CABRI™ II PLUS

CABRILOG

Egy innovatív matematikai eszköz

FELHASZNÁLÓI KÉZIKÖNYV

BEVEZETÉS

Üdvözöljük a Cabri GeometryTM interaktív világában!

A Cabri Geometry szoftver eredetileg az IMAG, a „National Center for Scientific Reasearch” (Nemzeti Tudományos Kutató Intézet) és a „Joseph Fourier University” (Joseph Fourier Egyetem, Grenoble, Franciaország) közös kutatásának eredményeképpen jött létre. Jean-Marie LABORDE, a Cabri megálmodója 1985-ben kezdte el a munkát. Célja egy olyan számítógépes program megírása volt, amivel a geometria könnyebben tanulható és tanítható.

Ma több, mint 15 millió ember dogozik elégedetten a Cabri Geometry szoftverrel számítógépeken és a Texas Instruments grafikus zsebszámológépein.

A számítógéppel végzett geometriai szerkesztések egy új lehetőségekkel teli világot nyitottak a hagyományos, papíron körzővel és vonalzóval végzett szerkesztések után. A Cabri Geometry II Plus egy sokoldalú, felhasználóbarát dinamikus geometria szoftver. Segítségével könnyen rajzolhatunk és szerkeszthetünk egyszerű és igen összetett ábrákat egyaránt. Egyszerűen módosíthatjuk a szerkesztéseinket, számtalan változatot megvizsgálva tesztelhetjük elgondolásainkat. Megmérhetjük az objektumok jellemzőit, számolhatunk ezekkel, sejtéseinket ellenőrizhetjük, módosíthatjuk. A Cabri Geometry II Plus is egy élvonalbeli, elsőrendű, az általános iskolától kezdve a felsőoktatásig használható szoftver a geometria tanításához és tanulásához.

Néhány funkció eltérően működik a Macintosh illetve a Windows operációs rendszerre fejlesztett verziókban: a Windows `Ctrl` és `Alt` billentyűinek a Macintosh `Option` és `Alt` billentyűi felelnek meg, míg a Windows-beli jobb gombos egérkattintás a Macintosh egy nyomógombos egerével nem megoldható, helyette a `Ctrl` + kattintás a megfelelő.

• **A felhasználói felület**: Az áttervezett ikonok nagyobbak, könnyebben olvashatóak. Több intuitív legördülő menü segíti az objektumok egyértelmű kiválasztását. Bármely objektum tulajdonságai néhány kattintással megváltoztathatóak.

• **Címkék**: bármely grafikus objektum elnevezhető, megcímkézhető, és ezek a címkék az objektum környékén szabadon áthelyezhetők.

• **Kifejezések:** Egy- vagy többváltozós kifejezések definiálhatók, amelyeket azután a szoftver dinamikusan értékel ki.

• **Dinamikus grafikonok:** Könnyen tudunk függvényeket ábrázolni, (közös koordinátarendszerben akár többet is) és megfigyelhetjük, hogy a függvényparaméterek módosításával összhangban és egyidejűleg változnak a grafikonok is.

• **Koordináták és egyenletek:** Kérésre a program kijelzi a pontok koordinátáit, egyenesek és kúpszeletek egyenletét.

• **Okos egyenesek:** Az alapértelmezés szerint a program az egyeneseknek csak a „hasznos” részét mutatja. Az ábrázolt egyenesdarab hosszát tetszés szerinti alkalommal átállíthatjuk.

• **Színek:** Megváltoztathatjuk a geometriai objektumok, kitöltéseik és a feliratok színét. Használhatjuk az áttervezett, kiterjesztett színpalettát, vagy az új, dinamikus színkezelő funkciót is.

• **Képek (Bittérképek; JPEG és GIF formátumok):** Szerkesztéseinkhez (pontokhoz, szakaszokhoz, sokszögekhez, hátterekhez) képeket csatolhatunk. A képek a szerkesztés módosításával, az animációval párhuzamosan dinamikusan változnak.

• **Szövegek:** A szövegek stílusa, betűtípusa, tulajdonságai akár karakterenként beállíthatók.

• **A szerkesztés leírása ablak:** A Windows-os változatban nyitható egy ablak, amelyben a szerkesztés eddigi lépéseinek a leírását láthatjuk.

• **Szerkesztés menetének felvétele:** Szerkesztésünk tetszőleges részét rögzíthetjük, majd visszajátszhatjuk. Kinyomtathatjuk a tanulók munkáját, szerkesztésük lépéseit, könnyedén követhetjük gondolkodásukat, beazonosíthatjuk esetleges hibáikat (csak Windows operációs rendszeren).

• **Szerkesztések importja és exportja:** Számítógépen végzett szerkesztéseinket exportálhatjuk a TI grafikus zsebszámológépein (a TI-83 Plus-on és a TI-84 Plus-on) futó Cabri Junior programba és vissza.

Mindezek a funkciók a tanulásnak és a felfedezésnek egy új dimenzióját nyitják meg.

A felhasználói kézikönyv két részből áll:

Az első rész, a **KEZDŐ LÉPÉSEK - BEVEZETÉS** azoknak szól, akik első ízben használják a Cabri Geometry programot. Ez a rész ismerteti a felhasználói felületet és megtanítja az egér kezelését. A tapasztalat azt mutatja, hogy az emberek nagyon hamar elsajátítják a program kezelését, és egy osztály tanulói egy fél óra ismerkedés után már nem a szoftver kezelésével foglalkoznak, hanem geometriai problémákat oldanak meg.

A második rész, a **KÖZÉPHALADÓ FUNKCIÓK** középiskolásoknak ajánlott szintű problémákat tárgyal, miközben felfedezhetjük az interaktív geometria világát.

A **REFERENCIAKÖNYV.pdf** egy külön kis füzet, a parancsok teljes, referenciaszerű felsorolásával és leírásával.

A **HALADÓ FUNKCIÓK.pdf** is egy külön kis füzet, benne néhány, a középiskolás törzsanyagon is túlmutató problémával. Ezek nagyobb lélegzetű, egymástól független feladatok. Javasolt ezeket a részletesen kidolgozott szerkesztési eljárásokat követni, majd pedig önállóan megoldani a kitűzött feladatokat.

A továbbiakban a Cabri Geometry II Plus-ra röviden Cabri Geometry-ként hivatkozunk.

Hírek, információk, frissítések letölthetők a *www.cabri.com* honlapról. Ugyanitt számtalan hivatkozást is találunk olyan honlapokra, amelyek a Cabrival foglalkoznak.

A Cabrilog csapat reméli, hogy a szoftverrel öröm lesz dolgozni, és a programot használva sok hasznos órát töltenek majd el kutatással, felfedezéssel.

Cabri Geometry II Plus felhasználói kézikönyv:
Szerzők: Sandra Hoath és Chartwell Yorke
Magyar fordítás: Katona János, katona.janos@ybl.szie.hu
Utolsó módosítás: 2009.08.25
Új verziók: *www.cabri.com*
Hibabejelentés: *support@cabri.com*
Grafika, szerkesztés, tördelés: Cabrilog

TARTALOMJEGYZÉK

KEZDŐ LÉPÉSEK - BEVEZETÉS

1.1 ALAPELVEK

A Cabri Geometry-t úgy tervezték, hogy a lehető legmagasabb szintű interakciót biztosítsa a felhasználó felé (könnyű egér- és billentyűzethasználat, stb.). Ezzel egyrészt a program kezelése nem különbözik lényegesen a megszokott és szabványos szoftverek kezelésétől, másrészt a szerkesztések a legkézenfekvőbb matematikai eljárásokon alapulnak.

