CABRI GÉOMÈTRE® II PLUS

Sáng tạo các Công cụ Toán học

NÂNG CAO

CHÀO MỪNG !

Chào mừng các bạn đến với phần `Nâng cao` trong sách hướng dẫn sử dụng Cabri Géomètre.

Phần này được chia làm ba chương trong đó giới thiệu các bài toán nâng cao mà việc sử dụng Cabri Géomètre giúp cho ta có thể khám phá và giải các bài toán này được rõ ràng và đơn giản hơn. Các bài toán này bổ xung cho phần `Giám sát` cho những ai có mong muốn tiếp tục tìm hiểu thêm phần mềm.

Các bài toán ở đây được xây dựng cho trình độ bậc Trung học phổ thông và cho Đại học tuy nhiên người đọc có thể tìm ra nhiều phương pháp dựng hình phong phú và giải các bài toán tương ứng. Các bài toán có đánh dấu sao là các bài toán có yêu cầu cao.

MỤC LỤC

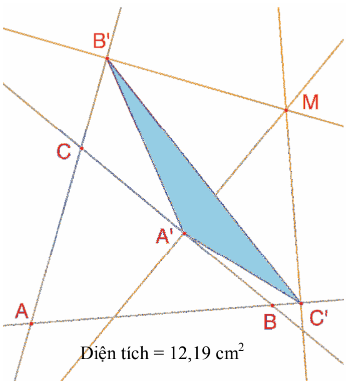
CHƯƠNG 1

ĐỐI TƯỢNG VÀ CÔNG CỤ

Cho ba điểm bất kì A, B và C, được dựng bằng công cụ [Điểm]Điểm. Đầu tiên ta dựng ba đường thẳng AB, BC và CA, bằng công cụ [Đường] Đường thẳng. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt phẳng, các điểm C', A' và B' là các hình chiếu vuông góc tương ứng của M trên ba đường thẳng này. Các điểm này thu được khi ta dựng các đường thẳng lần lượt vuông góc với AB, BC và CA và đi qua M bằng công [Dựng hình]Đường thẳng vuông góc, sau đó tạo các giao điểm của mỗi đường trên với đường vuông góc tương ứng bằng công cụ [Điểm]Điểm. Công cụ [Điểm]Điểm cho phép dựng một cách ngầm ẩn các giao điểm giữa các đối tượng. Ta chỉ cần dịch chuyển con trỏ đến gần giao điểm và phần mềm sẽ hiển thị Điểm giao này, hoặc Giao của... và một bảng chọn trong trường hợp có sự mập mờ khi chọn các đối tượng.

Các điểm A', B' và C' sẽ tạo nên một tam giác mà ta có thể dựng bằng công cụ [Đường]Tam giác. Tam giác này gọi là tam giác thuỳ tức ứng với tam giác ABC. Ta có thể tô màu phần bên trong tam giác bằng cách dùng công cụ [Thuộc tính]Tô. Bây giờ ta sẽ quan tâm đến diện tích của tam giác này tuỳ theo vị trí của điểm M. Diện tích của tam giác sẽ thu được bằng công cụ [Đo]Diện tích. Công cụ này cho ta diện tích « hình học » luôn là một số không âm mà không quan tâm đến hướng của tam giác.

Ta thu được diện tích tam giác theo đơn vị cm^2 và ta có thể đặt số đó tại một vị trí tự do trên vùng làm việc. Bảng chọn ngữ cảnh thu được khi kích phải chuột trên số này sẽ cho phép sự hiển thị « đại số » của diện tích mà dấu của nó phụ thuộc vào hướng của tam giác.

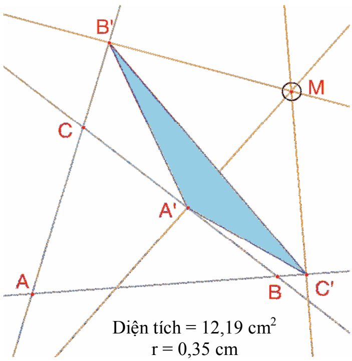


Hình 1.1 *– Tam giác thuỳ tức tương ứng với điểm M và diện tích của tam giác.*

Ta sẽ khảo sát sự biến thiên của diện tích tam giác A'B'C' tuỳ theo vị trí điểm M. Ta có nhiều chiến lược giải cho bài toán. Ví dụ ta có thể kích hoạt vết của điểm M (công cụ [Văn bản và Biểu tượng]Vết), sau đó dịch chuyển điểm M trong khi thử tìm cách giữ diện tích không đổi. Khi đó các vị trí khác nhau của M được hiển thị và ta sẽ có dáng vẻ của đường mức gắn với hàm số là diện tích tam giác A'B'C'. Một chiến lược khác là sử dụng tập hợp các điểm trên lưới để thu được một sự biểu diễn ảo của diện tích tam giác A'B'C' cho rất nhiều vị trí của M.

