**Thanh trạng thái** ở phía dưới cửa sổ, chỉ dẫn một cách thường trực công cụ được kích hoạt hiện hành.

**Thanh thuộc tính** cho phép thay đổi các thuộc tính của đối tượng : màu sắc, kiểu, kích thước,... Nó được kích hoạt bởi lệnh **[Lựa chọn]Hiện các thuộc tính**, và được tắt lại bởi **[Lựa chọn]Che các thuộc tính** hoặc bởi phím **F9** (Windows) hoặc **Command-F9** (Macintosh);

**Cửa sổ trợ giúp** cung cấp sự hỗ trợ ngắn gọn trên công cụ được chọn. Nó chỉ ra những đối tượng tương ứng với công cụ này, và tắt cả những đối tượng được dựng. Nó được kích hoạt/tắt bởi **F1** (chỉ dành cho Windows).

**Cửa sổ đặc tả** chứa sự đặc tả hình dưới dạng văn bản. Ta có thể tìm thấy ở trong đó tập hợp các đối tượng được dựng và các phương pháp dựng chúng. Cửa sổ này được kích hoạt bởi lệnh **[Lựa chọn]Hiện đặc tả**, và được tắt bởi **[Lựa chọn]Che đặc tả**, hoặc bởi phím **F10**.

Cuối cùng, **vùng làm việc** thể hiện một phần của trang làm việc. Đây là nơi mà ta thực hiện những việc dựng hình hình học.

### 1.3 SỬ DỤNG CHUỘT

Phần lớn các chức năng của phần mềm được thực hiện bằng việc sử dụng chuột. Các thao tác sử dụng chuột là dịch chuyển, kích chuột trên một nút và thả một nút. Ta sử dụng phím trái của chuột trong trường hợp không có chỉ dẫn đặc biệt.

- Một chuỗi kích chuột-thả chuột được gọi là **kích chuột**
- Một chuỗi kích chuột-thả-kích chuột-thả được gọi là **kích đúp chuột**
- Một chuỗi kích chuột-dịch chuyển-thả được gọi là **rê-đặt chuột**

Khi dịch chuyển con chuột vào vùng làm việc, phần mềm sẽ chỉ dẫn ba cách để tạo ra một kích chuột hoặc một **rê-đặt chuột**.

- Dạng con trỏ,
- Văn bản hiển thị bên cạnh con trỏ,
- Hình ảnh thể hiện một phần đang được dựng của đối tượng.

Tùy trường hợp, văn bản và hình ảnh thể hiện một phần có thể không được hiển thị.

## Sau đây là các dạng con trỏ :



Một đối tượng tồn tại có thể được chọn



Một đối tượng tồn tại có thể được chọn, được dịch chuyển, hoặc được sử dụng trong một phép dựng hình.



Xuất hiện khi ta kích chuột vào đối tượng tồn tại để chọn hoặc để sử dụng trong một phép dựng hình.



Có nhiều sự lựa chọn với con trỏ. Kích chuột để làm xuất hiện bảng chọn cho phép chính xác hóa các đối tượng cần chọn trong số tất cả các khả năng.



Một đối tượng tồn tại đang được dịch chuyển.



Con trỏ đang ở trong phần tự do của tờ giấy, ta có thể xác định một lựa chọn chữ nhật bằng cách rê-thả chuột.



Chỉ ra cách dịch chuyển tờ giấy. Ta có thể vào cách này trong mọi thời điểm bằng cách ấn giữ phím **Ctrl** (Windows) hoặc **Option** (Mac OS). Ở trạng thái này, rê-thả chuột sẽ dịch chuyển tờ giấy trong cửa sổ.



Xuất hiện trong khi dịch chuyển tờ giấy.



Cho biết rằng một kích chuột sẽ tạo ra một điểm tự do mới trên giấy.



Cho biết rằng một kích chuột sẽ tạo ra một điểm tự do mới trên một đối tượng đang tồn tại hoặc tại giao điểm của hai đối tượng tồn tại.



Cho biết một kích chuột sẽ lấp đầy đối tượng dưới con trỏ với màu hiện hành.

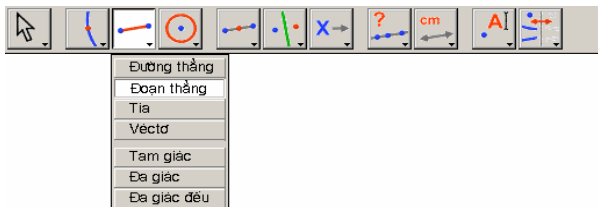


Cho biết rằng một kích chuột sẽ thay đổi thuộc tính (ví dụ màu, kiểu, độ dày,...) của đối tượng dưới con trỏ.

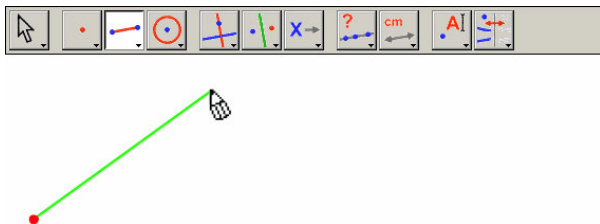
## 1.4 PHÉP DỰNG HÌNH ĐẦU TIÊN CỦA BẠN

Để minh họa cho chương [1] LÀM QUEN, ta hãy dựng một hình vuông biết một trong các đường chéo của nó. Khi khởi động chương trình Cabri, một tài liệu mới và trống được tạo ra và ta có thể bắt đầu một phép dựng hình ngay trên đó.

Ta dựng đoạn thẳng sẽ là một trong các đường chéo của hình vuông. Kích hoạt công cụ [Đường]Đoạn thẳng bằng cách kích chuột vào biểu tượng của đường thẳng và kích giữ chuột để làm xuất hiện hộp công cụ. Tiếp theo dịch chuyển con trỏ vào công cụ đoạn thẳng và thả chuột để kích hoạt công cụ này.