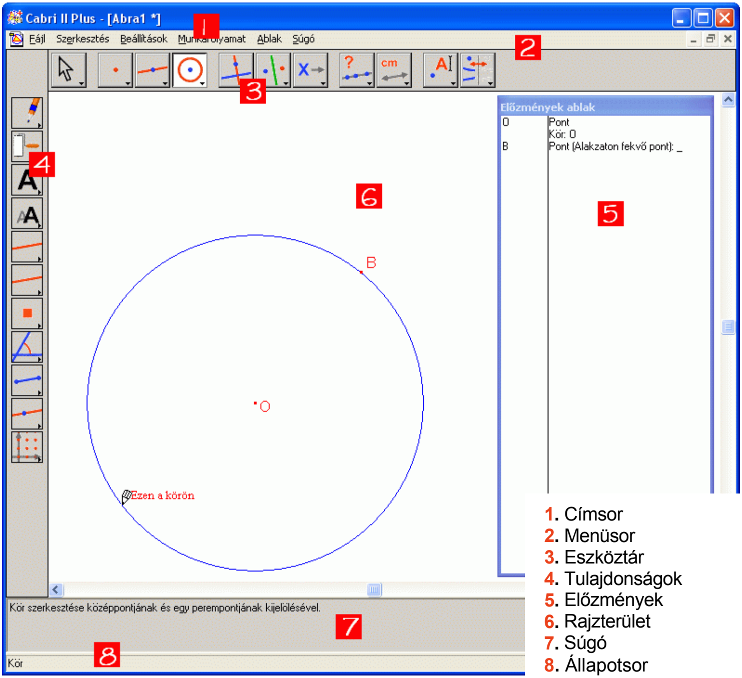
Egy Cabri Geometry ***ábrafájl*** tartalmaz egy ***szerkesztést,*** amelyet egy virtuális, 1 négyzetméter területű papír tetszőleges részén helyezhetünk el. A szerkesztés tartalmazhat szokásos geometriai objektumokat (pontokat, egyeneseket, köröket, stb.) és más objektumokat is (számokat, szövegeket, formulákat, kifejezéseket, stb.).

Az ábrafájl ezenkívül tartalmazhat ***makrót***, ami egy középhaladó szerkesztés menetének a leírása. Ezt egyszer felvesszük, tetszőleges sokszor újra lefuttathatjuk, és bővíthetjük vele a szoftver funkcionalitását.

A Cabri Geometry-ben egyidejűleg több szerkesztést, ábrafájlt tarthatunk megnyitva, és ezek között használhatjuk a szokásos kivágás, másolás és beillesztés funkciókat is.

1.2 A FELHASZNÁLÓI FELÜLET

Az alábbi ábrán láthatjuk a Cabri Geometry fő ablakát, és az ablak különböző részeinek a megnevezését, funkcióit. A Cabri Geometry első indításakor a Tulajdonságok eszköztár, a Súgó ablak és az Előzmények ablak még nem látszik, de a menüből bekapcsolható.



1. Címsor
2. Menüsor
3. Eszköztár
4. Tulajdonságok
5. Előzmények
6. Rajzterület
7. Súgó
8. Állapotsor

A ***címsor*** kijelzi a megnyitott vagy elmentett ábrafájl nevét. Az új, még nem elnevezett szerkesztéseket a program Abra névvel illeti, amit egy sorszám követ.

A ***menü sor*** tartalmazza a fájlkezelő parancsokat, és itt állíthatjuk be a program általános környezetét, viselkedését.

A kézikönyv további részében a menüparancsokat az alábbi módon írjuk: szögletes zárójelbe tesszük a főmenü megfelelő pontját, majd pedig kiírjuk a megfelelő parancsot. Például, [Fájl] Mentés mint... jelenti a Fájl menüben található Mentés mint… parancsot.

Az ***eszköztár*** tartalmazza a szerkesztőeszközöket. Ezen a sávon számos eszközdobozt láthatunk, a dobozból éppen aktív eszköz ikonjával. Egy (rövid) kattintással választhatunk az ikonnal szimbolizált eszközök közül. Az egérgombot lenyomva tartva egy legördülő menüt kapunk, amiből egy újabb eszközt választhatunk, és az ennek megfelelő ikon fog megjelenni az eszközdobozon.

Az ***eszköztár*** testreszabható, illetve egy fix beállítás rögzíthető, hogy az osztályban mindenki ugyanazt lássa. Erről bővebben a **REFERENCIAKÖNYV.pdf** nyolcadik fejezetében, az **ALAPBEÁLLÍTÁSOK ÉS TESTRESZABÁS** című részben olvashatunk.

1. Módosítás
2. Pontok
3. Egyenesek
4. Görbék
5. Szerkesztések
6. Transzformációk
7. Makrók
8. Lekérdezések
9. Mérések és számolások
10. Szövegek és szimbólumok
11. Tulajdonságok

A kézikönyv további részében a eszközöket az alábbi módon írjuk: szögletes zárójelbe tesszük az eszközdoboz nevét, majd pedig kiírjuk a benne található megfelelő eszköz nevét. Például az [Egyenesek]Félegyenes jelenti az Egyenesek eszközdobozban található Félegyenes eszközt. (Néhány esetben ez az elnevezés túl hosszú, így ezeket a margóhoz érve elválasztottuk).

Az ikonokat kétféle méretben jeleníthetjük meg. Mozgassuk az egérkurzort a legutolsó eszköztől jobbra található szürke sávba, kattintsunk az egér jobb gombjával (`Ctrl`+click a Macintoshon) és válasszuk a Kis ikonok vagy a Nagy ikonok parancsot.

Az ***állapotsor*** az éppen aktuális eszköz nevét mutatja (csak a Windowsban).

A ***tulajdonságok*** ablakban láthatjuk és változtathatjuk meg az objektumok jellemző tulajdonságait: a színeket, a stílusokat, a méretekt, stb.A Tulajdonságok ablakot a [Beállítások]Tulajdonságok megjelenítése menüponttal kapcsolhatjuk be és a [Beállítások]Tulajdonságok elrejtése menüponttal kapcsolhatjuk ki.

Ugyanezt a Windowsban elérhetjük az `F9`, Macintoshon pedig a `Command-F9` gyorsbillentyűvel.

A ***súgó ablak*** az éppen aktuális eszköz használatában segít. Leírja az eszköz használatához szükséges objektumokat, paramétereket. Ezt az ablakot az `F1` gyorsbillentyűvel jeleníthetjük meg, illetve rejthetjük el.

Az ***előzmények ablakban*** a szerkesztés szöveges leírása található. Itt az összes szerkesztett objektum, és az összes felhasznált szerkesztési lépés kijelzésre kerül. Az ablakot a [Beállítások] Előzmények megjelenítése menüparanccsal kapcsolhatjuk be, és a [Beállítások] Előzmények elrejtése paranccsal kapcsolhatjuk ki. Ugyanezt a PC-n elérhetjük az `F10`, Macintoshon pedig a `Command-F10` gyorsbillentyűvel.

A képernyő legnagyobb részét a ***rajzterület*** foglalja el, itt láthatjuk a szerkesztés aktuálisan megjeleníthető részét.

1.3 AZ EGÉR HASZNÁLATA

A legtöbb program egérrel is kezelhető. Ekkor

- mozgassuk az egeret, ezáltal mozgassuk a képernyőn az egérkurzort a megfelelő helyre
- nyomjuk meg az egérgombot
- eressszük fel.

Amikor az egérkurzort a rajzterületen mozgatjuk, a Cabri Geometry háromféleképpen informál az egérkattintással, illetve a ***fogd-és-vidd*** módszerrel elérhető funkciókról:

- a kurzor változtatja az alakját
- egy szövegbuborék jelenik meg az egérkurzor mellett
- az éppen szerkesztés alatt álló objektum ideiglenesen megjelenik.

Az éppen aktuális szerkesztési lépéstől függően a szövegbuborék és a szerkesztett objektum nem biztos, hogy megjelenik.

Az egérkurzor lehetséges alakjai és jelentésük:


Egy már létező objektumot választhatunk ki.


Egy már létező objektumot választhatunk ki, elmozgathatjuk, illetve felhasználhatjuk egy szerkesztési lépésben.


Egy létező objektumra kattintottunk abból a célból, hogy elmozgassuk, vagy felhasználjuk egy szerkesztési lépésben.