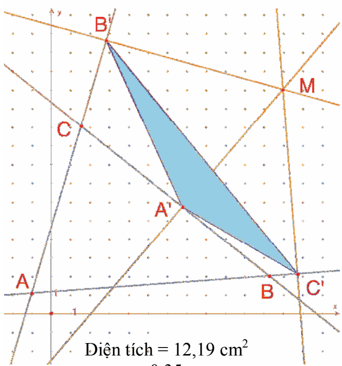
Ở đây chúng tôi sử dụng chiến lược này và sẽ dựng đường tròn tâm M có diện tích tỉ lệ với diện tích tam giác A'B'C'. Đầu tiên ta cần tính bán kính của đường tròn biết nó tỉ lệ với căn bậc hai của diện tích tam giác. Ta kích hoạt công cụ [Đo]Máy tính bỏ túi và nhập biểu thức sqrt(sau đó chọn số biểu thị diện tích tam giác để cho vào biểu thức, bây giờ biểu thức trở thành sqrt(a. Ta đóng ngoặc và chia tiếp cho 10 để tránh trường hợp đường tròn qúa lớn. Bây giờ biểu thức trong máy tính bỏ túi sqrt(a)/10.
Ta tính giá trị này bằng cách bấm phím =, sau đó ta thực hiện rê-đặt chuột để cho kết quả ra vùng làm việc.

Để dựng đường tròn có tâm M và có bán kính đã đựoc tính như trên, ta kích hoạt công cụ [Dựng hình]Compa. Ta chọn số đã cho ra vùng làm việc, sau đó chọn điểm M. Khi đó ta sẽ thu được đường tròn có tâm M và có bán kính phải tìm. Bây giờ ta đã có thể quan sát bằng trực giác sự biến đổi của diện tích tam giác tuỳ theo vị trí điểm M.



Hình 1.2 *– Ta dựng đường tròn có tâm M, diện tích tỉ lệ với diện tích của tam giác A'B'C'.*

Bây giờ ta sẽ định nghĩa một lưới, sau đó định nghĩa lại điểm M như là một điểm của lưới, và cuối cùng ta dựng tất cả các đường tròn biểu thị diện tích của tam giác thuỳ tức khi điểm M chạy trên lưới. Để định nghĩa một lưới, ta cần có hệ trục toạ độ. Ta sẽ sử dụng hệ trục mặc định có mặt trong tất cả các hình. Ta làm cho chúng hiển thị bằng cách chọn [Thuộc tính]Hiện các Trục. Sau đó ta kích hoạt công cụ [Thuộc tính]Lưới và ta chọn các trục. Khi đó một lưới điểm sẽ xuất hiện.

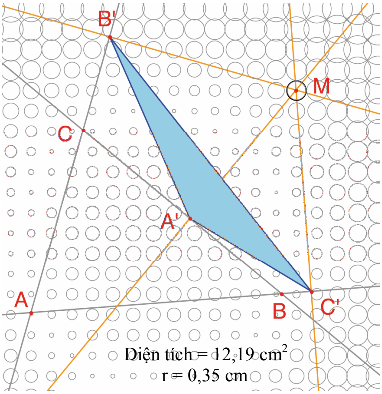


Hình 1.3 *– Ta dựng một lưới từ các trục xác định bởi mặc định cho hình vẽ, sau đó ta định nghĩa lại điểm M như là một điểm tự do trên lưới.*

Điểm M đang là điểm tự do trong mặt phẳng ; ta sẽ định nghĩa lại để điểm này thuộc lưới điểm vừa tạo. Ta kích hoạt công cụ [Dựng hình] Định nghĩa lại Đối tượng, sau đó ta chọn điểm M, chọn Điểm trên đối tượng của bảng chọn xuất hiện tại thời điểm đó. Bây giờ điểm M chỉ có thể được dịch chuyển trên lưới.