**Hình 1.1** - Chọn công cụ [Đường] Đoạn thẳng.




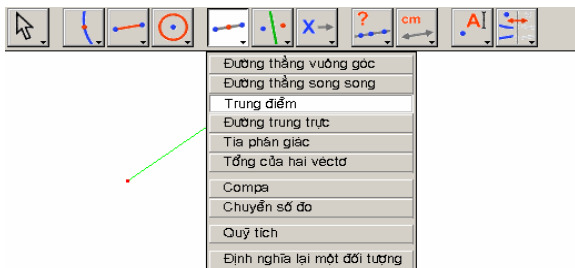
**Hình 1.2** - Dựng điểm thứ nhất. Hình ảnh của đoạn thẳng cần dựng sẽ tự dịch chuyển cùng với con trỏ đến khi điểm thứ hai của đoạn thẳng được dựng.

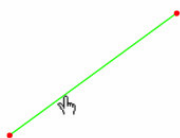


**Hình 1.3** - Đoạn thẳng được dựng sau khi tạo điểm thứ hai. Công cụ [Đường] Đoạn thẳng vẫn đang được kích hoạt, và do đó cho phép dựng một đoạn thẳng khác nữa.

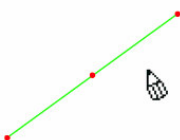
Bây giờ dịch chuyển con trỏ vào vùng làm việc, con trỏ có dạng . Một cái kích chuột sẽ tạo ra điểm đầu tiên. Tiếp tục dịch chuyển con trỏ trong vùng làm việc. Đoạn thẳng được dựng sẽ được thể hiện bằng đoạn thẳng vẽ giữa điểm đầu tiên và con trỏ. Kích chuột để tạo thêm điểm thứ hai. Và bây giờ hình vẽ bao gồm hai điểm và một đoạn thẳng.

Để dựng hình vuông, ta có thể sử dụng đường tròn có đường kính là đoạn thẳng này. Tâm của đường tròn là trung điểm của đoạn thẳng. Để dựng trung điểm, ta kích hoạt công cụ [Dựng hình] Trung điểm, rồi dịch chuyển con trỏ trên đoạn thẳng. Văn bản Trung điểm của đoạn thẳng này xuất hiện bên cạnh con trỏ và có dạng . Khi kích chuột, ta sẽ dựng được trung điểm của đoạn thẳng.





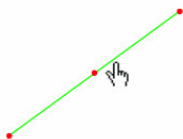
Trung điểm của đoạn thẳng này



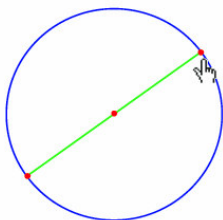
**Hình 1.4** - Phép dựng trung điểm của đoạn thẳng

Tiếp theo, ta kích hoạt công cụ [Đường]Đường tròn, và ta dịch chuyển con trỏ đến gần trung điểm đã được dựng. Khi đó dòng chữ **Điểm này làm tâm** hiện lên và ta kích chuột để chọn trung điểm của đoạn thẳng là tâm của đường tròn. Sau đó, ta cần chọn thêm một điểm để thể hiện đường tròn. Khi dịch chuyển chuột, vòng tròn có tâm như đã chọn (hướng tâm trên đường thẳng) được tự động vẽ một cách linh hoạt theo con trỏ, như cách vẽ của đoạn thẳng. Khi con trỏ đến gần đầu mút đoạn thẳng, dòng chữ **đi qua điểm này** hiện lên. Lúc này ta kích chuột và việc dựng đường tròn đi qua đầu mút này sẽ được kết thúc.






Điểm này làm tâm

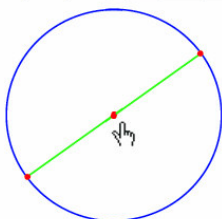
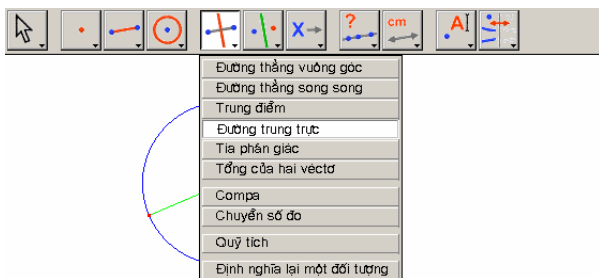


Đi qua điểm này

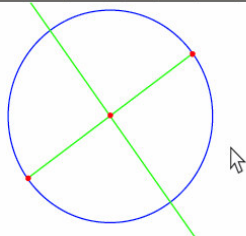
**Hình 1.5** - Dụng đường tròn có đường kính là đoạn thẳng đã cho

Ta có thể kích hoạt công cụ [Thao tác]Con trỏ để thao tác trên hình. Khi dịch chuyển trên các đầu mút của đoạn thẳng là những điểm tự do của hình vẽ, con trỏ có dạng  và dòng chữ **Điểm này**. Ta có thể dịch chuyển điểm này bằng cách rê-thả chuột. Trong trường hợp này, toàn bộ phép dựng hình sẽ được cập nhật : đoạn thẳng được vẽ lại, từ đó dẫn đến trung điểm sẽ bị dịch chuyển và tiếp theo là đường tròn.

Để dựng hình vuông, ta cần tìm thêm đường chéo thứ hai, đó chính là đường kính của đường tròn vuông góc với đoạn thẳng ban đầu. Ta sẽ dựng trung trực của đoạn thẳng, vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó. Ta kích hoạt công cụ [Dựng hình]Trung trực, rồi chọn đoạn thẳng mà ta cần dựng đường trung trực của nó.