A kurzor alatt több objektum található, ezért a kijelölés nem egyértelmű. Kattintsunk az egérgombbal, és a legördülő menüből válaszhatunk.


Egy objektumot éppen mozgatunk.


A kurzor egy éppen üres területen áll. Az egérgombot nyomva tartva és az egeret elmozgatva egy téglalap alakú területet jelölhetünk ki.


Pásztázó mód: a rajzlap látható részét tudjuk elmozgatni. Bármikor aktivizálhatjuk ezt a parancsot, ha a Windowsban lenyomjuk a `Ctrl` billentyűt (a Macintoshon az `Option`-t). Ebben a módban az egér a fogd-és-vidd elven működik.


A rajzlapot éppen mozgatjuk.


Az egérkattintás egy új, független (elmozgatható) pontot fog definiálni.


Az egérkattintás egy új pontot fog definiálni. Ez lehet egy objektumon, vagy két objektum metszéspontjában.

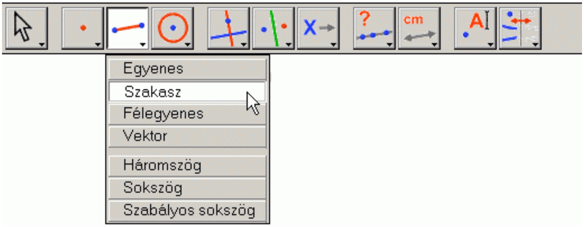

Az egérkattintás a kurzor alatti objektumot az aktuális színnel ki fogja festeni.


Az egérkattintás meg fogja változtatni az objektum valamely tulajdonságát, például a színét, stílusát vagy a vonalvastagságot.

1.4 AZ ELSŐ SZERKESZTÉS

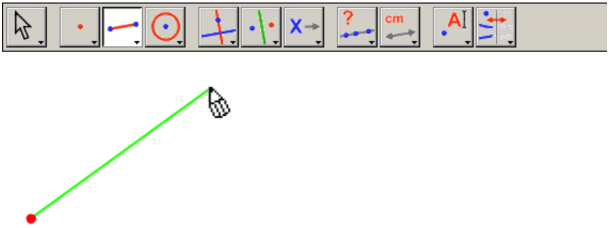
A program képességeinek illusztrálásához egy négyzetet fogunk szerkeszteni, amelynek az egyik átlója adott. Amikor először indítjuk a Cabri Geometry szoftvert, egy új, üres, virtuális rajzlap jön létre, és azonnal kezdhetjük a szerkesztést.

Szerkesszünk egy szakaszt, ez lesz a négyzet egyik átlója. Válasszuk az [Egyenesek]Szakasz eszközt.

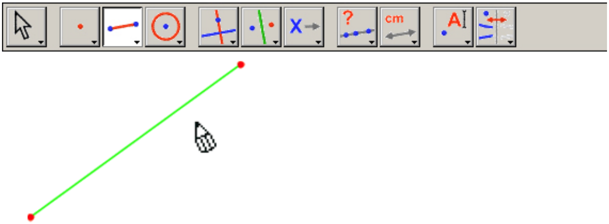


***1.1 ábra** – Válasszuk az [Egyenesek]Szakasz eszközt.*

Most mozgassuk az egérkurzort a rajzterület fölé. Itt a kurzor ceruza alakot vesz fel: . Kattintsunk egyszer, amivel is a szakasz egyik végpontját definiáltuk. Mozgassuk tovább az egérkurzort a rajzterület fölött. A gumivonal mutatja az éppen szerkeszthető szakaszt. Kattintsuk még egyszer. Ezzel a másik végpontot is definiáltunk, és a két pont által meghatározott szakasz is készen van.

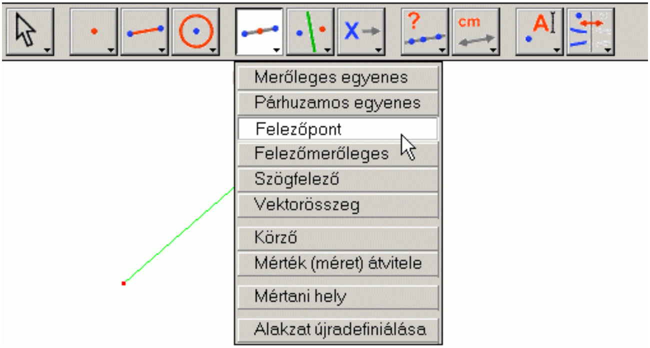


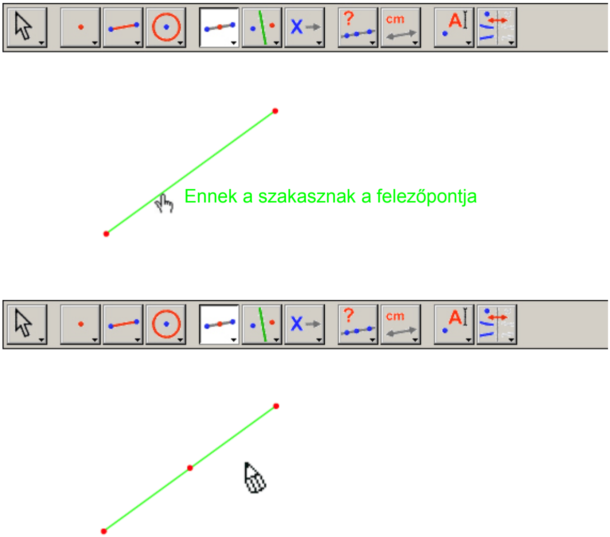
***1.2 ábra** – Szerkesszük meg az első pontot. A szakasz előnézetéhez mozgassuk az egérkurzort egy másik pontba.*



***1.3 ábra** – A második kattintással definiáltuk a szakasz másik végpontját, és ezzel készen is vagyunk. Az [Egyenesek]Szakasz eszköz aktív marad, tehát most egy másik szakaszt is szerkeszthetnénk.*

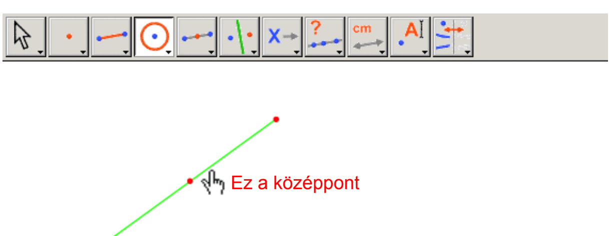
A négyzet szerkesztéséhez először egy olyan kört fogunk szerkeszteni, amelynek a megadott szakasz az átmérője. Ennek a körnek a középpontja a megadott szakasz felezőpontja. Válasszuk ki a [Szerkesztések]Felezőpont eszközt, majd mozgassuk az egérkurzort a szakasz fölé. A kurzor mutatóujj alakot vesz fel: ☝, és megjelenik az Ennek a szakasznak a felezőpontja felirat. Kattintással jóváhagyhatjuk a felezőpont szerkesztését.

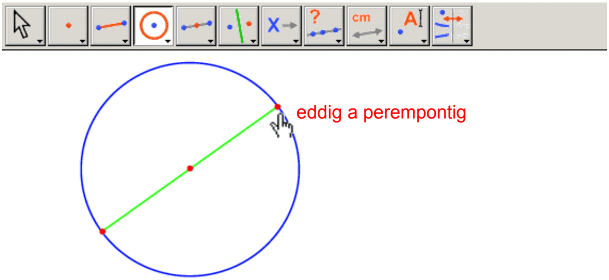




***1.4 ábra** – Szakasz felezőpontjának megszerkesztése.*

Most válasszuk a [Görbék]Kör eszközt, és mozgassuk az egérkurzort a szakasz felezőpontjának a közelébe. Feltűnik az Ez a középpont felirat. A [Görbék]Kör eszköz most várja a kör középpontjának kijelölését, tehát kattintsuk a felezőpontra. Az egérkurzort mozgatva feltűnik a kör. Mozgassuk a kurzort a szakasz egyik végpontjának a közelébe, és amikor feltűnik az Eddig a perempontig felirat, kattintsunk a jóváhagyáshoz.