Công cụ [Dựng hình]Tập hợp điểm cho phép dựng tập hợp các đường tròn khi ta dịch chuyển điểm M trên lưới. Ta chọn đường tròn rồi sau đó là điểm M để thu được tập hợp các đường tròn khi M di động trên lưới.

Bây giờ ta chứng minh rằng các đường « giá trị mức » của diện tích tam giác là các đường tròn có tâm là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (tham khảo thêm *Hình học Marcel Berger*, nhà xuất bản CEDIC, mục 10.4.5). Đặc biệt diện tích của tam giác A'B'C' bằng 0 khi M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Điều đó tương đương với kết luận là các điểm A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 1.4 – *Phân hoạch diện tích của tam giác thuỳ tức tuỳ theo vị trí điểm M.*

Bài tập 8 – Khi M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, các điểm A’, B’, và C’ thẳng hàng và đường thẳng đi qua A’, B’, C’ được gọi là đường thẳng *Simson*[1] hoặc đường thẳng *Wallace*[2] tương ứng với điểm M.

Kết quả này, từ lâu đã được gán một cách sai lầm cho *Simson*, được công bố bởi *Wallace* vào năm 1799. Hãy dựng hình bao của đường thẳng *Simson* (ta sử dụng công cụ [Dựng hình]Tập hợp điểm). Theo mặc định, trong trường hợp các đường thẳng công cụ này sẽ cho ra hình bao của chúng chứ không phải tập hợp điểm.

Đường cong này bất biến qua phép quay và được gọi là một hình đen-ta vì nó có dạng như kí tự Δ : đó là đen-ta *Steiner*[3]. Đường cong này tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA.

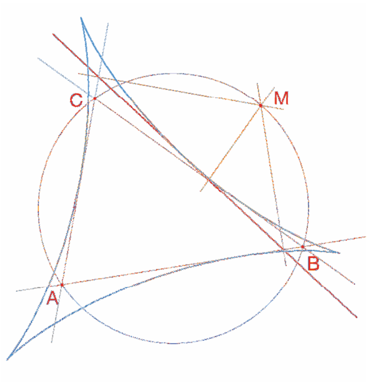
Đó là một đường cong đại số bậc 4. Ta có thể kiểm chứng điều này bằng cách dùng công cụ [Đo]Phương trình và Toạ độ.

Bài tập 9* - Đối với hình đen-ta đã nêu trong bài tập trước, hãy dựng đường tròn, ba tiếp điểm với ba đường thẳng, ba đỉnh của đường cong cũng như đường tròn lớn nhất trong số các đường tròn nội tiếp đường cong.

[1] *Robert Simson, 1687-1768*

[2] *William Wallace, 1768-1843*

[3] *Jakob Steiner, 1796-1863*



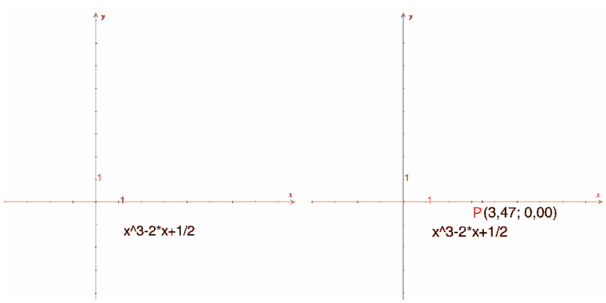
Hình 1.5 *– Hình bao của đường thẳng Simson của tam giác ABC gọi là một đen-ta (hình tam giác lá). Nó có các trục đối xứng như trong tam giác đều.*

HÀM SỐ

Nhờ hệ trục toạ độ và công cụ liên quan đến biểu thức, Cabri Géomètre cho phép dựng một cách dễ dàng đồ thị của hàm số, và sử dụng đồ thị này để khảo sát hàm số. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu hàm số đa thức bậc 3 sau đây.