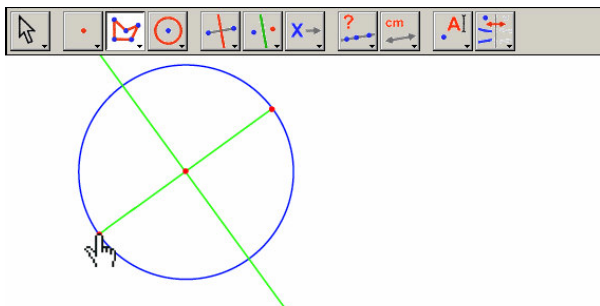
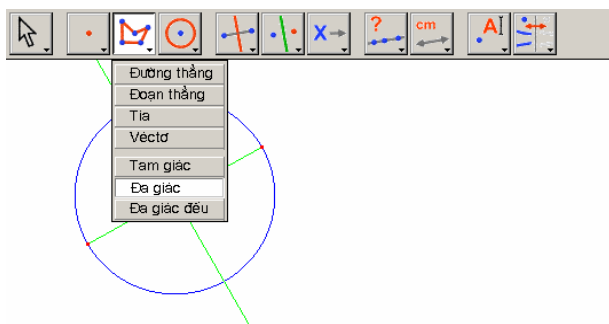


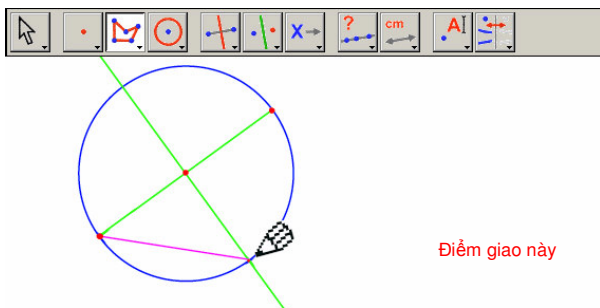
Trung trực của đoạn thẳng này



**Hình 1.6** - Dụng đường trung trực của đoạn thẳng để xác định đường chéo còn lại của hình vuông.

Để hoàn thành việc dựng hình vuông, ta kích hoạt công cụ [Đường]Đa giác. Đối với công cụ này, ta cần chọn một số điểm cần thiết để xác định một hình đa giác bất kì. Hình vẽ kết thúc khi ta chọn trở lại điểm khởi đầu hoặc kích đúp chuột khi chọn điểm cuối cùng. Hai giao điểm giữa đường tròn và đường trung trực tuy chưa được dựng một cách tường minh nhưng Cabri cho phép dựng chúng một cách ngầm ẩn khi sử dụng chúng.

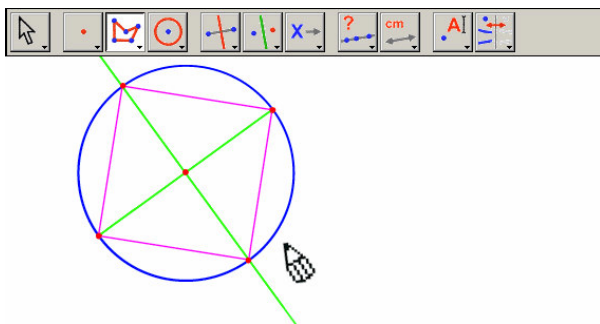




**Hình 1.7** - Dựng hình vuông bằng cách dựng một cách ngầm ẩn giao điểm của đường tròn và đường trung trực

Do đó ta chọn một đầu mút của đoạn thẳng (dòng chữ **Điểm này**) như đỉnh đầu tiên của đa giác, sau đó ta dịch chuyển con trỏ đến một trong hai giao điểm của đường tròn và đường trung trực.

Khi đó dòng chữ xuất hiện **Điểm giao này** cho biết khi ta kích chuột, giao điểm sẽ được dựng và đồng thời chọn nó như là đỉnh thứ hai của đa giác. Vì vậy ta chọn điểm này, sau đó chọn tiếp đầu mút kia của đoạn thẳng rồi sau đó chọn giao điểm thứ hai, và cuối cùng ta chọn lại điểm ban đầu để kết thúc phép dựng hình vuông.



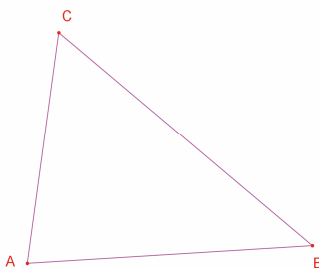
**Hình 1.8** - Phép dựng hình đầu tiên của bạn với Cabri !

## ĐƯỜNG THẲNG EULER TRONG TAM GIÁC

Dựng một tam giác ABC bất kỳ, tiếp theo dựng ba đường trung tuyến của tam giác. Đây là những đường thẳng nối mỗi đỉnh tới trung điểm của cạnh đối diện. Tiếp theo ta dựng ba đường cao của tam giác : đường vuông góc với một cạnh và đi qua đỉnh đối diện. Cuối cùng là dựng ba đường đường trung trực với các cạnh của tam giác : đường thẳng vuông góc với cạnh và đi qua trung điểm của nó. Như ta đã biết ba đường cao, ba đường trung tuyến và ba đường trung trực lần lượt đồng quy, và các điểm đồng quy này nằm trên một đường thẳng, mà ta gọi là đường thẳng *Euler* của tam giác.

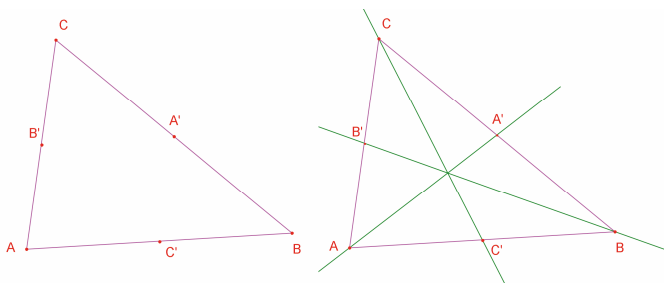
Để dựng tam giác, chọn công cụ [Đường]Tam giác. Thao tác trên thanh công cụ được miêu tả trong phần [1] LÀM QUEN của tài liệu này.