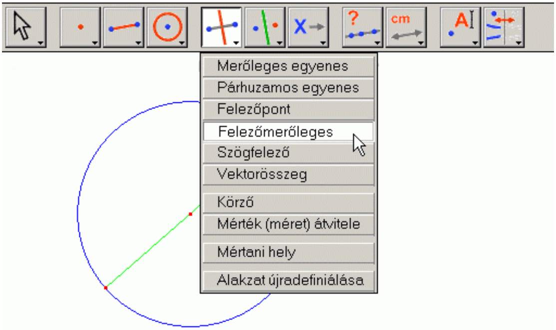


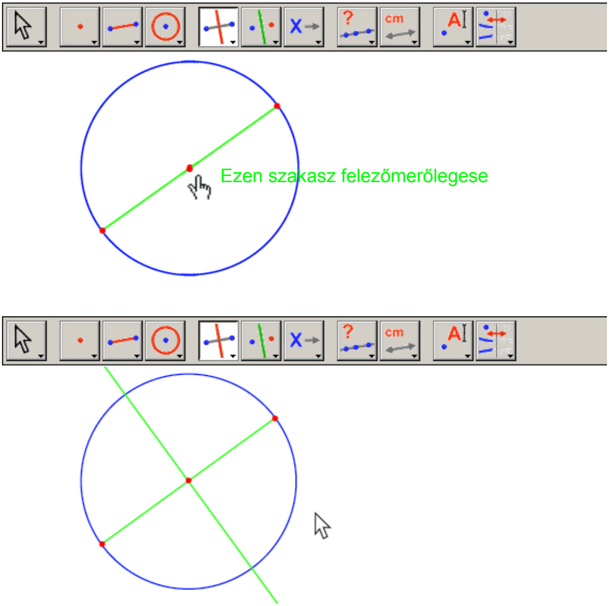


***1.5 ábra**– Kör szerkesztése a megadott szakasz mint átmérő fölé*

Válasszuk [Módosítás]Mutató eszközt az ábrának megfelelően. Most csak a szakasz két végpontja mozgatható, vagy maga az egész szakasz önmagával párhuzamosan eltolható. Ha az egérkurzort ezen mozgatható objektumok fölé visszük, akkor az vastag mutatóujj alakot vesz fel: , és a felugró szövegablakban megjelenik az Ez a pont illetve az Ez a szakasz felirat. Az objektumok a fogd-és-vidd technikával elmozgathatóak, és velük együtt az egész szerkesztés is aktualizálódik: a szakasz áthelyeződik, és vele együtt mozog a felezőpontja, illetve a fölé szerkesztett kör is.

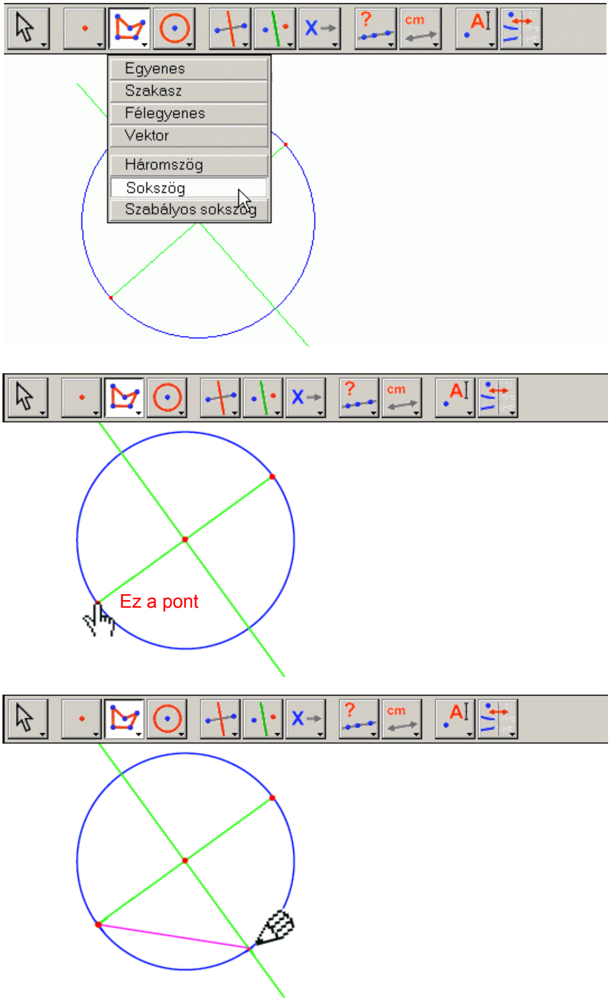
Szerkesszük most meg a négyzet másik átlóját. Ez merőlegesen felezi az megadott átlót. Válasszuk a [Szerkesztések]Felezőmerőleges eszközt, majd kattintsunk a szakaszra. A Cabri Geometry megrajzolja a felezőmerőleges egyenest.





***1.6 ábra** – Szakasz felezőmerőlegesének megszerkesztése.*
Ez a négyzet másik átlójának az egyenese.

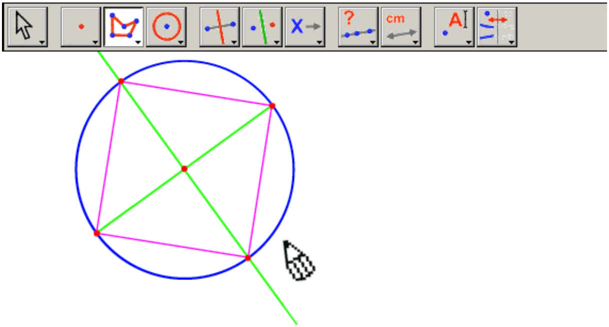
A négyzet szerkesztése az [Egyenesek]Sokszög eszközzel történik. Ez az eszköz az általunk sorban megadott pontokat egy sokszög csúcsainak tekinti. A sokszög befejezéséhez, záródásához a legelőször definiált pontra kell kattintanunk, vagy pedig az utolsó csúcsot kell dupla kattintással kijelölnünk a befejezéshez. Bár a kör és a felezőmerőleges metszéspontjai nincsenek még kijelölve, a Cabri Geometry implicit módon lehetővé teszi ezeknek a pontoknak is a felhasználását a sokszög szerkesztése közben.



__1.7 ábra__ – Négyzet szerkesztése. A kör és a felezőmerőleges egyenes metszéspontjai implicit módon jelölhetők ki.

Más szavakkal: egérkattintással válasszuk ki a szakasz egyik végpontját, ez lesz a sokszög egyik csúcsa. Mozgassuk az egérkurzort a kör és a felezőmerőleges egyik metszéspontjának a közelébe. A felugró ablakban megjelenik az Ez a metszéspont felirat.

Ez a felirat jelzi nekünk, hogy most kattintással megszerkeszthetjük a metszéspontot, egyszersmind a sokszög második csúcsát. Ezután kattintsunk a szakasz másik végpontjára, ez lesz a sokszög harmadik csúcsa, majd pedig a kör és a felezőmerőleges másik metszéspontjára, ami egyben a sokszög negyedik csúcsa is. Végül kattintsunk még egyszer a sokszög első csúcsára, vagy a negyedik csúcsot dupla kattintással kell definiálnunk a befejezéshez.



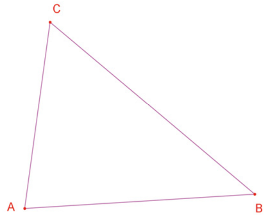
1.8 ábra *– Az első Cabri Geometry-vel végzett szerkesztés*

AZ EULER-EGYENES

Ebben a fejezetben egy általános ABC háromszöget rajzolunk, majd pedig megszerkesztjük a három súlyvonalát. A súlyvonal a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. Ezután megszerkesztjük a három magasságvonalat, a csúcsokból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőlegeseket. Végül megszerkesztjük a háromszög oldalainak felezőmerőlegeseit. Jól ismert tételek, hogy a három súlyvonala egy ponton halad keresztül, a magasságvonalak is egy pontban metszik egymást, és az oldalfelező merőlegesek is egy ponton haladnak keresztül. Ráadásul ez a három pont egy egyenesbe esik, ezt nevezzük a háromszög *Euler*[1] egyenesének.