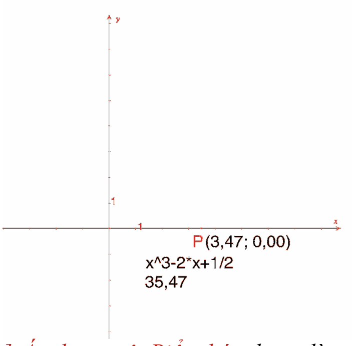
$$f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

Trước hết ta hiển thị các trục toạ độ bằng công cụ [Thuộc tính]Hiện các Trục. Sau đó ta tạo biểu thức tương ứng trong vùng làm việc. Một biểu thức đặt trong vùng làm việc có thể được tính với các giá trị khác nhau của biến. Ở đây ta kích hoạt công cụ [Văn bản và Biểu tượng]Biểu thức và vào biểu thức *x*^3 - 2**x* + 1/2. Các tên có thể gán cho các biến là các chữ *a,b,c,...,z*. Đặt điểm P trên trục hoành (bằng công cụ [Điểm]Điểm). Sau đó ta có được toạ độ điểm P bằng công cụ [Đo]Toạ độ hoặc Phương trình sau khi chọn điểm P. Văn bản sẽ hiển thị toạ độ mà ban đầu sẽ gắn cho P, và sẽ thay đổi tương ứng với sự dịch chuyển của điểm này. Với công cụ [Thao tác]Chọn, ta có thể tách rời các toạ độ của điểm P và đặt tại một vị trí bất kì trên vùng làm việc. Ta cũng có thể gắn các toạ độ này lại với điểm P bằng cách dịch chuyển nó gần vào điểm P.



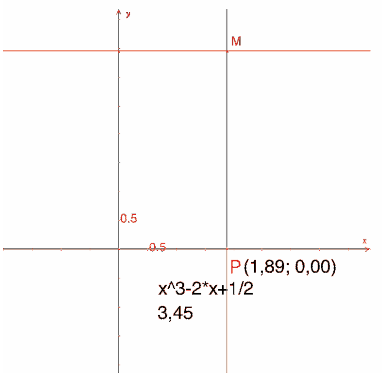
***Hình2.1** - [Bên Trái]. Ta nhập vào biểu thức tương ứng với hàm số cần nghiên cứu. [Bên Phải]. Ta đặt điểm P trên trục hoành và ta hiển thị các toạ độ bằng công cụ [Đo]Toạ độ hoặc Phương trình.*

Bây giờ ta tính giá trị f(x) trong đó x là hoành độ điểm P. Để thực hiện điều đó, ta kích hoạt công cụ [Đo] Áp dụng Biểu thức và ta chọn hoành độ của P từ văn bản biểu thị các toạ độ của P.



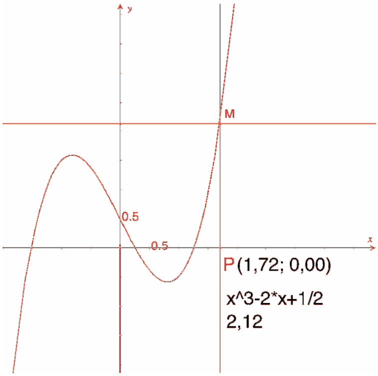
Hình 2.2 *– Công cụ [Đo] Áp dụng một Biểu thức được dùng để tính giá trị của f(x) với x là hoành độ của điểm P.*

Sau đó ta chuyển giá trị này lên trục tung bằng công cụ [Dựng hình]Chuyển độ Đo, bằng cách chọn giá trị cần chuyển, sau đó trọn trục tung. Sau đó ta chỉ cần dựng các đường thẳng song song với các trục và đi qua hai điểm này ([Dựng hình] Đường thẳng Song song) và ta thu được giao điểm M có toạ độ *(x, f(x))*. Trên *hình 2.3*, ta đã chuyển P so với vị trí của nó ở *hình 2.2* để dẫn đến điểm thuộc trục tục thu được bằng cách chuyển độ đo và điểm đó thuộc phần hiển thị được của vùng làm việc.



Hình 2.3 *- Dựng điểm M(x, f(x)).*

Ta thu được đồ thị của hàm số bằng cách hiển thị tập hợp điểm M khi P chạy trên trục hoành. Ta dựng tập hợp điểm này với công [Dựng hình]Tập hợp điểm và chọn điểm M, rồi sau đó là điểm P. Để có thể hiển thị một cách tốt nhất phần của đồ thị mà ta quan tâm nghiên cứu, ta có thể dịch chuyển gốc của hệ trục toạ độ và các khoảng chia trên trục bằng cách rê-trượt gốc của toạ độ hoặc điểm chia đơn vị bất kì.