Khi công cụ [Đường]Tam giác được kích hoạt, ta chỉ cần chọn ba điểm mới trong cửa sổ bằng cách kích chuột vào vùng làm việc trống. Ta có thể đặt tên cho các điểm được dựng "tại chỗ" bằng cách gõ tên vào bàn phím. Khi tam giác đã dựng xong, các tên này có thể được dịch chuyển xung quanh các điểm, ví dụ để đặt chúng nằm ngoài tam giác.



**Hình 2.1** - Tam giác ABC dựng với công cụ [Đường]Tam giác. Các điểm được đặt tên ngay sau khi chúng được tạo ra

Để dịch chuyển tên của một đối tượng, ta dùng công cụ [Thao tác]Con trỏ bằng cách kéo tên (kích chuột và dịch chuyển con trỏ đồng thời nhấn giữ chuột giữ phím chuột). Để thay đổi tên của một đối tượng, ta kích hoạt công cụ [Văn bản và biểu tượng] Đặt tên, rồi chọn tên cần thay đổi : một cửa sổ soạn thảo xuất hiện để thực hiện việc sửa đổi. Các trung điểm được dựng nhờ vào công cụ [Dựng hình]Trung điểm. Để dựng trung điểm của đoạn thẳng AB, ta sẽ chọn liên tiếp A và B. Trung điểm của đoạn thẳng hay một cạnh của hình đa giác cũng có thể được dựng cũng bằng cách kích chuột trực tiếp trên đoạn thẳng hay cạnh. Điểm mới có thể được đặt tên ngay sau dựng xong, ta sẽ gọi là điểm C'. Ta tiến hành tương tự với hai cạnh kia để cách dựng trung điểm A' của đoạn thẳng BC và trung điểm B' của đoạn thẳng CA.



**Hình 2.2** - [Bên trái] Các trung điểm được dựng với công cụ [Dựng hình]Trung điểm, công cụ này có thể áp dụng cho hai điểm, cho một đoạn thẳng hoặc cho một cạnh của đa giác. [Bên phải]. Các đường trung tuyến được dựng nhờ vào công cụ [Đường] Đường thẳng, màu sắc của các đường này được thay đổi với công cụ [Thuộc tính]Màu...

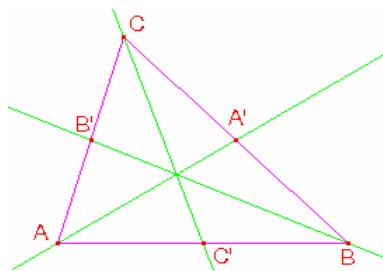
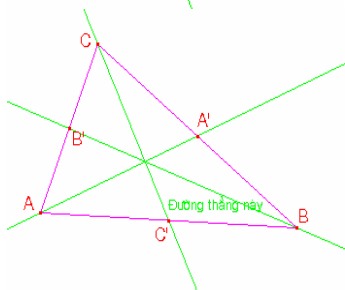
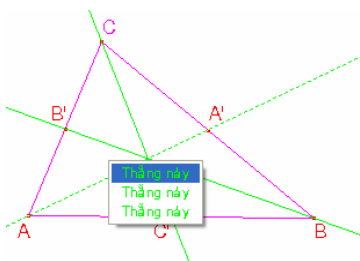
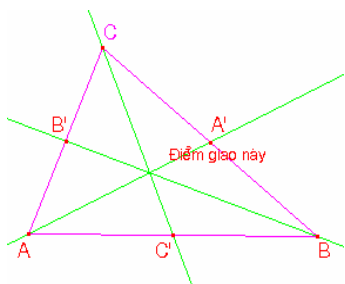
Công cụ [Thao tác]Con trỏ cho phép dịch chuyển tự do các đối tượng của hình, ở đây là ba điểm A, B, C. Ta thấy rằng toàn bộ phép dựng hình vẽ sẽ tự cập nhật khi dịch chuyển một trong các điểm này. Như thế ta có thể tìm hiểu việc dựng hình với nhiều hình cấu trúc khác nhau. Để phát hiện các đối tượng tự do của một hình, ta kích hoạt

công cụ [Thao tác]Con trỏ rồi kích chuột vào khoảng trống trên giấy đồng thời nhấn giữ nút chuột. Các đối tượng tự do khi đó sẽ nhấp nháy.

Công cụ [Đường]Đường thẳng cho phép dựng ba đường trung tuyến. Để dựng đường thẳng  $AA'$ , ta dựng liên tiếp  $A$  rồi  $A'$ .

Công cụ [Thuộc tính]Màu... cho phép thay đổi màu các đối tượng. Chọn màu trong bảng màu rồi sau đó chọn đối tượng cần tô màu.

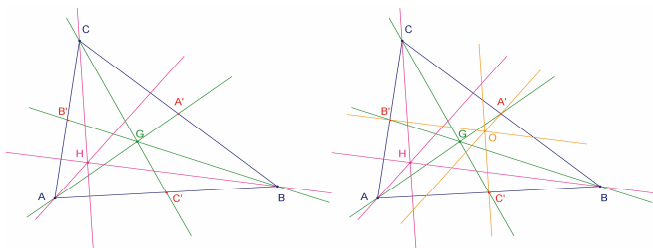
Sau khi kích hoạt công cụ [Điểm]Điểm, kéo con trỏ đến gần giao điểm của ba đường trung tuyến. Về điểm này Cabri tìm cách dựng giao điểm của hai đường thẳng. Do có sự mập mờ ở đây (ta có tới ba đường thẳng đồng quy), một bảng chọn xuất hiện cho phép chọn hai trong số các đường để dựng giao điểm. Khi dịch chuyển con trỏ trên bảng chọn đường thẳng tương ứng sẽ có dạng chấm nhấp nháy. Sau khi chọn hai đường này giao điểm sẽ được tạo ra. Ta đặt tên ngay cho nó là  $G$ .