A háromszög szerkesztéséhez válasszuk az [Egyenesek]Háromszög eszközt. (Az eszköztár használatának a leírását az előző részben, a, a **BEVEZETÉS – KEZDŐ LÉPÉSEK** című fejezetben találjuk.)

Ha az [Egyenesek]Háromszög eszköz aktív, kattintsunk a rajzterület üres részén három helyen. A pontok egyszerűen elnevezhetők, ha az egérkattintás után azonnal bebillentyűzzük a nevüket. Amikor a háromszöget megszerkesztettük, a pontok nevei, címkéi elmozgathatók a pont körül, például a háromszögön kívülre.



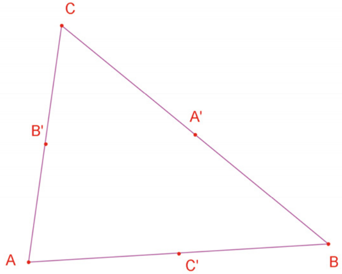
[1] *Léonard Euler, 1707-1783*

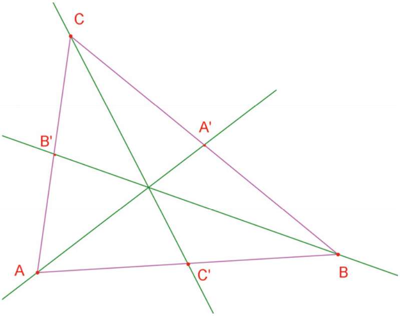
***2.1 ábra** – Az ABC háromszög szerkesztése az [Egyenesek]Háromszög eszközzel. A csúcsok a definiálásukkal egyidőben elnevezhetők.*

Az objektumok nevei, címkéi az [Módosítás]Mutató eszközzel elmozgathatók. Vigyük az egérkurzort a címke fölé. Feltűnik az Ez a címke felirat. Nyomjuk le az egérgombot, és tartsuk lenyomva addig, amíg az egérkurzort a címke új helyére visszük. A név átírásához válasszuk ki a [Szövegek és szimbólumok]Címke eszközt, kattintsunk a címkén, és a megjelenő szerkesztőablakban átírhatjuk az objektum nevét.

Most tegyük aktívvá a [Szerkesztések]Felezőpont eszközt. Az AB szakasz felezőpontjának megszerkesztéséhez kattintsunk először az A, majd a B ponton.

Egy másik módja a szakasz felezőpontja szerkesztésének, ha magán a szakaszon kattintuk. Nevezzük el azonnal a felezőpontot C'-vel. Hasonló módon szerkeszthetjük meg a háromszög másik két oldalának a felezőpontját. Legyen az A' a BC; a B' pedig az AC oldal felezőpontja.





***2.2* ábra**– *[Bal oldalon:] A [Szerkesztések]Felezőpont eszköz két paramétere két pont vagy egy szakasz, vagy egy sokszög egyik oldala lehet.*
[Jobb oldalon:] A súlyvonal szerkesztése az [Egyenesek]Egyenes eszközzel történt, majd megváltoztattuk a szerkesztett egyenesek színét a [Tulajdonságok]Szín... eszközzel.

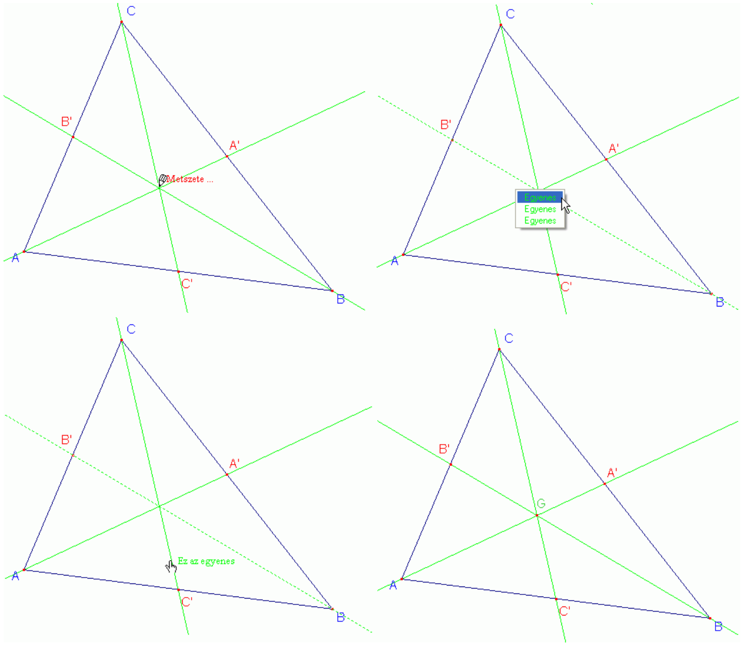
A [Módosítás]Mutató eszközzel szabadon áthelyezhetjük a független pontokat. Jelen esetben az A, a B és a C pont is független, mozgatható pont. A pontok mozgatása azonnal maga után vonja az egész szerkesztés megváltozását, aktualizálását. Ezzel a módszerrel számos különböző konfiguráció megvizsgálható.

Ha azt szeretnénk tudni, hogy mely pontok függetlenek, azaz melyeket tudjuk szabadon elvonszolni, először tegyük aktívvá a [Módosítás]Mutató eszközt, majd tartsuk lenyomva az egérgombot a rajzterület egy üres részén. A független pontokat a szoftver villogással jelzi.

Az [Egyenesek]Egyenes eszközzel szerkeszthetjük meg a súlyvonalakat. Például az AA' súlyvonal definiálásához először az A, majd az A' pontra kell kattintanunk.

A [Tulajdonságok]Szín... eszközzel változtassuk meg a súlyvonalak színét. A megjelenő palettán kattintsunk először a kiválasztott színre, majd pedig azokra az objektumokra, amelyeket át akarunk színezni.

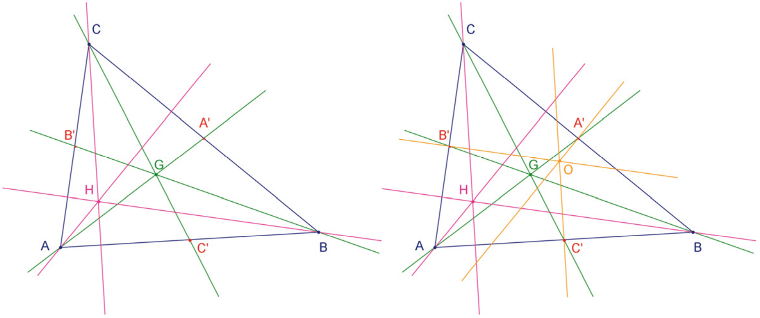
Tegyük aktívvá a [Pontok]Pont eszközt, majd mozgassuk az egérkurzort a három súlyvonal metszéspontjának a közelébe. A Cabri Geometry próbálja két egyenes metszéspontját megszerkeszteni, de most ez nem egyértelmű, mivel itt három egyenes megy át ugyanazon a ponton. A megjelenő felugró ablakban tudjuk kiválasztani, hogy melyik két egyenes metszéspontját szeretnénk definiálni. Ahogyan az egérkurzorral rámutatunk az egyenesek megnevezésére, a kiválasztott egyenest szaggatott vonalstílussal mutatja a program. Végül nevezzük el a súlyvonalak metszéspontját G-vel.