Hình 2.4 *– Công cụ [Dựng hình]Tập hợp điểm cho phép dựng đồ thị của hàm số.*

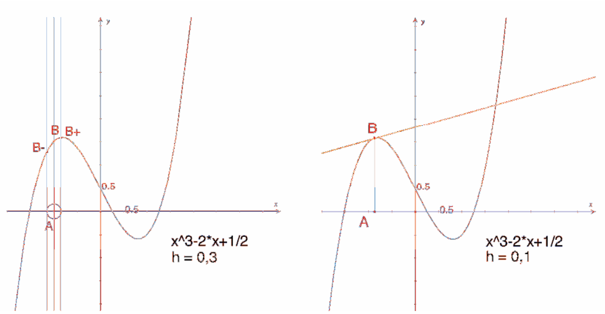
Ta sẽ dựng một cách gần đúng một tiếp tuyến với cong tại một điểm. Đối với giá trị h nhỏ, ta có :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Theo quan điểm hình học, công thức tính gần đúng này tương đương với việc lấy phương của tiếp với đường cong tại điểm có hoành độ x là phương của đường thẳng nối các điểm có hoành độ *x- h* và *x+ h*. Với công cụ [Văn bản và Biểu tượng]Số, ta nhập một giá trị cho h, chẳng hạn ở đây là 0,3 cho phép dựng. Sau đó ta có thể nhập một số khác nhỏ hơn để có một sự xấp xỉ tốt hơn. Sau đó ta dựng điểm A trên trục hoành và dựng đường tròn tâm A và bán kính h nhờ công cụ [Dựng hình] Đường tròn bằng cách chọn h và sau đó là A. Hai giao điểm của đường tròn này với trục hoành có hoành độ tương ứng là *x- h* và *x+ h*, ở đó x là hoành độ của điểm A. Tiếp theo ta dựng ba đường thẳng song với trục tung và đi qua hai giao điểm trên, điểm A nhờ công cụ [Dựng hình] Đường thẳng song song.

Ta gọi các giao điểm của các đường song song này với đường cong lần lượt là B-, B, B+ và chúng sẽ có hoành độ tương ứng là *x- h, x,* và *x + h*.

Vì hình vẽ đã phức tạp hơn nhiều, bây giờ ta sẽ che các yếu tố mà ta không dùng đến nữa. Ta kích hoạt công cụ [Thuộc tính]Che/Hiện và ta chọn các yếu tố cần che. Ở đây ta sẽ che các điểm P, M, hai đường thẳng để dựng điểm M, các toạ độ của P và ảnh của hoành độ của P qua hàm số. Các đối tượng bị che không được hiển thị nữa, và khi mà công cụ [Thuộc tính]Che/Hiện được kích hoạt thì các đường biểu diễn chúng sẽ biến thành đứt đoạn. Để hiển thị lại một lần nữa công cụ này, ta chỉ cần chọn chúng lại một lần nữa bằng công cụ nói trên.



Hình 2.5 *- [Bên Trái]. Bằng cách lấy giao điểm của điểm tròn tâm A bán kính h, ta dựng ba điểm của đồ thị có hoành độ lần lượt là x-h, x, và x+h.*
[Bên phải]. Việc dựng gần đúng tiếp tuyến tại B thu được bằng cách dựng đường thẳng song song với đường thẳng (B- B+) và đi qua B.

Ta dựng đường thẳng này nhờ công cụ [Đường]Đường thẳng và sau đó đường thẳng song song với [Dựng hình] Đường thẳng Song song. Sau đó ta che đường thẳng (B-B+) và các yếu tố khác của phép dựng và chỉ để lại các yếu tố h, A,B và tiếp tuyến tại B được hiển thị.

Ta thấy rằng giá trị h = 0,3 cho ta một sự xấp xỉ tiếp tuyến khá tốt. Tuy nhiên ta còn có thể nâng cao chất lượng sự xấp xỉ này bằng cách thu nhỏ giá trị h, ví dụ lấy h bằng 0,0001.

Việc dịch chuyển điểm A trên trục cho phép xác định bằng trực giác ba nghiệm của phương trình *f(x)* = 0, hai cực trị địa phương của f và điểm uốn của đồ thị.

Để có thêm thông tin, các nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 là
$r_1 \approx -1,52568$, $r_2 \approx 0,25865$, và $r_3 \approx 1,26703$

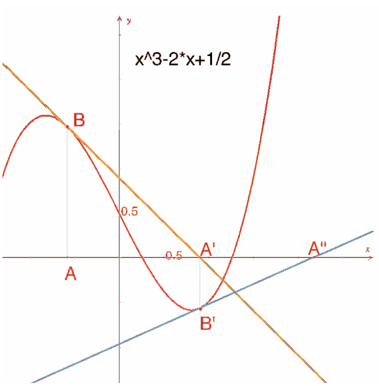
Hoành độ các điểm cực trị là
$e_1 \approx -\sqrt{6}/3 \approx -0,81649$ và $e_2 \approx \sqrt{6}/3 \approx 0,81649$
Điểm uốn có toạ độ (0 ; 1/2).