**Hình 2.3** - Dụng giao điểm các đường trung tuyến và khắc phục sự mập mờ của phép chọn.

Các đường cao sẽ được dựng bởi công cụ [Dựng hình]Đường thẳng vuông góc. Công cụ này vẽ một đường thẳng duy nhất vuông góc với một phương cho trước và đi qua một điểm cho trước. Ta cần chọn một điểm và một đường thẳng hoặc một đoạn thẳng, hoặc một nửa đường thẳng hoặc một cạnh của đa giác. Thứ tự chọn không quan trọng. Để dựng đường cao từ A, ta sẽ chọn A, và cạnh BC. Làm tương tự với các đường cao xuất phát từ B và C. Làm tương tự như với các đường trung tuyến, ta sẽ chọn một màu cho các đường cao, và sẽ dựng giao điểm H của chúng.

Công cụ [Dựng hình]Trung trực cho phép dựng đường trung trực của hai điểm, của một đoạn thẳng hoặc một cạnh của đa giác. Ta chỉ cần chọn đoạn thẳng hoặc các đầu mút của nó. Ta gọi giao điểm của ba đường trung trực là O.



**Hình 2.4** - [Bên trái] Các đường cao được dựng nhờ công cụ [Dựng hình]Đường thẳng vuông góc.

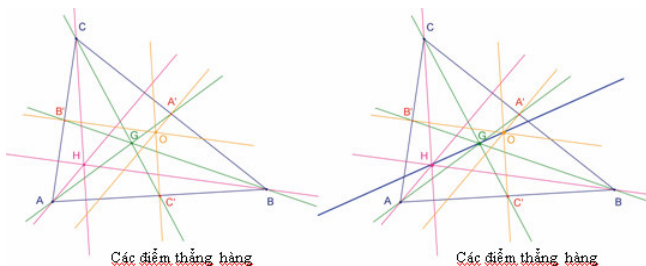
[Bên phải] Cuối cùng là các đường trung trực, được dựng nhờ vào công cụ [Dựng hình]Trung trực.

Công cụ [Tính chất]Thẳng hàng? cho ta khả năng kiểm tra xem ba điểm O, H và G có thẳng hàng hay không. Ta chọn liên tiếp ba điểm này, rồi định một vị trí trên tờ giấy để hiện kết quả. Kết quả là một văn bản nêu rõ các điểm có thẳng hàng với nhau hay không.

Khi ta thao tác trên hình, dòng chữ này sẽ được cập nhật cùng lúc với các thành phần khác của hình vẽ.



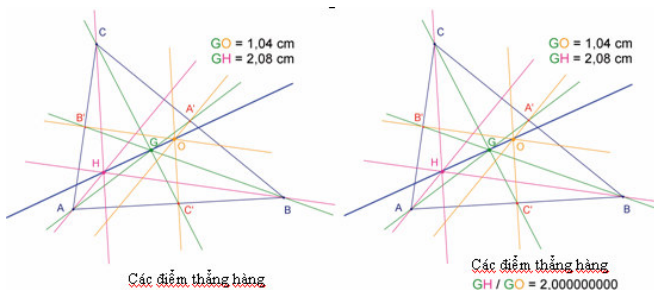
Với công cụ [Đường]Đường thẳng, ta dựng đường thẳng Euler của tam giác đi qua điểm  $O$ ,  $H$  và  $G$  bằng cách chọn chẳng hạn  $O$  và  $H$ . Công cụ [Thuộc tính] Độ dày... sẽ được dùng để làm nổi bật đường thẳng này.



**Hình 2.5** - [Bên trái] Kiểm tra sự thẳng hàng của ba điểm  $O$ ,  $H$  và  $G$ . Công cụ [Tính chất]Thẳng hàng? tạo nên văn bản Các điểm thẳng hàng hoặc Các điểm không thẳng hàng tùy theo tình trạng hiện hành của hình vẽ.

[Bên phải] Đường thẳng Euler của tam giác được làm nổi bật nhờ độ dày của nó mà có thể được thay đổi nhờ công cụ [Thuộc tính] Độ dày...

Thao tác trên hình cho ta thấy rằng điểm  $G$  có vẻ luôn ở giữa  $O$  và  $H$ , cũng như vị trí tương đối của nó trên đoạn  $OH$  không đổi. Ta kiểm chứng điều này bằng cách đo độ dài của  $GO$  và  $GH$ . Kích hoạt công cụ [Đo]Khoảng cách hoặc Độ dài. Công cụ này cho phép đo khoảng cách giữa hai điểm, hoặc độ dài một đoạn thẳng, tùy theo đối tượng được chọn. Vì thế ta chọn  $G$  rồi  $O$ ; khoảng cách  $GO$  được hiển thị, đo theo cm. Tương tự với  $GH$ . Khi phép đo đã được thực hiện, ta có thể soạn tiêu đề tương ứng, ví dụ như thêm các ký tự  $GO=$  trước số liệu đo được.

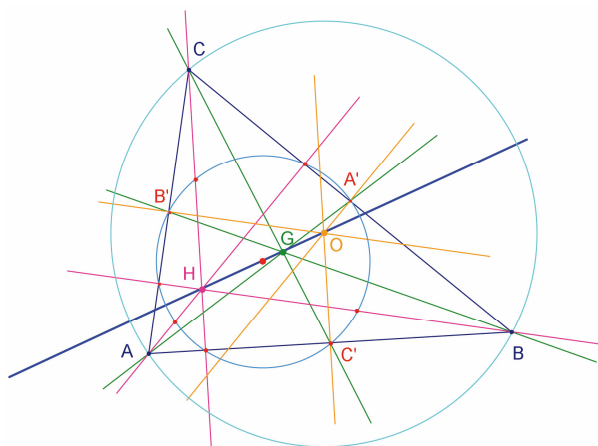


**Hình 2.6** - [Bên trái]. Công cụ [Đo] Khoảng cách hoặc Độ dài cho phép thu được các khoảng cách GO và GH. [Bên phải] Nhờ máy tính bỏ túi – công cụ [Đo] Máy tính bỏ túi... - ta tính tỉ số  $\frac{GH}{GO}$  và ta kiểm tra bằng tính toán là nó bằng 2.