2.3 ábra *– A három súlyvonal metszéspontjának szerkesztése, választás a három egyenes közül.*

A magasságvonalak szerkesztéséhez válasszuk ki a [Szerkesztések] Merőleges egyenes eszközt. Ez az eszköz megszerkeszti azt az egyértelmű egyenest, amely merőleges egy megadott irányra, és áthalad egy megadott ponton. Ezért nyilvánvalóan meg kell adnunk egy pontot, valamint egy irányt definiáló másik objektumot, például egyenest, szakaszt, félegyenest, vektort, stb. Az objektumok megadásának sorrendje tetszőleges. Az A ponton átmenő magasságvonal definiálásához válasszuk ki magát az A pontot, majd pedig a BC oldalt. Hasonlóan szerkesszük meg a B és a C ponton átmenő magasságvonalakat is. Ahogyan azt a súlyvonalaknál tettük, színezzük át a magasságvonalakat, szerkesszük meg a metszéspontjukat, amelyet nevezzünk el H-val.

Most a [Szerkesztések]Felezőmerőleges eszköz következik. Az oldalfelező merőlegesek szerkesztéséhez vagy magára a szakaszra, vagy pedig a két végpontjára kell kattintanunk. A három felezőmerőleges metszéspontját nevezzük el O-nak.

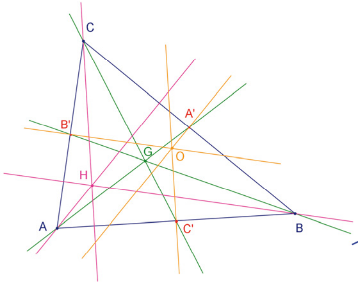


2.4 ábra – *[Bal oldalon:]. Magasságvonalak szerkesztése a [Szerkesztések]Merőleges egyenes eszközzel.*
[Jobb oldalon:] A háromszög oldalfelező merőlegeseinek szerkesztése a [Szerkesztések]Felezőmerőleges eszközzel.

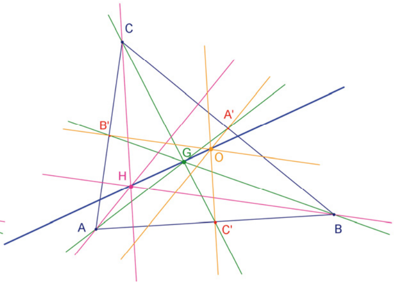
A [Tulajdonságok]Egy egyenesbe eső? eszközzel győződhetünk meg arról, hogy az O, a H és a G pont valóban kollineáris-e? Először jelöljük ki a három pontot, majd kattintsunk a rajzterület egy üres részén, és a Cabri Geometry a kattintás helyén egy szövegablakba kiírja a választ.

A szövegablak is dinamikus, ha tehát egy független pontot elmozgatunk, a szöveg is aktualizálódik.

A háromszög Euler egyenese átmegy az O, a H és a G ponton. A megszerkesztéséhez válasszuk ki az [Egyenesek]Egyenes eszközt, és kattintsunk például az O és a H pontra. A végeredmény kiemeléséhez, az Euler-egyenes megvastagításához használjuk a [Tulajdonságok]Vastagság... eszközt.



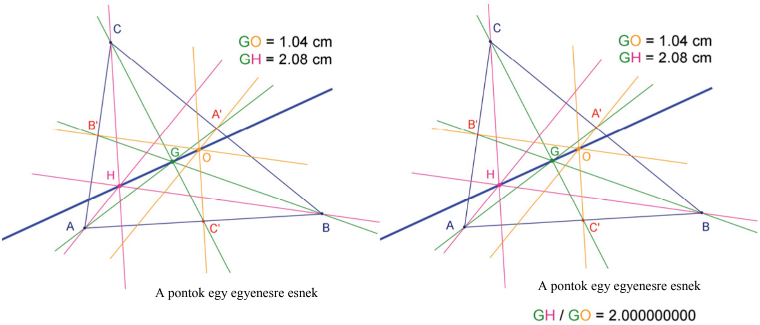
A pontok egy egyenesre esnek



A pontok egy egyenesre esnek

***2.5 ábra** – [Bal oldalon:] Annak leellenőrzése, hogy vajon az O, a H és a G kollineárisak-e. A [Tulajdonságok]Egy egyenesbe eső? eszköz kiírja, hogy A pontok egy egyenesre esnek, vagy pedig, hogy A pontok nem esnek egy egyenesre. [Jobb oldalon:] Az Euler-egyenest kiemeltük: megvastagítottuk a [Tulajdonságok]Vastagság... eszközzel.*

Ha a csúcspontok vonszolásával megváltoztatjuk a háromszög alakját, azt tapasztaljuk, hogy ettől függetlenül a G pont mindig az O és a H között lesz, és a G pont O-hoz és H-hoz viszonyított relatív helyzete változatlan. Mérjük meg a GO és a GH szakasz hosszát a [Mérések és számolások]Távolság vagy Hosszúság eszközzel. Ez az eszköz megméri két pont távolságát vagy egy szakasz hosszát, attól függően, hogy milyen objektumra mutatunk rá. Jelöljük ki a G majd az O pontot, egy szövegablakban megjelenik a két pont centiméterben mért távolsága. Csináljuk meg ugyanezt a G és a H ponttal. A mérés után a szövegablak szerkeszthető. A példa kedvéért a távolság elé írjuk be, hogy GO= , így egyértelműen azonosítható, hogy melyik két pont távolságáról van szó. Ez utóbbi funkció csak a Windows-os változatban működik.



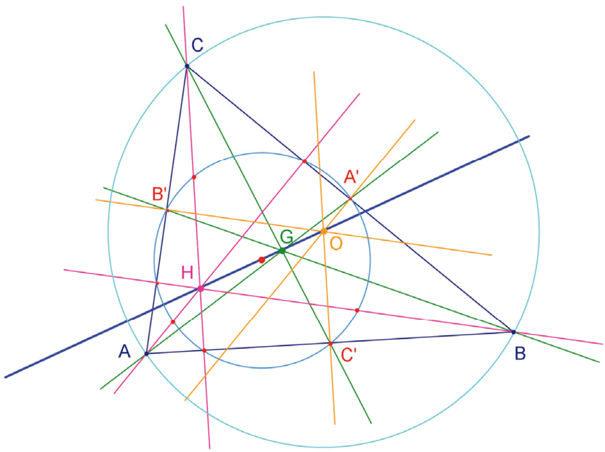
2.6 Ábra - *[Bal oldalon:] A [Mérések és számolások] Távolság vagy hossz eszközzel megmértük a GO és a GH szakasz hosszát. [Jobb oldalon:] A [Mérések és számolások] Számológép... eszközzel kiszámoltuk a GH/GO arányt, és azt találtuk, hogy ez mindig 2.*

A háromszög csúcsait vonszolva azt tapasztaljuk, hogy a GH mindig kétszerese a GO-nak. Ellenőrzésképpen számítsuk ki a GH/GO arányt. Tegyük aktívvá a [Mérések és számolások]Számológép... eszközt. Kattintsunk rá a GH hosszát tartalmazó szövegablakra, ezután kattintsunk a / műveleti jelre, végül pedig a GO hosszát tartalmazó szövegablakra. Most kattintsunk az = jelre. Megjelenik a hányados számértéke, amit a fogd-és-vidd módszerrel elhelyezhetünk a rajzterületen.

Ha most aktívvá tesszük a [Módosítás]Mutató eszközt és rákattintunk az eredményre, meg tudjuk változtatni a kijelzés pontosságát. A + billentyűvel növelni, a – billenytűvel pedig csökkenteni tudjuk a kijelzett tizedesjegyek számát. Azt tapasztaljuk, hogy a GH/GO hányados akár tíz tizedesjegy pontossággal is állandó, méghozzá pontosan 2.

1. gyakorlat - Rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört. Ennek középpontja az O, és áthalad az A, B, C pontokon. Használjuk a [Görbék]Kör eszközt.

2. gyakorlat – Rajzoljuk meg a háromszög Feuerbach-körét, más néven a kilenc pont körét. Ennek a körnek a középpontja az OH felezőpontja, és átmegy az alábbi kilenc ponton: az oldalak A', B' és C' felezőpontjai; a magasságvonalak talppontjai; valamint a HA, HB és a HC szakaszok felezőpontjai.