Bài tập 10* - Sử dụng hệ số góc của tiếp tuyến để dựng đồ thị của hàm số đạo hàm.

Bài tập 11* - Tiếp tuyến này cắt trục hoành tại điểm A'. Nói chung điểm này là một nghiệm xấp xỉ tốt hơn giá trị x nếu như điểm A đã ở lân cận của một nghiệm của phương trình f(x) = 0. Nhận xét này chính là cơ sở của phương pháp lặp *Newton*[1] - *Raphson*[2] để tìm nghiệm gần đúng của phương trình. Dựng điểm A', sau đó ta lặp lại cách dựng để có điểm A'', sau đó khảo sát vị trí của điểm A'' so với vị trí của điểm A.

Đặc biệt ta có thể tìm được hai vị trí của điểm A khác với ba nghiệm sao cho điểm A’’ quay trở lại điểm A.

Để có thêm thông tin đó là hai nghiệm gần đúng của một đa thức bậc 6 là - 0,56293 và 0,73727. Ta cũng có thể thấy rằng việc chọn không tốt điểm A sẽ dẫn đến các điểm tương ứng không hội tụ về nghiệm và sẽ dẫn A’ đến một trong hai điểm mà ở đó đạo hàm bằng không.



Hình 2.6 *– Hai bước lặp đầu tiên theo phương pháp Newton-Raphson bắt đầu từ điểm A.*

Chú ý : Ta có thể thu được đồ thị của hàm số này bằng cách sử dụng công cụ [Đo]Áp dụng một biểu thức. Đầu tiên chọn biểu thức rồi sau đó chọn một trong hai trục.

[1] Sir Isaac Newton, 1643-1727

[2] Joseph Raphson, 1648-1715

CHƯƠNG 3

LÁT HÌNH

Ta sẽ dựng một số hình lát của mặt phẳng bằng các đa giác. Ta sẽ bắt đầu bằng một số định nghĩa đơn giản nhưng đủ dùng cho sau này. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo thêm quyển sách kinh điển về vấn đề này *« Tilings and Patterns »* của *Branko Grünbaum* và *G.C. Shephard,* Nhà xuất bản *Freeman 1987*. Ta cũng có thể tìm được một số lượng lớn các trang WEB về các hình lát cũng như về các nhóm đối xứng.

Ta nói rằng một tập hợp các bộ phận đóng kín của mặt phẳng là một hình lát của mặt phẳng nếu các phần trong của các bộ phận là không giao nhau từng đôi một và hợp của tất cả các bộ phận chính là toàn bộ mặt phẳng.

Các bộ phần này gọi là các viên ngói của hình lát. Trong trường hợp khác với tập hợp một điểm, giao của hai viên ngói được gọi là cạnh của hình lát và được gọi là đỉnh của hình lát trong trường hợp ngược lại.

Đối với một hình lát P, ta kí hiệu S(P) là tập hợp các đẳng cự f của mặt phẳng sao cho ảnh của mọi viên ngói thuộc P qua f là một viên ngói của P. S(P) là một nhóm, gọi là nhóm các phép đối xứng của hình lát. Ta cần xét một số trường hợp đối với nhóm này :

• S(P) không chứa bất kì phép tịnh tiến nào. Khi đó S(P) sẽ là một đẳng cấu vào một nhóm vòng, có thể suy biến thành biến đổi đồng nhất sinh ra bởi một phép quay có góc quay là $2\pi/n$, hoặc vào một nhóm điêđran, nhóm các phép đối xứng của đa giác đều n cạnh.

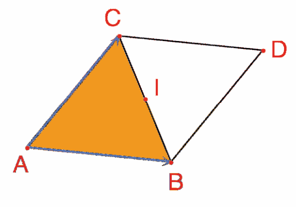
• S(P) chứa các phép tịnh tiến của các vectơ tất cả đều cộng tuyến với nhau. Khi đó S(P) là một đẳng cấu vào một trong 7 nhóm frizơ.