Khi dịch chuyển hình, ta thấy rằng GH dường như gấp đôi GO. Để kiểm chứng điều này, ta sẽ tính tỉ số  $\frac{GH}{GO}$ . Kích hoạt công cụ [Đo] Máy tính bỏ túi... Chọn khoảng cách GH, tiếp theo toán tử / (gạch của phép chia), và khoảng cách GO. Ta kích chuột trên phím = để thu được kết quả, mà ta có thể rê-thả chuột trên tờ giấy. Khi ta chọn một số (công cụ [Thao tác] Con trỏ), ta có thể tăng hoặc giảm số chữ số ở phần thập phân được hiển thị nhờ phím + và -. Như thế, ta sẽ hiển thị tỉ số với khoảng một chục chữ số sau dấu phẩy, để nhận xét rằng nó bằng 2.

**Bài tập 1** - Hoàn chỉnh hình vẽ bằng cách dựng đường tròn bao quanh tam giác (hướng O đi qua A, B, C). Ta sẽ dùng công cụ [Đường] Đường tròn.

**Bài tập 2** - Tiếp theo dựng đường tròn chín điểm của tam giác. Đó là đường tròn có tâm là trung điểm OH, đi qua các trung điểm A', B', C' của các cạnh, chân các đường cao, và trung điểm của các đoạn thẳng HA, HB và HC.



**Hình vẽ 2.7** - Hình vẽ cuối cùng, với đường tròn ngoại tiếp tam giác và đường tròn chín điểm của tam giác.



## CHINH PHỤC ĐIỂM BÍ HIỂM

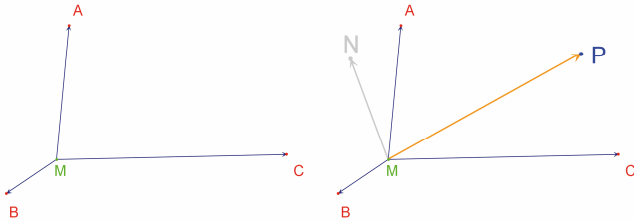
Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một hoạt động cho phép phát huy các khả năng khám phá của Cabri. Từ ba điểm A, B, C cho trước, ta sẽ tìm điểm M thỏa mãn đẳng thức vector :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Dựng bốn điểm bất kỳ bằng công cụ [Điểm] Điểm, và đặt tên cho bốn điểm này là A, B, C, M ngay sau khi tạo. Cabri cho phép tạo ra các vector. Mỗi vector thông thường được biểu diễn bởi một đoạn thẳng có hướng. Bây giờ dựng vector  $\overrightarrow{MA}$  bởi công cụ [Đường]Vector, bằng cách chọn trước tiên M rồi tới A. Vector này có gốc là M. Làm tương tự với  $\overrightarrow{MB}$  và  $\overrightarrow{MC}$  .

Sau đó dựng một đại diện của vector tổng  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  bằng cách kích hoạt công cụ [Dựng hình]Tổng của hai Vector sau đó chọn hai vector rồi chọn gốc của vector đại diện cho vector tổng; ở đây ta chọn M. Gọi N là đầu mút của vector tổng.

Cuối cùng, ta dựng vector tổng của ba vector với M là gốc theo cách tương tự, bằng cách cộng  $\overrightarrow{MN}$  (bằng  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  ) và  $\overrightarrow{MC}$  . Gọi P là đầu mút của vector này.



**Hình 3.1** – [Bên trái]. Từ ba điểm bất kì A, B, C và điểm M, ta dựng các vectơ  $\overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{MB}$  và  $\overrightarrow{MC}$ .

[Bên phải]. Nhờ công cụ [Dựng hình] Tổng của hai Vectơ, ta dựng tổng  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ , và  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ .

Bây giờ ta có tìm lời giải của bài toán bằng thao tác. Để làm điều đó, ta kích hoạt công cụ [Thao tác] Con trỏ và ta dịch chuyển điểm M. Tổng của ba vectơ sẽ tự cập nhật một cách tức thì ở mỗi khi dịch chuyển.

Tùy theo vị trí của M so với các điểm A, B, C, ta quan sát độ lớn và hướng của vectơ tổng  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ . Từ đó đưa ra các phỏng đoán như sau (ngoài ra còn có các phỏng đoán khác) :

- Có một vị trí duy nhất của M sao cho tổng của ba vectơ bằng không : bài toán chỉ có một đáp án duy nhất. Đáp án này nằm bên trong tam giác ABC.
- Hình tứ giác MANB là một hình bình hành.
- Hình tứ giác MCPN là một hình bình hành.
- Để tổng bằng không, các vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MC}$  phải cộng tuyến, cùng độ lớn và ngược chiều, nghĩa là đối nhau.
- Đường thẳng MP luôn đi qua một điểm, và điểm này là đáp án của bài toán.
- Đầu mút P của vectơ đại diện vectơ tổng là một điểm phụ thuộc vào M. Như vậy ta định nghĩa một phép biến hình biến P thành M. Lời giải của bài toán đã cho là một điểm bất biến của phép biến hình này.

Từ các ghi nhận trên, việc nghiên cứu sẽ nghiêng về hướng này hoặc hướng khác.