***2.7 ábra** - A kész rajz a háromszög köré írt körrel és a Feuerbach-körrel (más néven a kilenc pont körével).*

PONT KERESÉSE

A következő példa illusztrálja a Cabri Geometry sokoldalúságát. Induljunk ki három adott pontból, az A, B, C pontokból. Keressük azt az M pontot, amelyre:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

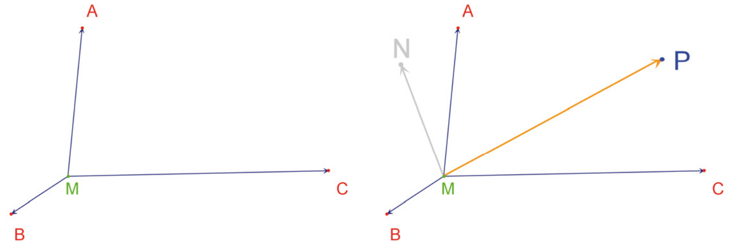
(A fejezet további részében mindig vektorokról lesz szó, ezért a vektorokat jelző nyilakat elhagyjuk.)

Először adjunk meg találomra négy pontot a [Pontok]Pont eszközzel, és nevezzük el ezeket sorban A-nak, B-nek, C-nek és M-nek.

A Cabri Geometry képes vektorokkal dolgozni. A vektorokat a szokásos módon, irányított (nyíllal ellátott) szakasszal ábrázoljuk. Szerkesszük meg az MA vektort. Ehhez tegyük aktívvá az [Egyenesek] Vektor eszközt, majd kattintsunk először az M, majd pedig az A ponton. (Ennek a vektornak az M a kezdőpontja, ezért kellett először az M pontot kijelölni.) Hasonló módszerrel szerkeszzük meg az MB és az MC vektort is.

Most szerkesszük meg az MA és az MB összegét, az MA + MB vektort. Tegyük aktívvá a [Szerkesztések]Vektorösszeg eszközt, kattintsunk sorban a két vektorra, majd pedig az eredmény helyére, azaz az eredő kezdőpontjára. Ebben az esetben ez legyen az M pont. Az eredővektor végpontját nevezzük el N-nel.

Végül ugyanezzel a módszerrel szerkesszük meg az MA + MB + MC összeget, tehát adjuk hozzá az MN vektorhoz (az MA + MB összeghez) az MC vektort. Az eredő kezdőpontja legyen M, a végpontját pedig nevezzük P-nek.



3.1 ábra- *[Bal oldalon:] tetszőleges A, B, C és M pontokból indultunk ki, és megszerkesztettük az MA, MB és az MC vektorokat az ábra szerint.*
[Jobb oldalon:] Az MN = MA + MB, és az MP = MA + MB + MC szerkesztése a [Szerkesztések]Vektorösszeg eszközzel.

Most keressük a megoldást grafikus úton. Tegyük aktívvá a [Módosítás]Mutató eszközt, és mozgassuk az M pontot. Az MA + MB + MC eredővektor is azonnal változik az M áthelyezésével egyidőben. Láthatjuk, hogy az MP eredővektor nagysága és iránya is változik az M, valamint az ABC relatív helyzetétől függően. Többek között az alábbi megállapításokat tehetjük:

- Csak egy olyan M pont van, amelyre az MP eredővektor nullvektor, tehát a megoldás egyértelmű. Ez az M pont mindig az ABC háromszög belsejébe esik.
- Az MANB négyszög parallelogrammma.
- Az MCPN négyszög parallelogrammma.
- Annak a szükséges feltétele, hogy az MP eredővektor nullvektor, az, hogy az MN és az MC kollineáris, továbbá, hogy azonos nagyságúak és ellentétes irányúak legyenek.
- MP mindig ugyanazon ponton megy keresztül, és ez a pont a megoldás
- A P helyzete az M-től függ. Ezt felhasználva definiálhatunk egy transzformációt, amely az M-hez a P-t rendeli hozzá, és az eredmény ennek a transzformációnak az invariánsa.

Tegyük fel, hogy azt vettük észre, hogy az MN és az MC vektoroknak ellentétes irányúaknak kell lenniük. Felvetődik a kérdés: az M pont mely helyzetében lesznek kollineárisak? Mozgassuk az M pontot úgy, hogy a két vektor kollineáris legyen, tehát érjük el, hogy egy egyenesbe essenek. Vegyük észre, hogy M-nek egy egyenesen van a helye, amely egyenes átmegy a C ponton és az AB felezőpontján. Ez a egyenes viszont a háromszög C-hez tartozó súlyvonala. Mivel az M egyformán függ az A, a B és a C ponttól, ezért M rajta kell legyen az A-hoz és a B-hez tartozó súlyvonalon is, tehát az M a súlyvonalak metszéspontjában, a súlypontban kell legyen.

Az osztályban használva ezt a mószert a tanulók most már könnyen folytathatják a gondolatmenetet, megtalálhatják a megoldást, bebizonyíthatják a sejtésüket.

A dinamikus szerkesztések sokkal több információt nyújtanak a papírra rajzolt statikus ábráknál. Természetes, hogy az alapadatok megváltoztatásával, a szerkesztés variálásával nagyon sok különböző elrendezést pillanatok alatt meg tudunk jeleníteni, meg tudjuk ezeket vizsgálni. A sejtésünket számos különböző nézőpontból tudjuk ellenőrizni, ezáltal a statikus ábrán jónak tűnő, de más elrendezésben hamis sejtések hamar elvethetők.

A szoftvert az osztályban használva többek között az alábbiakat érdemes felvetni:

- A dinamikusan és vizuálisan jó szerkesztések elméletileg is helyesek-e?
- Dinamikus szerkesztésünk választ ad-e az eredeti kérdésre?
- Mikor tekinthetjük szerkesztésünket teljes értékű matematikai bizonyításnak?
- Mi hiányzik ahhoz, hogy egy dinamikus ábra teljes értékű matematikai bizonyítás legyen?
- Egy bizonyításnak feltétlenül a szerkesztésnél használt gondolatmenetet kell-e követnie?

3. gyakorlat – Általánosítsuk a feladatot négy megadott pontra, keressük azt az M pontot, amelyre: MA + MB + MC + MD = 0

4. gyakorlat * - Írjuk le az eredeti feladat (a 3 pont) megoldásának és a bizonyításának összes lépését középiskolás szinten.

5. gyakorlat * - Keressük meg azt az M pontot amelyre az MA + MB + MC távolságösszeg minimális. Ez a pont lesz az ABC háromszög *Fermat*[1] –pontja.

[1] *Pierre Simon de Fermat, 1601-1665*

A VARIGNON-FÉLE NÉGYSZÖG

A következő szerkesztés *Varignon*[1] tételén alapszik.

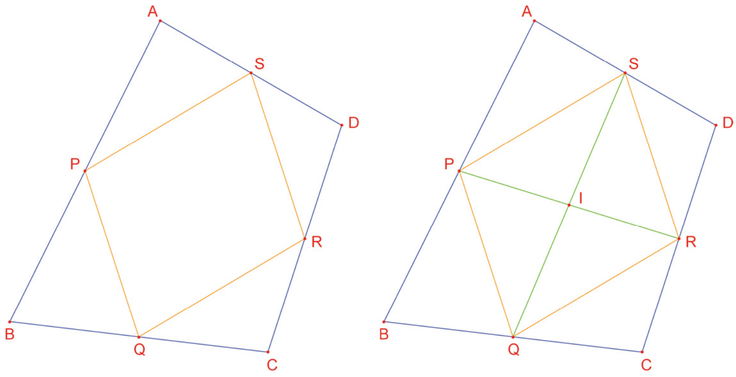
Először szerkesszünk egy tetszőleges négyszöget, nevezzük el ABCD-nek. Ehhez tegyük aktívvá az [Egyensek]Sokszög eszközt, szerkesszünk négy pontot, és mindegyik egérkattintás után azonnal billentyűzzük be a pontok nevét. A négyszög bezárásához az A pontra kell kattintanunk a D pont szerkesztése után.