• S(P) chứa hai phép tịnh tiến của các vectơ không cộng tuyến. Khi đó S(P) là một đẳng cấu vào một trong 17 nhóm cristanlôgraphic và hình lát được gọi là tuần hoàn.

Nếu tất cả các viên ngói của hình lát có thể thu được nhờ một phép đẳng cự của chỉ duy nhất một viên ngói, ta nói rằng hình lát là mônôhêđran. Ở đây ta chỉ quan tâm tới các trường hợp hình lát mônôhêđran mà ở đó các viên ngói đều là các đa giác.

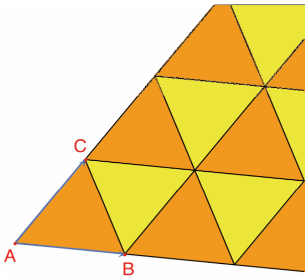
Đầu tiên ta sẽ dựng một hình lát mônôhêđran mà mỗi viên lát là một tam giác bất kì.

Ta dựng tam giác ABC bất kì nhờ công cụ [Đường]Tam giác, sau đó dựng điểm I là trung điểm của một cạnh, ví dụ của cạnh BC nhờ công cụ [Dựng hình]Trung điểm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua điểm I, có được bằng công cụ [Biến hình]Đối xứng tâm bằng cách chọn đối tượng cần biến đổi là điểm A rồi sau đó chọn tâm đối xứng I.



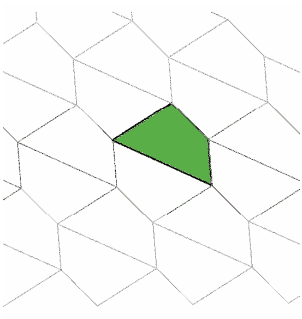
Hình 3.1 *– Ta dựng hình đối xứng của tam giác ABC qua trung điểm của một trong ba cạnh của nó (ở đây là của cạnh BC). Khi đó ta thu được hình bình hành ABDC.*

Tứ giác ABCD là một hình bình hành và ta có thể sử dụng nó để lát mặt phẳng. Ta dựng hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ nhờ công cụ [Đường]Vectơ, và sau đó ta sự dụng chúng để nhân các tam giác ABC et BCD ra bằng phép tịnh tiến nhờ công cụ [Biến hình]Tịnh tiến.



Hình 3.2 *- Dựng các ảnh của hai tam giác qua các phép tịnh tiến.*

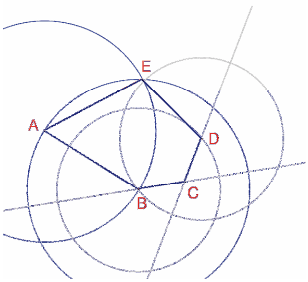
Bằng cách tiến hành tương tự ta có thể lát mặt phẳng bằng một tứ giác bất kì, có thể lồi hay không nhưng không được là tứ giác chéo. Ta sẽ dựng hình đối xứng của tứ giác qua trung điểm của một cạnh và thu được một hình lục giác có các cặp cạnh đối song song từng đôi một. Lục giác này sẽ lát đầy mặt phẳng.



***Hình3.3** - Một cách dựng tương tự cho phép lát mặt phẳng bằng một tứ giác bất kì, có thể không lồi nhưng không được tự cắt.*

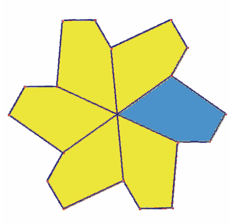
Đối với các đa giác lồi loại khác, bài toán trở nên phức tạp hơn. Đối với hình bảy cạnh trở lên, ta có thể chứng minh rằng không tồn tại bất kì đa giác nào có thể lát được mặt phẳng. Có 3 loại lục giác lồi có thể lát được mặt phẳng và có ít nhất 14 loại ngũ giác lồi có thể lát được mặt phẳng, mỗi loại được xác định bởi một tập hợp các ràng buộc về góc và về độ dài cạnh. Đối với các ngũ giác, ngày nay người ta chưa kiểm chứng được có phải 14 loại ngũ giác này cho ta toàn bộ lời giải hay không ? Loại cuối cùng được khám phá là vào năm 1985. Theo chúng tôi biết, người ta chưa có câu trả lời cho các đa giác không lồi.