Ví dụ giả sử ta đã thấy rằng các vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MC}$  phải đối nhau. Vậy thì ta đặt ra một vấn đề khác: tại vị trí nào của M thì hai vectơ này cộng tuyến ? Dịch chuyển M sao cho hai vectơ cộng tuyến. Ta thấy rằng M chạy trên một đường thẳng, và đường thẳng đó đi qua C cũng như đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB. Đường thẳng này chính là trung tuyến từ C của tam giác. A, B, C có vai trò đối xứng, điểm này cũng nằm trên hai trung tuyến khác và như vậy cuối cùng chính là giao điểm của ba trung tuyến.

Đối với bài tập trên lớp, các học sinh còn phải cần tìm ra cách dựng điểm này, và cần chứng minh giả thuyết mà ta đã phát biểu sau khi khám phá các hình vẽ khác nhau.

Độ tin cậy của một phép dựng hình động thì cao hơn nhiều so với phép dựng một hình tĩnh trên giấy. Thật vậy, ta chỉ cần thao tác trong một số lớn trường hợp để kiểm chứng giả thuyết. Một giả thuyết hợp lệ sau khi thao tác như vậy sẽ đúng trong đa số trường hợp.

Để việc học trên lớp có hiệu quả nhất, việc đề cập các vấn đề sau (ngoài các vấn đề khác nữa) sẽ thú vị đối với học sinh :

- Một phép dựng hình động đúng bằng quan sát thị giác thì có đúng không ?
  - Một phép dựng hình động đúng sẽ là một lời giải của bài toán ?
  - Khi nào một lập luận có thể được coi là một chứng minh ?
  - Một phép dựng hình động đúng thì cần bổ xung cái gì để từ đó dẫn ra một chứng minh ?
- + Việc chứng minh có phải dựa trên tiến trình xây dựng hình vẽ ?

**Bài tập 3** - Mở rộng bài toán trên cho bốn điểm, bằng cách tìm điểm M để mà :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

**Bài tập 4** - Kể ra tập hợp « các con đường khám phá » và các cách chứng minh cho bài toán ban đầu (ba điểm) đối với một học sinh lớp 10.

**Bài tập 5** - Khảo sát và dựng điểm M sao cho tổng khoảng cách (MA + MB + MC) đến ba 3 điểm A, B, C cho trước là bé nhất. Đó là điểm Fermat của tam giác ABC.





## TỨ GIÁC VARIGNON

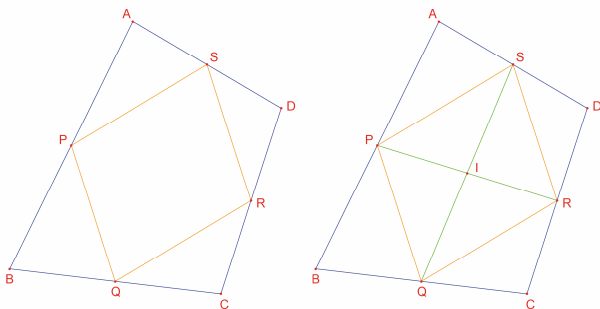
Trong chương này, chúng tôi giới thiệu vài phép dựng hình xung quanh định lý Varignon<sup>1</sup>.

Dựng một hình tứ giác ABCD bất kỳ. Kích hoạt công cụ [Đường] Đa giác, rồi chọn bốn điểm mà ta đặt tên là A, B, C, D ngay sau khi dựng. Để kết thúc việc dựng đa giác, ta chọn lại điểm A sau khi đã dựng điểm D.

Tiếp theo dựng trung điểm P của đoạn thẳng AB, Q của đoạn thẳng BC, R của đoạn thẳng CD, và S của đoạn thẳng DA bằng công cụ [Dựng hình] Trung điểm. Để dùng công cụ này ta cần chọn điểm A rồi B để dựng trung điểm của AB. Ta cũng có thể chọn trực tiếp đoạn thẳng AB nếu nó đã tồn tại, dù coi nó như là một đoạn thẳng hoặc như là một cạnh của hình tứ giác như trong trường hợp này.

Cuối cùng ta dựng hình tứ giác PQRS bởi công cụ [Đường] Đa giác.

Trong quá trình thao tác việc dựng hình, với công cụ [Thao tác] Con trỏ, ta thấy rằng PQRS dường như luôn là một hình bình hành. Ta sẽ dùng Cabri để kiểm tra tính song song của các đoạn thẳng PQ và RS, cũng như của các đoạn thẳng PS và QR, bằng cách dùng công cụ [Tính chất] Song song ? Ta chọn cạnh PQ rồi RS, một dòng chữ sẽ hiện ra, khẳng định rằng hai cạnh này song song nhau. Ta kiểm tra tương tự rằng PS và QR song song.



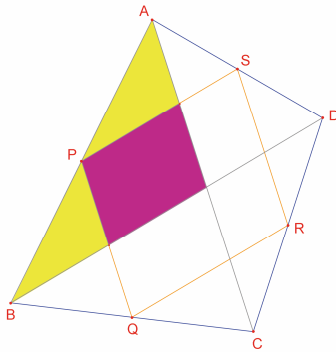
**Hình 4.1** - [Bên trái]. Từ một tứ giác bất kì  $ABCD$ , ta dựng tứ giác  $PQRS$  mà các đỉnh là các trung điểm của  $ABCD$ .

[Bên phải]. Phép dựng các đường chéo của  $PQRS$  mà ta sẽ chứng minh là chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Dựng hai đường chéo  $PR$  và  $QS$  nhờ vào công cụ [Đường] Đoạn thẳng, và dựng giao điểm  $I$  của chúng bởi công cụ [Điểm] Điểm. Có nhiều cách để chứng minh rằng  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $PR$  cũng như của đoạn thẳng  $QS$ , và như vậy  $PQRS$  là một hình bình hành. Ví dụ với tính toán tỉ cự:  $P$  là tâm tỉ cự của  $\{(A,1), (B,1)\}$  và  $R$  là tâm tỉ cự của  $\{(C,1), (D,1)\}$ , và như thế trung điểm của đoạn thẳng  $PR$  là tâm tỉ cự của  $\{(A,1), (B,1), (C,1), (D,1)\}$ , và tương tự như vậy đối với trung điểm của đoạn thẳng  $QS$ . Do đó hai trung điểm trùng nhau ở một điểm: giao điểm  $I$ .