A [Szerkesztések]Felezőpont eszközzel szerkesszük meg az oldalfelező pontokat: P legyen az AB, Q a BC, R a CD, végül az S a DA szakasz felezőpontja.

Végül az [Egyenesek]Sokszög eszközzel szerkesszük meg a PQRS négyszöget is.

A szerkesztés vizsgálatához használjuk a [Módosítás]Mutató eszközt, mozgassuk a kiindulásul felvett pontokat. A PQRS négyszög mindig parallelogrammának tűnik. Most használhatjuk a [Tulajdonságok]Párhuzamos? eszközt és a Cabri Geometry kiírja, hogy a [PQ] és az [RS] párhuzamosak, csakúgy, mint a [PS] és a [QR]. Ehhez először kattintsunk a [PQ] majd az [RS] szakaszra: a szoftver egy szövegdobozban megjeleníti az eredményt: a két szakasz valóban párhuzamos. Hasonló módszerrel meggyőződhetünk arról, hogy a [PS] is párhuzamos a [QR]-rel.

[1] Pierre Varignon, 1654-1722

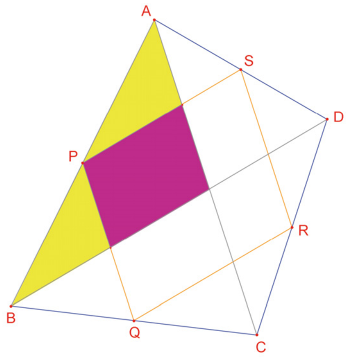


4.1 ábra *- [Bal oldalon:] Tetszőleges ABCD négyszögből kiindulva megszerkesztettük az oldalfelezőpontok által alkotott PQRS négyszöget.*
[Jobb oldalon:] A PQRS átlóinak szerkesztése után ellenőrizhetjük, hogy az átlók felezik egymást.

Most az [Egyenesek]Szakasz eszközzel megszerkeszthetjük a [PR] és a [QS] átlókat, majd pedig a [Pontok]Pont eszközzel ezek I metszéspontját. Több különböző módon is ellenőrizhetjük, hogy az I pont egyaránt felezi a [PR] és a [QS] szakaszt is, ebből következően pedig a PQRS négyszög parallelogramma. Például felhasználhatjuk a súlypontokat (tömegközéppontokat): a P-t tekinthetjük az A és a B egységnyi tömegek súlypontjának:P{(A,1),(B,1)}. Hasonlóan az R tekinthető a C és a D egységnyi tömegek súlypontjának: R{(C,1),(D,1)}. A PR felezőpontja tehát a négy pont súlypontja: {(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)}. A [QS] felezőpontja szintén, tehát a két felezőpont ugyanaz kell legyen, az I pont.

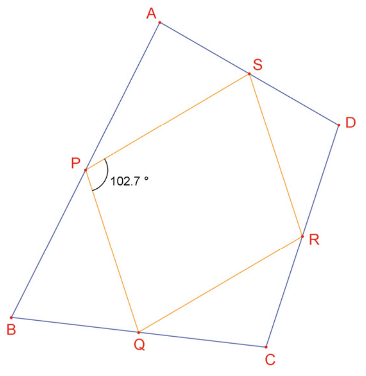
Varignon tétele: Tetszőleges ABCD négyszög oldalfelezőpontjai által alkotott PQRS négyszög egy olyan parallelogramma, amelynek a területe fele az ABCD négyszög területének.

6. gyakolat – Bizonyítsuk be, hogy a tétel állításának második része (a PQRS területére vonatkozó rész) is igaz. Útmutatás: használjuk a *4.2 ábrát*.



4.2 ábra *– A szerkesztés a Varignon tétel állításának második felét szemlélteti.*

Az A, B és C pontokat hagyjuk fixen és vonszoljuk a D pontot úgy, hogy a PQRS négyszög téglalapnak látszódjon. Hogy a PQRS parallelogramma egyben téglalap is legyen, elegendő egyetlen szögéről belátni, hogy derékszög. Mérjük meg a P csúcsnál fekvő szöget. Tegyük aktívvá a [Mérések és számolások]Szög eszközt. A méréshez három pontot kell megadnunk. Az első pont a szög egyik szárát, a második a csúcsát, a harmadik pedig a másik szárát jelöli ki. Most tehát kattintsunk sorban az S, a P és a Q pontokra.



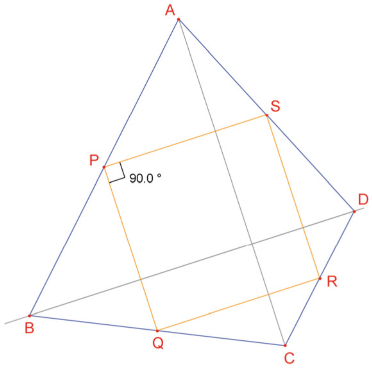
4.3 ábra *– A PQRS parallelogramma P csúcsánál fekvő szög mérése.*

A [Mérések és számolások]Szög eszköz arra is alkalmas, hogy egy már korábban a [Szövegek és szimbólumok]Szög megjelölése eszközzel megjelölt szöget lemérjünk. Ez utóbbi eszköznél ugyanolyan sorrendben kell a pontokra kattintani, mint amilyen sorrendben azt a [Mérések és számolások]Szög eszköz használatánál tettük. Ha a D pontot úgy vonszoljuk, hogy a PQRS négyszög téglalap legyen, azt tapasztaljuk, hogy végtelen sok ilyen hely van, és ezek egy egyenesen helyezkednek el. Ha most behúzzuk az ABCD négyszög AC és BD átlóját, láthatjuk, hogy ezek párhuzamosak a PQRS parallelogramma oldalaival. Ebből következően a PQRS akkor és csakis akkor téglalap, ha az AC és a BD merőlegesek.

Hogy a PQRS mindig téglalap legyen, újra fogjuk a D pontot definiálni. Az [Egyenesek]Egyenes eszközzel szerkesszük meg az A és a C pontokon áthaladó egyenest, majd a [Szerkesztések] Merőleges egyenes eszközzel állítsunk erre merőleges egyenest, amely áthalad a B ponton.

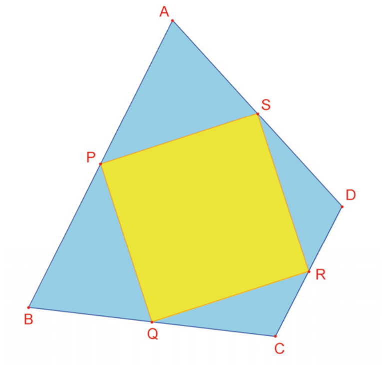
D most egy független, mozgatható pont. Módosítsuk a D definícióját úgy, hogy mindig csak az AC-re merőleges, B ponton áthaladó egyenesre essen. Tegyük aktívvá a [Szerkesztések] Alakzat újradefiniálása eszközt, majd válasszuk ki a D pontot. Egy felugró menüben választhatunk, hogy a D pontot milyen típusú objektumra szeretnénk ráilleszteni. Válasszuk az Alakzaton fekvő pont opciót, majd kattintsunk a szóban forgó egyenesre.

Az Alakzat újradefiniálása egy nagyon hatékony eszköz. Lehetővé teszi, hogy a szerkesztés szadabsági fokát növeljük vagy csökkentsük anélkül, hogy az egész ábrát újra kellene rajzolnunk.



***4.4 ábra** - A D pontot újradefiniáltuk, így most már a PQRS négyszög mindig téglalap. D-nek egy szabadsági foka van, egy egyenes mentén mozoghat*

7. gyakorlat – Adjuk meg annak a szükséges és elégséges feltételét, hogy a PQRS négyszög négyzet legyen. Definiáljuk újra a D pontot ennek megfelelően.



4.5 ábra - A *D pontnak már nincs szabadsági foka, a PQRS négyszög most már mindig négyzet.*