Bài tập 12 - Dựng ngũ giác lồi ABCDE thoả mãn điều kiện sau : góc tại A có số đo Â là 60°, góc tại C có số đo là 120°, AB = AE, CB = CD. Các điều kiện này không xác định một ngũ giác duy nhất mà xác định một họ các ngũ giác. Do đó số các điểm tự do của phép dựng sẽ ít nhất là ba.



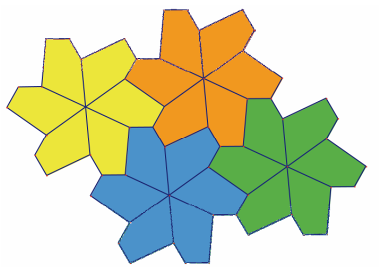
***Hình 3.4** - Dựng một ngũ giác thoả mãn các điều kiện A = 60°, C = 120°, AB = AE và CB = BD. Các điểm A, B và C là các điểm tự do trong mặt phẳng.*

Bằng các phép quay liên tiếp tâm A và góc quay là 60° (công cụ [Biến hình]Quay yêu cầu chọn đối tượng cần biến đổi, một góc, một tâm) ta dựng một « bông hoa » gồm 6 ngũ giác. Góc là số ta nhập vào vùng làm việc với công cụ [Văn bản và Biểu tượng]Số.



Hình 3.5 *– Ngũ giác cơ sở được áp dụng cho phép quay tâm A, góc quay 60°, để thu được một « bông hoa » có sáu cánh.*

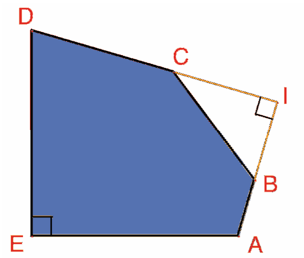
Các bông hoa này có thể được nhân ra tiếp nhờ phép tịnh tiến để lát mặt phẳng. Hình lát thu được là kiểu thứ 5 trong sự xếp loại được đề cập đến trong *Tilings and Patterns.* Nó được công bố bởi *K. Reinhardt* vào năm 1918. Hình lát này không chỉ mônôhêđran, có nghĩa là tất cả các viên ngói đều trùng nhau qua một phép đẳng cự, nhưng hơn nữa nó cũng là isohêđran : tất cả các viên ngói đóng một vai trò quan trọng như nhau trong hình lát. Một cách cụ thể hơn, nếu một phép đẳng cự biến đổi một viên ngói thành một viên khác của hình lát thì nó thuộc nhóm các phép đối xứng của sự hình lát.



Hình 3.6 *– Các bông hoa được tạo ra bởi phép tịnh tiến để phủ toàn bộ mặt phẳng.*

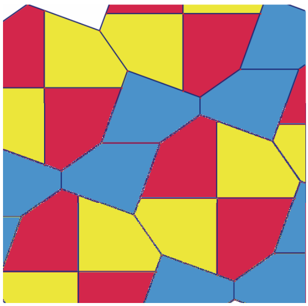
Bài tập 13* - Dựng một ngũ giác ABCDE thoả mãn các điều kiện ràng buộc :

$$\hat{E} = 90^\circ,\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ,\ 2\hat{B} - \hat{D} = 180^\circ,\ 2\hat{C} + \hat{D} = 360^\circ,$$
$$EA = ED = AB + CD\ .$$



Hình 3. 7 *– Ngũ giác kiểu thứ 10 theo sự xếp loại trong Tilings and Patterns. Ngũ giác này dùng trong hình lát loại mônôhêđran. Các điểm E và A là các điểm tự do trong mặt phẳng và điểm I là điểm tự do trên cung tròn.*

Hình lát này được thực hiện bằng cách tạo ra ba hình từ viên ngói cơ sở bằng phép quay tâm E, góc quay 90° liên tiếp quanh đỉnh E. Sau đó các hình vuông được ghép thành các dải bởi các phép tịnh tiến theo một phương. Các dải hình vuông được phân cách bởi các dải ngũ giác như minh hoạ trong hình dưới đây.



Hình 3.8 *– Hình lát mônôhêđran tạo bởi các đa giác lồi. Hình lát này được sáng tạo bởi Richard E. James III sau một bài báo công bố công trình của Martin Gardner trong tạp chí Scientific American năm 1975. Ta có thể đọc bài báo này sau khi được bổ xung trong tạp chí Time travel and other mathematical bewilderments của Martin Gardner, Nhà xuất bản Freeman 1987.*