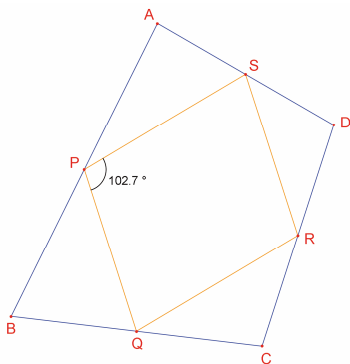
**Định lý Varignon** được phát biểu như sau: Tứ giác  $PQRS$  dựng nên từ các trung điểm các cạnh của một tứ giác  $ABCD$  nào đó là một hình bình hành, và diện tích của nó bằng một nửa diện tích  $ABCD$ .

**Bài tập 6** - Ở trên ta đã thiết lập phần đầu tiên của định lý. Hãy hứng minh phần thứ hai liên quan tới diện tích của  $PQRS$ . Ta có thể dựa vào hình 4.2



**Hình 4.2** - Phép dựng hình cho phép thiết lập phần thứ hai của định lý.

Bây giờ ta cố định các điểm A, B, C và dịch chuyển D sao cho PQRS là hình chữ nhật. Như ta đã biết PQRS đã là một hình bình hành, như vậy chỉ cần một trong các góc của nó là vuông để đủ để khẳng định đó là một hình chữ nhật. Vì vậy ta đo góc tại P, bằng công cụ [Đo] Đo góc. Công cụ này đòi hỏi ta phải chọn ba điểm xác định một góc trong đó đỉnh là điểm thứ hai. Ví dụ ở đây ta sẽ chọn các điểm S, P (đỉnh của góc) và Q.



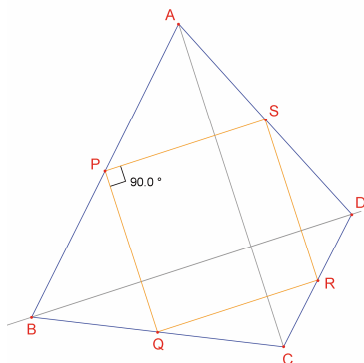
**Hình 4.3** - Ta đo góc  $P$  của hình bình hành  $PQRS$

Công cụ [Đo] Đo góc cũng có thể cho phép đo một góc được đánh dấu trước với công cụ [Văn bản và biểu tượng] Đánh dấu góc. Công cụ này đòi hỏi ba điểm xác định một góc, theo cùng thứ tự như ở công cụ [Đo] Đo góc.

Khi dịch chuyển  $D$  để  $PQRS$  là một hình chữ nhật, ta có thể nhận thấy các điểm tìm được có vẻ như thẳng hàng với nhau. Thật ra, nếu ta dựng các đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình tứ giác ban đầu, ta thấy rằng các cạnh  $PQRS$  song song với các đường chéo này và vì vậy  $PQRS$  là hình chữ nhật khi và chỉ khi  $AC$  và  $BD$  vuông góc nhau. Bây giờ ta sẽ định nghĩa lại  $D$  sao cho  $PQRS$  luôn là hình chữ nhật. Vẽ đường thẳng  $AC$  với công cụ [Đường] Đường thẳng bằng cách chọn  $A$  và  $C$ , tiếp theo dựng đường vuông góc với đường thẳng này đi qua  $B$ , với công cụ [Dựng hình] Đường thẳng vuông góc bằng cách chọn  $B$  và đường thẳng  $AC$ .

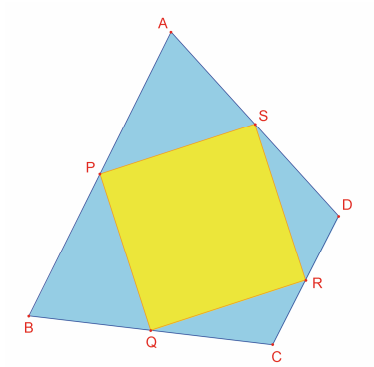
Ở thời điểm này  $D$  là một điểm tự do trong mặt phẳng. Ta sẽ thay đổi cách định nghĩa của đi ếm này bằng cách biến nó thành một điểm tự do trên đường thẳng vuông góc với  $AC$  đi qua  $B$ . Kích hoạt công cụ [Dựng hình] Định nghĩa lại một đối tượng rồi chọn  $D$ . Một bảng chọn xuất hiện đưa ra các sự chọn lựa cho việc định nghĩa lại  $D$ . Ta chọn Điểm trên đối tượng, rồi chọn một điểm trên đường thẳng vuông góc.

D sẽ tự dịch chuyển thành điểm này, và như vậy kể từ đó nó sẽ phải luôn nằm trên đường thẳng. Việc định nghĩa lại là một công cụ khám phá rất mạnh, cho phép lấy đi hoặc thêm mức độ tự do cho những phần tử của một hình mà không cần phải tạo lại toàn bộ hình đó.



**Hình 4.4** - Điểm D bây giờ được định nghĩa lại sao cho PQRS luôn là một hình vuông. Điểm này ở một mức độ nào đó vẫn là điểm tự do ; nó chuyển động trên một đường thẳng.

**Bài tập 7** - Tìm điều kiện cần và đủ để PQRS là một hình vuông. Định nghĩa điểm D lại một lần nữa sao cho việc dựng hình chỉ đưa ra kết quả là hình vuông.



**Hình 4.5** - Bây giờ điểm  $D$  hoàn toàn không còn mức độ tự do nào và  $PQRS$  luôn là một hình vuông.